数理解析研究所講究録
第431巻 1981年 90-108

ある多項式の巾積分（c函数）の計算

東大 教養 大島利雄

0. 序　　具体的な多項式の巾の積分で表わされる函数は数学の多くの分野や物理に現われて，一つの研究対象になっている（例えば，種々の特殊函数，球函数，Feynmann積分等）。そこで最も重要なのは，その"接続公式"――函数の特異点でのふるまいを記述するもの――であろう。それは，多項式の巾積の定積分で与えられる。Gaussの超幾何函数が最も良い例となっている。さて，

「具体的な問題で，重要な意味のある量は計算できる」

という立場をとろう。ここでは，対称空間上の函数の，その境界に対する接続公式（＝c函数）は計算できる，と解釈しよう。このc函数は，対称空間における表現論において，最も重要な函数であり，表現の可約性，ユニタリ性等の情報を含んでおり，特に対称空間として実半単純リー群自身を考えたときは，そのPlancherelの公式の測度がc函数で表わせる

ことが Harish-Chandra により得られている。それは，常微分作用素に対する Weyl - Stone - Titchmarsh - Kodaira の展開定理における密度行列に対応すると見ることもできる。

c函数の定義等はここでは詳しく述べないが（cf. [3]），それがどの様な積分となるかについて少し述べよう。リーマン対称空間（非コンパクト型）の場合は，変数変換で最終的には $\int(1+x^2)^\lambda dx$ という積分に帰着されることが知られている（cf. §1）。それを含む場合として [4] で扱ったものがあり，それを，少し一般化した totally split 型のもの（cf. [3]）は，$\int|1\pm x^2|_\pm^\lambda dx$ に帰着される。さて，3年程前に $SU(2,1)/SO(2,1)$ という対称空間の c函数に関連して

$$(1)\qquad \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}}\left|1+z^2+\left(\sqrt{-1}\,t+\frac{|z|^2}{2}\right)^2\right|^\lambda dx\,dy\,dt \qquad \begin{matrix}(\lambda\in\mathbb{C})\\ z=x+iy\end{matrix}$$

という積分が表われることが，関口次郎氏により計算されたが，定積分を具体的に計算することはできなかった。多くの理由から，c函数は Γ函数で表わせると信じられていたが…。

最近，これ等を含む一般の半単純対称空間の c函数を定義し，しかも関口次郎氏との共同研究でその具体的計算に成功したので，その計算の方針について §2 で解説したい。

なお，non-trivial で，最も簡単な例は $SU(n+1,1)/SO(n+1,1)$ の c函数で（$n=1,2,3,\cdots$），それは

$$f_j = (1 + z_{j+1}^2 + \cdots + z_n^2)(1 + \bar{z}_1^2 + \cdots + \bar{z}_j^2)$$
$$+ \{\sqrt{-1}\,t - \tfrac{1}{2}(|z_1|^2 + \cdots + |z_j|^2) + \tfrac{1}{2}(|z_{j+1}|^2 + \cdots + |z_n|^2)\}^2$$

とおくとき

$$(2) \quad \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \cdots f_n^{\lambda_n}\, dx_1 dy_1 \cdots dx_n dy_n\, dt \qquad (z_j = x_j + \sqrt{-1}\,y_j)$$

$$(3) \qquad \lambda_0 - \lambda_n,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}$$

という積分の定数倍になることが示される。(3)は，(2)の被積分函数が1価になる為の条件である。

(1)は(2)で $n=1$，$\lambda_0 = \lambda_1$ の場合に対応している。最近(1)は初等的にも計算できることが関口氏により確かめられた（Formal であるが，[2]の公式の範囲で計算できる。そこにある ${}_3F_2(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta; 2\alpha+2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}; z) = [F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}; z)]^2$（Clausen の公式）等を用いるが，簡明で見通しが良いとは言えない）。特別な場合でも良いが，(2)を初等的に見通し良く計算できる方法があれば，是非教えていただきたいと思います。

1. 例　ここでは，直接計算できる例を挙げる。まず，

$$\int_{\mathbb{R}} t_+^{p-1} (1-t)_+^{q-1}\, dt = B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\int_{\mathbb{R}} t_+^{\beta-1} (1-t)_+^{\gamma-\beta-1} (1-ct)^{-\alpha}\, dt = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; c)$$
$$(c \notin (1, \infty))$$

4次式では，さらに複雑な函数となり，1次式では

$$\int_{\mathbb{R}} t_+^{\alpha-1}dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha} + \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

となる（上の計算の正当化は容易）．

さて，c函数は，一般に多変数の多項式の巾積の積分となる。多変数の函数の定積分は，適当に変数変換して，1変数ずつ積分を計算するという以外は，一般的方法は無いようである（§2で他の方法を述べる）．

例1　$SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の c函数 $c(\lambda)$:

$$c(\lambda) = \int (1+x^2)^{-(\lambda+\frac{1}{2})}\frac{dx}{\pi} \quad \text{で与えられる}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (1+s)^{-(\lambda+\frac{1}{2})}\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}B(\lambda,\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \qquad \left(s=x^2,\ t=\frac{1}{1+s}\right)$$

例2　一般の非コンパクト型リーマン対称空間のc函数は変数変換により，$SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の場合に帰着される。

たとえば，$SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ の場合は，λ によらない定数倍を無視して（以下，同様に，λ によらない定数倍（$\neq 0$）を無視して書く）

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(1+x^2+\left(u+\frac{xy}{2}\right)^2\right)^{\lambda_1} \left(1+y^2+\left(u-\frac{xy}{2}\right)^2\right)^{\lambda_2} dx\,dy\,du$$

で与えられるが，これは，

$$= \int_{\mathbb{R}^3} (1+x^2)^{\lambda_1} \left(1+\left(\frac{u+\frac{xy}{2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\right)^{\lambda_1+\lambda_2} \left(1+\left(\frac{(1+x^2)y - x(u+\frac{xy}{2})}{\sqrt{1+x^2+(u+\frac{xy}{2})^2}}\right)^2\right)^{\lambda_2} dx\,dy\,du$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} (1+X^2)^{\lambda_1} (1+Y^2)^{\lambda_1+\lambda_2+\frac{1}{2}} (1+Z^2)^{\lambda_2} dX\,dY\,dZ$$

$$= \pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(-\lambda_1-\frac{1}{2})\ \Gamma(-\lambda_2-\frac{1}{2})\ \Gamma(-\lambda_1-\lambda_2-1)}{\Gamma(-\lambda_1)\ \ \Gamma(-\lambda_2)\ \ \Gamma(-\lambda_1-\lambda_2-\frac{1}{2})}$$

例 3　一般の複素半単純対称空間 G/H（G, H 共に複素数体上定義され，G が半単純なもの）は，例 2 が，$SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の場合に帰着されるのと同様に，最も簡単な $SL(2,\mathbb{C})/SO(2,\mathbb{C})$ の場合に，c 函数の計算が帰着される。

$SL(2,\mathbb{C})/SO(2,\mathbb{C})$ の場合は，

$$\int_{\mathbb{C}} (1+z^2)^{\lambda+\frac{m}{2}} (1+\bar{z}^2)^{\lambda-\frac{m}{2}} dx\,dy \qquad (\lambda\in\mathbb{C},\ m\in\mathbb{Z})$$
$$z = x+\sqrt{-1}\,y$$

で与えられ，

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} (1+re^{i\theta})^{\lambda+\frac{m}{2}} (1+re^{-i\theta})^{\lambda-\frac{m}{2}} dr\,d\theta \qquad \left(z=\sqrt{r}\,e^{\frac{1}{2}i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (1+2r\cos\theta+r^2)^{\lambda+\frac{m}{2}} (e^{-i\theta}(\cos\theta+i\sin\theta+r))^{-\ell} dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\cos\xi|^{2\lambda+m} \left(1+\frac{u^2}{\sin^2\xi}\right)^{\lambda+\frac{m}{2}} (\cos\xi+i\sin\xi)^{-m} \cos^{-m}\xi \left(1-i\frac{u}{\cos\xi}\right)^{-\ell} du\,d\xi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\xi\cdot\cos^{2\lambda+1}\xi\,d\xi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\eta\cdot\cos^{-2\lambda-2}\eta\,d\eta$$

$$\left(u = r+\cos\theta,\ \xi = \frac{\pi}{2}-\theta;\ \tan\eta = \frac{u}{\cos\xi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\lambda+1)\ \Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2}+\frac{m}{2})\Gamma(\lambda+\frac{3}{2}-\frac{m}{2})} \quad \frac{\Gamma(-\lambda-\frac{1}{2})\Gamma(-\lambda)}{\Gamma(-\lambda-\frac{m}{2})\Gamma(-\lambda-\frac{m}{2})}$$

と計算される。

その他，Feynmann の積分公式 $(a_1>0, \cdots, a_{n+1}>0)$

$$\int_{\substack{t_1\geqq 0,\dots,t_n\geqq 0\\ t_1+\cdots+t_n\leqq 1}} t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}(1-t_1-\cdots-t_n)^{\alpha_{n+1}-1}(a_1t_1+\cdots+a_nt_n+a_{n+1}(1-t_1-\cdots-t_n))^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{n+1})}dt_1\cdots dt_n = \frac{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_{n+1})}{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_{n+1})} a_1^{-\alpha_1}\cdots a_{n+1}^{-\alpha_{n+1}}$$

を使って計算される例を挙げよう。

<u>例4</u>　$SO(4,1)/SO(3)\times SO(1,1)$ の場合.

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+z^2+\bar{z}^2+2u^2+(z\bar{z}+u^2)^2)^{-\lambda}dxdydu \qquad (z=x+iy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} (1+x^2+y^2+u^2-2y)^{-\lambda}(1+x^2+y^2+u^2+2y)^{-\lambda}dxdydu$$

$$= \pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(r+(y-1)^2)^{-\lambda}(r+(y+1)^2)^{-\lambda}\,drdy \qquad \left(\begin{array}{l} x=\sqrt{r}\cos\theta\\ u=\sqrt{r}\sin\theta\end{array}\right.$$

$$= \frac{\pi}{B(\lambda,\lambda)}\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} t^{\lambda-1}(1-t)^{\lambda-1}(r+y^2+2(2t-1)y+1)^{-2\lambda}drdydt \quad \left(\begin{array}{l}\text{Feynmann の}\\ \text{積分公式}\end{array}\right.$$

$$= \frac{\pi}{B(\lambda,\lambda)\ (2\lambda-1)}\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty} t^{\lambda-1}(1-t)^{\lambda-1}\{(y+2t-1)^2+4t(1-t)\}^{1-2\lambda}dydt$$

$$= \frac{\pi\cdot 4^{\frac{3}{2}-2\lambda}}{B(\lambda,\lambda)(2\lambda-1)}\int_{-\infty}^{\infty}(y^2+1)^{1-2\lambda}dy\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-\lambda}(1-t)^{\frac{1}{2}-\lambda}dt$$

$$= \frac{2\pi\cdot 4^{1-2\lambda}}{2\lambda-1}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2\lambda-\frac{3}{2})}{\Gamma(2\lambda-1)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\lambda)\Gamma(\frac{3}{2}-\lambda)}{\Gamma(3-2\lambda)} = \frac{8\pi^{\frac{3}{2}}}{4^{2\lambda}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\lambda)^2}{\Gamma(\lambda)^2}\frac{\Gamma(2\lambda-\frac{3}{2})}{\Gamma(3-2\lambda)}$$

2．漸化式　半単純対称空間 $X=G/H$ の最小次元の境界 ∂X 上の函数 φ に対し，Poisson 積分 $\mathcal{P}_\lambda\varphi$ が存在し，$\mathcal{P}_\lambda\varphi$ は X 上の不変微分作用素の同時固有函数となる。また X 上の不変微分作用素の同時固有函数 u は，その境界値 $\beta_\lambda u$ が ∂X 上に定義できる。一般のパラメータ λ に対し，β_λ と $\mathcal{P}_\lambda$ は，定数倍（あるいは，β_λ，$\mathcal{P}_\lambda$ に独立なものが複数あるときは，定数行列）を除いて互に他の逆となる。その定数が c 函数である。すなわち $c(\lambda)=\beta_\lambda\cdot\mathcal{P}_\lambda$ と定義する（cf.［3］）。

一般の半単純対称空間の c 函数は，対称空間 X の rank を r，split rank を l とおくと，コンパクト実代数群上の r 個の多項式の巾積型の超函数の定積分で表わされる．したがって，r 個のパラメータを持つが，そのうち l 個が $\mathbb{C}$ に値をもつ複素パラメータ，$(r-l)$ 個が $\mathbb{Z}$ に値をもつ離散パラメータである（その他，$\mathbb{Z}_2$ のような有限のパラメータを持つことがある）．それは，以下の方法で計算できる．

(1)　$c(\lambda)$ をあるベキ零群（$\mathbb{R}^n$ と同相）上の多項式の巾積の積分で表わす（これは，すべての λ に対して発散積分になることがある．それは，$S^1\simeq\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上の積分を $\mathbb{R}$ 上の積分に直す，というようなことを行なうので）．

(2)　境界 ∂X 上の函数の間の intertwining operators を用いることにより，連続パラメータが1個（すなわち，split rank が1，換言すると，∂X の余次元が1）の半単純対称空間の c 函数の積で $c(\lambda)$ が表わされることを示す（これは §1 の例2と本質的に同じ）．

(3) r 個のパラメータ $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ に対し，$c(\lambda)$ の満たす漸化式を求める．

(4) 有限集合に値をもつパラメータの部分を考察する。

(5) split rank が1で，離散的パラメータの値が trivial な場合，X 上の不変微分作用素の同時固有函数で，G の極大コンパクト群の作用で不変なもの（高々2次元）は，Gauss の超幾何函数で表わされることがわかる。∂X 上で恒等的に1の値をとる函数の Poisson 積分 $\mathcal{P}_\lambda 1$ がそれであるが，$\mathcal{P}_\lambda 1$ を Gauss の超幾何函数で具体的に表わし（定数倍が重要）その接続公式により，この場合の $c(\lambda)$ を求める。

さて，(2), (3) を用いて，$(r-l)$ 個の離散パラメータが trivial（たとえば，§0 の (2), (3) で $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_l=\lambda_n$）で，連続パラメータの数が1個の場合に c 函数の計算を帰着させる。次に，(4) で，totally split 型（この場合の c 函数の計算は容易）を除いて，本質的には有限集合に値をもつパラメータは無いことを示し（≒ Cartan subgroup の連結性の問題），最後に (5) によって $c(\lambda)$ が計算できる。

(1), (2), (4), (5) については，ユニタリ表現論において新しい方法では無いので，(3) について説明しよう．そこで，最も簡単な $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の場合：

$$c(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda}\,dx$$

を例にとろう。 $f = 1 + x^2$ とおくと

$$\begin{aligned}(xf^{-\frac{1}{2}-\lambda})' &= f^{-\frac{1}{2}-\lambda} - (\lambda+\tfrac{1}{2})f^{-\frac{3}{2}-\lambda}(2x^2)\\ &= f^{-\frac{1}{2}-\lambda} + (\lambda+\tfrac{1}{2})f^{-\frac{3}{2}-\lambda}\,2(f-1)\\ &= 2(-\lambda f^{-\frac{1}{2}-\lambda} + (\lambda+\tfrac{1}{2})f^{-\frac{3}{2}-\lambda})\end{aligned}$$

の両辺を積分して， $-\lambda c(\lambda) + (\lambda+\frac{1}{2})c(\lambda+1) = 0$ ，すなわち， $\dfrac{c(\lambda)}{c(\lambda+1)} = \dfrac{\lambda+\frac{1}{2}}{\lambda}$ という漸化式を得る．

これは，最も自然な一般的方法であろうが，我々の場合、たとえば §0 の (2) の例で，あるいは他の c 函数で実行することは困難であると思われる．そこで，原点に帰り，c 函数の定義に基づいて考察する：

$SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ は上半平面 $H_+ = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ と同一視され， H_+ 上の不変微分作用素環は

$$\Delta \equiv y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = y\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial}{\partial y} - 1\right) + y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

で生成される．その固有空間を

$$\mathcal{A}(H_+\,;\,m_\lambda) = \{u \in \mathcal{A}(H_+)\,;\ \Delta u = (\lambda^2 - \tfrac{1}{4})u\}$$

とおく。λが一般のとき，この固有空間に属し， $u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)\,y^{s+j}$ $(u_0 \neq 0)$ の形のものを考えよう。

$(y\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial}{\partial y}-1)+\frac{1}{4}-\lambda^2)u=-y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ より

$$\sum((s+j)(s+j-1)+\tfrac{1}{4}-\lambda^2)u_j y^{s+j} = -\sum((y\tfrac{\partial}{\partial x})^2 u_j)y^{s+j}$$

y^s の係数を見ると，$u_0 \neq 0$ より $s(s-1)+\frac{1}{4}-\lambda^2=0$．よって，$s=\frac{1}{2}\pm\lambda$ を得る。$s=\frac{1}{2}-\lambda$ とおくと

$$u_j = \frac{(\frac{\partial}{\partial x})^2}{j(j-2\lambda)}u_{j-2}$$

となるので，自然数 k に対し $u_{2k+1}=0$ および，$u_{2k}=\dfrac{(-1)^k\Gamma(-\lambda+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\lambda+1)}\dfrac{\partial^{2k}u_0}{\partial^{2k}x}$ である。$s=\frac{1}{2}+\lambda$ も考えれば，

$$(6)\ u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(-\lambda+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\lambda+1)}\left(\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2k}v_1(x)y^{\frac{1}{2}-\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\lambda+1)}\left(\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2k}v_2(x)y^{\frac{1}{2}+\lambda}$$

が，方程式 $\mathcal{M}_\lambda$: $\Delta u=(\lambda^2-\frac{1}{4})u$ の（形式）解となることがわかる。ここで，もし $v_1(x)$，$v_2(x)$ が解析的なら上の級数は収束し，$0<y\ll 1$ で $\mathcal{M}_\lambda$ の解を与える。このような解を ideally analytic solution と呼び，その境界値 $\beta_\lambda u$ を $v_1(x)$（$\mathrm{Re}\,\lambda>0$ なら，$\beta_\lambda u = u y^{\lambda-\frac{1}{2}}|_{y\to+0}$）と定義する。この定義は，$\mathcal{M}_\lambda$ の一般の解まで自然に拡張でき，境界値は一般に hyperfunction となる（確定特異点型境界値問題）。

さて，$\mathcal{M}_\lambda$ に対する Poisson 変換は，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})\ni\varphi(x)\mapsto(\mathcal{P}_\lambda\varphi)(x,y)=\int\left(\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}+\lambda}\varphi(t)\frac{dt}{\pi}\in\mathcal{A}(H_+;\mathcal{M}_\lambda)$$

で与えられる。そこで，$\beta_\lambda \circ P_\lambda$ を調べよう。そのためには，ポアソン核 $P_\lambda(x-t,y) = \left(\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}+\lambda}$ の境界値を計算すればよい。さて，

$$P_\lambda(x-t,y) = ((x-t)^2+y^2)^{-\frac{1}{2}-\lambda}\ y^{\frac{1}{2}+\lambda}$$

は，$(x,y) \neq (t,0)$ で *ideally analytic solution* となるので，境界値の定義より，$x \neq t$ で $\beta_\lambda P_\lambda = 0$，すなわち，$\mathrm{supp}\,\beta_\lambda u \subset \{x=t\}$ を得る。$v(x) = \beta_\lambda(P_\lambda(x,y))$ とおくと，$\beta_\lambda P_\lambda = v(x-t)$ で，$\mathrm{supp}\,v \subset \{x=0\}$ である。一方，$c>0$ に対し，

$$\begin{aligned} v(cx) &= \left(\frac{y}{(cx)^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}+\lambda} \cdot y^{-\frac{1}{2}+\lambda}\Big|_{y\to+0} \\ &= c^{-1}\left(\frac{\frac{y}{c}}{x^2+(\frac{y}{c})^2}\right)^{\frac{1}{2}+\lambda} \cdot \left(\frac{y}{c}\right)^{-\frac{1}{2}+\lambda}\Big|_{y\to+0} \\ &= c^{-1} v(x) \end{aligned}$$

の両辺を c で微分し $c=1$ とおくと $x\frac{d}{dx}v(x) = -v(x)$ を得る。よって，$v(x) = \pi c(\lambda)\delta(x)$ $(\exists\, c(\lambda) \in \mathbb{C})$ となることがわかる。すなわち，$\beta_\lambda \circ P_\lambda \varphi = \beta_\lambda \int \left[\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right]^{\frac{1}{2}+\lambda} \varphi(t)\frac{dt}{\pi} = \int (\beta_\lambda P_\lambda(x-t,y))\varphi(t)\frac{dt}{\pi} = \int c(\lambda)\delta(x-t)\varphi(t)dt = c(\lambda)\varphi$ である。

次に，$c(\lambda)$ の積分表示を求めよう.

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int \beta_\lambda(P_\lambda(x,y))dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}+\lambda} \cdot y^{\frac{1}{2}-\lambda}\Big|_{y\to+0} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int \left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\lambda}\frac{dx}{y}\Big|_{y\to+0} = \frac{1}{\pi}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}-\lambda}dx \end{aligned}$$

となる。（以上の議論，および以下の議論は形式的であるが正当化は容易）。

(6) の展開，および $\pi^{-1}\beta_\lambda(P_\lambda(x,y)) = c(\lambda)\delta(x)$ となることから，自然数Nに対し，$\mathrm{Re}\,\lambda > 2N$ ならば

$$\pi^{-1}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}+\lambda} = c(\lambda)\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\Gamma(-\lambda+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\lambda+1)}\left(\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2k}\delta(x)\,y^{\frac{1}{2}-\lambda} \quad o(y^{\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\lambda+2N})$$

が成立すると考えられる。N = 1 とおくと

$$(7)\qquad \pi^{-1}y^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}+\lambda} = c(\lambda)\left(\delta(x) + \frac{-1}{-\lambda+1}\frac{y^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x)\right) \quad o(y^2)$$

となるので，両辺に $y^{-2}(x^2+y^2)$ をかけると

$$\pi^{-1}y^{(\lambda-1)-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}+(\lambda-1)} = c(\lambda)\,y^{-2}(x^2+y^2)\left(\delta(x)+\frac{1}{\lambda-1}\frac{y^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta(x)\right) \quad o(y^0)$$

$$= c(\lambda)\left(\delta(x) + \frac{1}{\lambda-1}x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1\right)\frac{1}{4}\delta(x)\right) \quad o(y^0)$$

$$= c(\lambda)\left(1+\frac{1}{\lambda-1}(-1)(-2)\frac{1}{4}\right)\delta(x) = \frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\lambda-1}c(\lambda)\delta(x)$$

となる。これを(7) と比べて，漸化式

$$c(\lambda-1) = \frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\lambda-1}c(\lambda)$$

が得られる。一般の λ に関しては，上式を解析接続すればよい。

一般の半単純対称空間 G/H の場合も，不変微分作用素を用いて，上述と同様の考察をすることにより，λ に関する漸化式を得ることができる。

3. 結果 Gを，複素化$G_{\mathbb{C}}$を持つ，連結実半単純リー群，σをGの任意のinvolution（すなわち，$\sigma^2 = id$を満たすGの解析的自己同型），Hをσで固定される元からなるGの部分群と，その単位元を含む連結成分からなる群との間にある群とする。このとき，等質空間$X = G/H$は半単純対称空間と呼ばれる（分類はcf.［1］）。Gのリー環を$\mathfrak{g}$とおくと，σは$\mathfrak{g}$のinvolutionをひきおこす。θをσと可換な$\mathfrak{g}$のCartan involutionの1つとすると，$\mathfrak{g}$は固有空間に分解する：

$$\begin{array}{cccccccc} \mathfrak{g} = & \mathfrak{k} & \oplus & \mathfrak{p} & = & \mathfrak{h} & \oplus & \mathfrak{q} \\ \theta: & +1 & & -1 & \sigma: & +1 & & -1 \end{array}$$

$$= (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$$

$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$の極大可換部分空間$\mathfrak{a}$をとり，それと可換な$\mathfrak{q}$の可換部分空間で，極大なものを$\mathfrak{t}$とし，$\mathfrak{j} = \mathfrak{a} + \mathfrak{t}$とおく。このとき，$\mathrm{rank}(G/H) = \dim \mathfrak{j}$，split $\mathrm{rank}(G/H) = \dim \mathfrak{a}$となり，$G/H$のc函数$c_{G/H}(\lambda)$は，可換群$\exp \mathfrak{j}$（$\subset G$）から$\mathbb{C}^{\times}$へのhomomorphism（それは，$\mathfrak{j}$の双対空間の複素化$\mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}}$の元$\lambda$とみなせる）をパラメータに持つ．$\mathfrak{a}$の$\mathfrak{g}$におけるcentralizerはreductiveであるが，その（対応する解析的部分群が）compactな極大イデアルを$\mathfrak{m}(\sigma)$とおく。さらに，

$$\mathfrak{g}^d = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$$

$$\mathfrak{h}^d = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$$

$$\mathfrak{k}^d = (\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}) \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h})$$

$$\mathfrak{g}(\sigma)^d = [\mathfrak{m}(\sigma), \mathfrak{m}(\sigma)]\cap\mathfrak{h} \oplus \sqrt{-1}([\mathfrak{m}(\sigma), \mathfrak{m}(\sigma)]\cap\mathfrak{q})$$

とおき，リー環 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{g}^d$，$\mathfrak{h}^d$，$\mathfrak{g}(\sigma)^d$，$\mathfrak{k}^d$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の解析的部分群をそれぞれ K，G^d，H^d，$G(\sigma)^d$，K^d とおく。このとき，K，K^d，$G(\sigma)^d\cap K$ は，それぞれ，G，G^d，$G(\sigma)^d$ の極大コンパクト群になる。

一般に，非コンパクト型対称空間の c 函数は次の様に表わせる：非コンパクト型対称空間 G/K の c 函数 $c_{G/K}(s)$ は，$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_p$ の双対の複素化の元 s をパラメータに持つ．対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_p)$ に対するルート系を $\Sigma(\mathfrak{a}_p)$，それに適当に順序を入れた正のルートの全体を $\Sigma(\mathfrak{a}_p)^+$，$\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a}_p)$ に対応するルート空間の次元を m_α とし，さらに

$$\Sigma(\mathfrak{a}_p)^+_0 = \{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a}_p)\,;\ \tfrac{\alpha}{2}\notin\Sigma(\mathfrak{a}_p)\},$$

$$c_\alpha(s) = \frac{2^{-\frac{\langle s,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}}\,\Gamma\left(\frac{\langle s,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\langle s,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+\frac{m_\alpha}{2}+1\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\langle s,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+\frac{m_\alpha}{2}+m_{2\alpha}\right)\right)},$$

とおくと

(1) $$c_{G/K}(s) = \prod_{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a}_p)^+_0} c_\alpha(s)$$

と表わせる。

対称空間 G/H の c 函数 $c_{G/H}(\lambda)$ に対し，

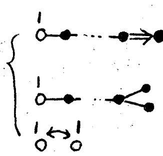
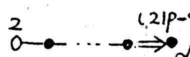
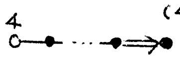
$$c^{G^d/K^d}_{G/H}(\lambda) = c_{G(\sigma)^d/G(\sigma)^d\cap K}(\lambda)\cdot d(\lambda)\cdot c_{G^d/K^d}(\lambda)^{-1}\cdot c_{G/H}(\lambda)$$

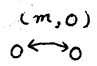
とおく。ここで，$d(\lambda)$ は，highest weight $\lambda|_{\mathfrak{t}}$ を持ち，$\mathfrak{m}(\sigma)\cap$

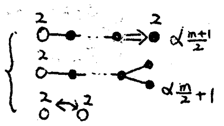
$\mathfrak{h}$で固定される零でないベクトルが存在する，$m(\sigma)$ の既約表現の次元である。また，$C_{G(\sigma)^d/G(\sigma)^d\cap K}$ および C_{G^d/K^d} は，公式(1)から容易にわかる。

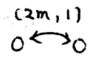
$C_{G/H}^{G^d/K^d}(\lambda)$ は，§2 の (2) により，split rank が 1 の既約対称空間の場合の積で表わせる（(1) と同様の公式が存在する）ことが示せるので，以下，split rank $(G/H)=1$ の場合を考察しよう。なお，対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ と $(\mathfrak{g}^d,\mathfrak{h}^d)$ は，互に他の双対であると言われる。

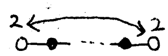
<u>split rank が 1 の既約対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の表</u>

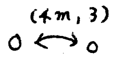
	$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ $\updownarrow$ $(\mathfrak{g}^d,\mathfrak{h}^d)$	$(\Sigma(j),\sigma\theta)$	discrete series の有無	$\begin{bmatrix} m_\alpha^+ & m_{2\alpha}^+ \\ m_\alpha^- & m_{2\alpha}^- \end{bmatrix}$
I_1 :	$\mathfrak{so}(p+1,q+1)/\mathfrak{so}(p+1,q)$	$(p+q,0)$ ○	$q\geqq 1$ のとき有（その他のとき無）	$\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}$
I_1^d :	$\mathfrak{so}(p+q+1,1)/\mathfrak{so}(p+1)\oplus\mathfrak{so}(q,1)$	 $(\lvert p-q\rvert,0)$ $\alpha_{(p,q)+1}$; α_{p+1}	$p\neq q$; $p=q\neq 1$; $p=q=1$; $q\geqq p+1$ のとき有（その他のとき無）	
I_2 :	$\mathfrak{su}(p+1,q+1)/\mathfrak{u}(p+1,q)$	$(2(p+q),1)$ ○	$q\geqq 1$	$\begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 2q & 0 \end{bmatrix}$
I_2^d :	$\mathfrak{su}(p+q+1,1)/\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p+1)\oplus\mathfrak{u}(q,1))$	 $(2\lvert p-q\rvert,1)$ $\alpha_{(p,q)+1}$	$q\geqq p+1$	
I_3 :	$\mathfrak{sp}(p+1,q+1)/\mathfrak{sp}(p+1,q)\oplus\mathfrak{sp}(1)$	$(4(p+q),3)$ ○	$q\geqq 1$	$\begin{bmatrix} 4p & 3 \\ 4q & 0 \end{bmatrix}$
I_3^d :	$\mathfrak{sp}(p+q+1,1)/\mathfrak{sp}(p+1)\oplus\mathfrak{sp}(q,1)$	 $(4\lvert p-q\rvert,3)$ $\alpha_{(p,q)+1}$	$q\geqq p+1$	
I_4^1 :	$F\,\mathrm{II}/\mathfrak{so}(9)$	$(8,7)$ ○ self dual	無	$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
I_4^2 :	$F\,\mathrm{II}/\mathfrak{so}(8,1)$	$(8,7)$ ○ self dual	有	$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

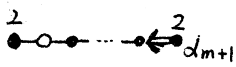
II_1 : $\mathfrak{so}(m+2,\mathbb{C})/\mathfrak{so}(m+1,\mathbb{C})$  無 $\begin{bmatrix} m & 0 \\ m & 0 \end{bmatrix}$

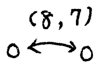
II_1^d : $\mathfrak{so}(m+1,1)$  m : odd 有; m : even 有; m = 2 無

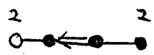
II_2 : $\mathfrak{sl}(m+2,\mathbb{C})/\mathfrak{gl}(m+1,\mathbb{C})$  無 $\begin{bmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 1 \end{bmatrix}$

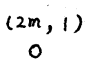
II_2^d : $\mathfrak{su}(m+1,1)$  有

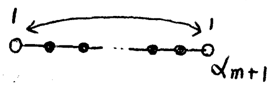
II_3 : $\mathfrak{sp}(m+2,\mathbb{C})/\mathfrak{sp}(m+1,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})$  無 $\begin{bmatrix} 4m & 3 \\ 4m & 3 \end{bmatrix}$

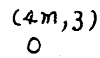
II_3^d : $\mathfrak{sp}(m+1,1)$  有

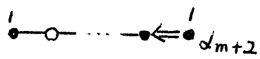
II_4 : $F_4^{\mathbb{C}}/\mathfrak{so}(9,\mathbb{C})$  無 $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

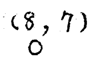
II_4^d : $F\mathrm{II}$  有

III_1 : $\mathfrak{sl}(m+2,\mathbb{R})/\mathfrak{gl}(m+1,\mathbb{R})$  有 $\begin{bmatrix} m & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$

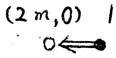
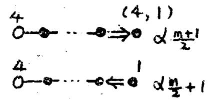
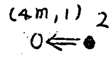
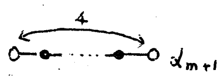
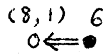
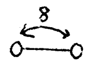
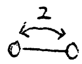
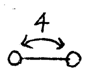
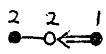
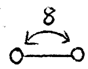
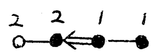
III_1^d : $\mathfrak{su}(m+1,1)/\mathfrak{so}(m+1,1)$  有

III_2 : $\mathfrak{sp}(m+2,\mathbb{R})/\mathfrak{sp}(m+1,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sp}(1,\mathbb{R})$  有 $\begin{bmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 2 \end{bmatrix}$

III_2^d : $\mathfrak{sp}(m+1,1)/\mathfrak{u}(m+1,1)$  有

III_3 : $F\mathrm{I}/\mathfrak{so}(5,4)$  有 $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

III_3^d : $F\mathrm{II}/\mathfrak{sp}(2,1)\oplus\mathfrak{su}(2)$  有

IV_1 :	$so(m+2,\mathbb{H})/so(m+1,\mathbb{H})\oplus so(2)$			無	$\begin{bmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 0 \end{bmatrix}$
IV_1^d :	$so(2(m+2),2)/u(m+1,1)$		m : odd m : even	m : odd のとき有 無	
IV_2 :	$sl(m+2,\mathbb{H})/sl(m+1,\mathbb{H})\oplus sl(1,\mathbb{H})\oplus\mathbb{R}$			無	$\begin{bmatrix} 4m & 3 \\ 4m & 1 \end{bmatrix}$
IV_2^d :	$su(2(m+2),2)/sp(m+1,1)$			有	
IV_3 :	$E\mathrm{IV}/so(9,1)\oplus\mathbb{R}$			無	$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$
IV_3^d :	$E\mathrm{III}/F\mathrm{II}$			有	
V_1 :	$sl(3,\mathbb{C})/sl(3,\mathbb{R})$		self dual	有	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
V_2 :	$su(3,3)/sp(3,\mathbb{R})$			有	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
V_2^d :	$sl(3,\mathbb{H})/sl(3,\mathbb{C})\oplus so(2)$			有	
V_3 :	$E\mathrm{II}/F\mathrm{I}$			有	$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$
V_3^d :	$E\mathrm{IV}/sl(3,\mathbb{H})\oplus su(2)$			有	

ここで，$so^*(2(m+2))\simeq so(m+2,\mathbb{H})$，$su^*(2(m+2))\simeq sl(m+2,\mathbb{H})$，$sp(m+1,1)\simeq u(m+1,1;\mathbb{H})$。また，Kに関し class 1 の discrete series が存在する為の必要十分条件は，I の型で，さらに $m_\alpha^- > m_\alpha^+ + m_{2\alpha}^+ + 2$ が成立すること.

さて，$C_{G/H}^{G^d/K^d}$ は，

$$C_{G^d/H^d}^{G/K}(\lambda)\cdot C_{G/H}^{G^d/K^d}(-\lambda)=1$$

という関係があるので，表の双対の組のうち，上段の $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対応する $C_{G/H}^{G^d/K^d}(\lambda)$ のみを書く。$\Sigma(\mathfrak{j})^+$ のルート $\tilde{\alpha}$ で，$\alpha=\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}+\theta(\tilde{\alpha}))$ が，$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の単純ルートとなるものを固定すると，

・Ⅰの型の場合

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m_\alpha^++m_{2\alpha}^++1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_\alpha^-+m_{2\alpha}^++1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_{2\alpha}^++1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_\alpha^++m_\alpha^-+m_{2\alpha}^++1}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+\frac{m_\alpha^+-m_\alpha^-}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+\frac{m_\alpha^++m_\alpha^-}{2}\right)}$$

・Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ の型の場合

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m_\alpha^++m_{2\alpha}^+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_\alpha^+}{2}+m_{2\alpha}^++1\right)\Gamma\left(\frac{m_{2\alpha}^+}{2}+1\right)}{\Gamma(m_\alpha^++m_{2\alpha}^+)\Gamma\left(\frac{m_{2\alpha}^+-m_{2\alpha}^-}{2}+1\right)\Gamma(m_{2\alpha}^++1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}-m_{2\alpha}^++m_{2\alpha}^-\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+m_\alpha^+-m_{2\alpha}^++m_{2\alpha}^-\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+m_\alpha^+-m_{2\alpha}^++3m_{2\alpha}^-\right)}$$

・Ⅴ の型の場合

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m_\alpha^+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_\alpha^+}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}m_\alpha^+\right)\Gamma(m_\alpha^++1)}{\Gamma\left(\frac{m_\alpha^+}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}m_\alpha^+\right)}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+2m_\alpha^+\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{\langle\lambda,\tilde{\alpha}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+m_\alpha^+\right)}$$

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対応する G, H を適当にとったとき，上の公式で与えられる c 函数以外の c 函数が存在する可能性のあるのは，I_1 $(q\geqq 1)$，III_1，III_2，III_3 に限り，それ等は totally split 型で，c 函数は次の積分で表わせるので，容易に計算される。

$$\int\left(\left(1+x_1^2+\cdots+x_{m_\alpha^+}^2-y_1^2-\cdots-y_{m_\alpha^-}^2\right)^2+u_1^2+\cdots+u_{m_{2\alpha}^+}^2-v_1^2-\cdots-v_{m_{2\alpha}^-}^2\right)_\pm^\lambda\,dx\,dy\,du\,dv$$

また，I_1で，$p=0, q\geqq 1$の場合は，同じパラメータに対し，独立な$\beta_\lambda, \gamma_\lambda$が2つずつ存在する可能性があるが，それ以外はすべて1つのみ存在する。

最後に，§0の(2)の$n=1$の場合の結果を記しておく(前頁の公式より得られる)：$\mu=-\frac{\lambda_1+\lambda_0}{2}-1$, $m=\lambda_1-\lambda_0 (\in\mathbb{Z})$ とおくと

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\ \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4}-\mu)\Gamma(\frac{3}{4}-\mu)\ \Gamma(\mu+\frac{m}{2})\Gamma(\mu-\frac{m}{2})}{\Gamma(\mu)\ \Gamma(1-\mu)^2\,\Gamma(\mu+\frac{m}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\mu-\frac{m}{2}+\frac{1}{2})}$$

4. 文献

[1] Berger, M.: Les espaces symétriques non compacts. Ann. Sci. École Norm. Sup., 74(1957), 85-177.

[2] 森口繁一，宇田川銈一，一松信：数学公式 III，岩波全書，岩波，1960.

[3] Oshima, T.: Fourier analysis on semisimple symmetric spaces. to appear in Proc. Conf. Non-commutative Harmonic Analysis at Marseille-Luminy 1980, Lecture Notes in Math., Springer.

[4] Oshima, T and J. Sekiguchi: Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space. Invent. Math., 57(1980), 1-81.