数理解析研究所講究録
第434巻 1981年 82-91



# Noise-Induced Phase Transition

東工大 理　濱田 義保

最近、雑音によって誘起される相転移現象が、多くの研究者の注目を集めている。[1)〜4)] この現象は、雑音の大きさがある閾値をこえた時、系の状態を記述する変数に対する定常確率密度関数の形が、ドラスティックに変ることから、この名がつけられている。

ここでは、次の2つの模型について得られた結果について言及する。生態学におけるVerhulst 模型[5)] にマルチプリカティブな雑音を付加した模型を考える。この模型の定常確率密度関数については、すでに多くの研究がなされている。[1)] これらの研究についてのレビューと、筆者[4)]によって得られた時間変化の様相とをまとめる。また、marginal stability[6)] をしめす、ドリフト項とマルチプリカティブな雑音項を持った確率微分方程式であらわされる模型について考える。この模型で、確率微分方程式および対応するFokker-Planck方程

式の定常解について考える時、従来のKellsonの判定条件[7]では不都合が生じることがわかった。[8] また、雑音が0から有限になる時、1次転移に対応する相転移が起きることもわかった。

1) マルチプリカティブな雑音を伴ったVerhulst模型

次の確率微分方程式を出発点にとる。

$$dX_t = (\alpha X_t - X_t^2)dt + X_t \circ dB_t$$

ただし、$\alpha > 0$，$\langle dB_t \rangle = 0$，$\langle dB_t dB_t \rangle = 2\varepsilon dt$ とする。雑音項は、Stratonovichの解釈に従うものとする。この時、対応するFokker－Planck方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(X,t) = -\frac{\partial}{\partial X}\left\{(\alpha+\varepsilon)X - X^2 - \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}X^2\right\}P(X,t)$$

この方程式の定常解は

$$P_{st}(X) = \frac{X^{\alpha/\varepsilon - 1}}{\varepsilon^{\alpha/\varepsilon}\,\Gamma(\alpha/\varepsilon)}\exp(-X/2)$$

で与えられることがわかっている。[1] $\varepsilon < \alpha$ では、$P_{st}(X)$ は、$X = \alpha - \varepsilon$ にピークを持つ形であるが、$\varepsilon > \alpha$ では、$X = 0$ で発散し、$X > 0$ で単調減少する形になっている。このように、定常確率密度関数の形が大きく変ることから、雑音によって誘起される相転移が起きていると考えられた。も

っと厳密に言えば、平均値および分散がそれぞれ、

$$\langle X \rangle_{st} = \alpha, \quad \langle X^2 \rangle_{st} - \langle X \rangle_{st}^2 = \alpha \varepsilon$$

であたえられ、$\varepsilon > \alpha$ で、$\sqrt{\alpha\varepsilon} > \alpha$ となり、ゆらぎが平均値の程度まで大きくなり、平均値のまわりに、ゆらいでいると考えられない状態が生じることより、相転移が起きると考えられている。

では、動的には転移点では何らかの異常がおきるであろうか。平衡状態における2次相転移では、転移点において臨界緩和[9)]がおこり、緩和時間が発散することは、よく知られていることである。雑音によって誘起される相転移でも同様なことがおこるか否かについて考えてみる。そのために、モーメントの時間変化をあらわす階級方程式を取扱う。階級方程式を積分方程式に直し、逐次近似によって解き、必要に応じた漸近評価を行い、モーメントの時間変化を求める。[4),10)] 今考えている模型では、厳密解が得られることがわかっている。[4)]

モーメントを

$$a_m(t) = \int_0^\infty dX \cdot X^m P(X,t)$$

で定義する時、モーメント方程式は、

$$\frac{d}{dt} a_m(t) = m(\alpha + m\varepsilon)\, a_m(t) - m\, a_{m+1}(t)$$

で与えられる。逐次近似によって、1次モーメントの時間変

化の厳密解は、次のように得られている。[4)]

$$a_1(t) = x(t) + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} z \int_0^t ds \int_0^1 du \int_{-\infty}^{\infty} dw \, \exp(-w^2 + 2\sqrt{\varepsilon(t-s)}\, w)$$

$$\times e^{\alpha(t-s)} x(s) \exp(z x(s) u/\varepsilon) (1-u)^{1+\alpha/\varepsilon}$$

$$\times \{1 + \alpha/2\varepsilon - (z/\varepsilon) e^{\alpha(t-s)} x(s)\, u(1-u) \exp(2\sqrt{\varepsilon(t-s)}\, w)\}$$

$$\times \exp(-(z/\varepsilon) e^{\alpha(t-s)} x(s)\, u(1-u) \exp(2\sqrt{\varepsilon(t-s)}\, w))\Big|_{z=1}$$

ここで、$x(t)$ は決定論的方程式

$$\frac{d}{dt} x = \alpha x - x^2$$

の解である。また、初期条件 $P(X,0) = \delta(X - x(0))$ が成立つ場合を考えている。具体的な時間変化を求めるために、$x(t) = x(0) = \alpha$ として、数値計算をおこなった。この結果、$\varepsilon$ が小さい間は、$a_1(t) - x(t)$ は、$\exp(-(\alpha-\varepsilon)t)$ に比例した時間変化をし、一見して $\varepsilon = \alpha$ で臨界緩和がおきるように見える。しかし、$\varepsilon$ が大きくなると、振動しながら定常状態に近づいて行くようになり、また緩和時間は $\varepsilon$ が大きくなればなるほど長くなり、$\varepsilon = \alpha$ で臨界緩和は、起きないことがわかった。[4)]

定常確率密度関数は $\varepsilon = \alpha$ で、その形をドラスティックに

変えるが、その点で$\langle X\rangle(t)$の時間変化の様相には、何らの異常も起きないことがわかった。このことは、$\langle X\rangle_{st}$が雑音の大きさによらず、常に一定であり、分散が$\varepsilon=\alpha$で発散しないことに関係していると考えられる。つまり、$\varepsilon=\alpha$で、1次モーメントの定常値については、相転移がおこることを示すような異常は何も起らないのである。従って、平均値の時間変化を考える時、$\varepsilon=\alpha$で臨界緩和が起らない方が、むしろ当然であると思われる。鈴木[11]はこの問題で、$\langle 1/X\rangle(t)$の時間変化を考えているが、この量の方が、今の問題では、適切であるかもしれない。

2) Marginal stability とマルチプリカティブな雑音

次の確率微分方程式であらわされる現象を考える。

$$dX_t = -(\alpha X_t^2 + X_t^3)dt + X_t \circ dB_t$$

ただし、$\alpha > 0$, $\langle dB_t\rangle = 0$, $\langle dB_t dB_t\rangle = 2\varepsilon dt$ とする。また確率変数は、負の値のみとるものとする。対応するFokker-Planck方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}P(X,t) = -\frac{\partial}{\partial X}\left\{a(X) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}b(X)\right\}P(X,t)$$

ただし、$a(X) = \varepsilon X - \alpha X^2 - X^3$, $b(X) = 2\varepsilon X^2$ である。$b(X)=0$, $a(X)=\pm\infty$で決定される点$X=r$をsingular pointという。

この問題の場合、$r=0, \pm\infty$で与えられる。これらの点の近傍での、以下に定義される$\pi(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ の可積性が、確率微分方程式およびFokker−Planck方程式の定常解の存在と大きな関係がある。[7]

$$\pi(x) = \exp\{-2\int^{x}(a(\xi)/b(\xi))d\xi\}$$

$$= x^{-1}\exp(\frac{\alpha}{\varepsilon}x + \frac{1}{2\varepsilon}x^2)$$

$$h_1(x) = \pi(x)\int_{x_0}^{x}[b(\xi)\pi(\xi)]^{-1}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon x}\exp(\frac{\alpha}{\varepsilon}x + \frac{1}{2\varepsilon}x^2)\int_{x_0}^{x}d\xi\,\frac{1}{\xi}\exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\xi - \frac{1}{2\varepsilon}\xi^2)$$

$$h_2(x) = [b(x)\pi(x)]^{-1}\int_{x_0}^{x}\pi(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon x}\exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon}x - \frac{1}{2\varepsilon}x^2)\int_{x_0}^{x}d\xi\,\frac{1}{\xi}\exp(\frac{\alpha}{\varepsilon}\xi + \frac{1}{2\varepsilon}\xi^2)$$

ただし、$x_0$は、$r$の近傍の適当な点である。$\pi(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$の、$0, \pm\infty$での積分可能性を調べると、$h_2(x)$が、$\pm\infty$で積分可能なだけで、他の場合は積分不可能であることがわかった。この結果、Keilson[7] に従って、$0$, $\pm\infty$で与えられる境界の性質を決定すると、$r=0$は、吸収性のない自然壁，$r=\pm\infty$は流入壁となることがわかる。このような場合、確率微分方程

式の定常解 $X_t=0$ は、不安定であり、また境界での確率の流れがないことより、Fokker-Planck 方程式の定常解は、

$$\left\{a(X)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}b(X)\right\}P_{st}(X)=0$$

をとけば得られることがわかっている。ここで考えている問題の場合 $P_{st}(X)$ は、

$$P_{st}(X)=N^{-1}X^{-1}\exp(-\alpha X/\varepsilon-X^2/2\varepsilon)$$

で形式的に与えられるが規格化できないので、確率密度関数とみなすことはできない。つまり、定常確率密度関数は存在しないことになる。しかし、モーメント方程式を用いて考えると時刻 $t=0$ で規格化されている限り、$t=\infty$ でも、規格化されているはずである。

では、なぜ、規格化できる定常解が得られないのであろうか。この問の答として、Keilsonの判定条件をこの問題に、あてはめることが不適切であると考えたい。今、$\int^X d\xi\,\pi(\xi)$ の、$X=0$ 近傍でのふるまいを調べると、$\log|X|$ のようであることがわかる。このように、$\int^X d\xi\,\pi(\xi)$ の発散が log 的である時には、その境界を吸収壁であると考えるべきだと提案したい。Keilson は、$\int^X d\xi\,\pi(\xi)$ が境界で、有限な時のみ、吸収壁であるとしているのに対して、上のような変更が必要であると考える。この変更によって、ここで考えている場合、$X=0$ は吸

収壁とみなすことができ、$P_{st}(X)$ は Dirac のデルタ関数を用いると、$P_{st}(X)=2\delta(X)$ であらわされるようになる。

定常確率密度関数が、デルタ関数になることの是非について考える。そのために、次の確率微分方程式を考える。

$$dX_t=(\eta X_t-\alpha X_t^2-X_t^3)\,dt+X_t\circ dB_t$$

ただし、$\eta>0$ である。対応する Fokker－Planck 方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}P(X,t)=-\frac{\partial}{\partial X}\left\{(\eta+\varepsilon)X-\alpha X^2-X^3-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}(2\varepsilon X^2)\right\}P(X,t)$$

で与えられる。境界の性質は、$\eta=0$ の場合と同じであるが、この場合は、Keilson の判定条件を用いることができ、定常解は、次式であらわされることが容易にわかる。

$$P_{st}^{(\eta)}(X)=N_\eta^{-1}|X|^{\eta/\varepsilon-1}\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}X-\frac{1}{2\varepsilon}X^2\right)$$

ここで $N_\eta$ は、

$$N_\eta=(1/2)(2\varepsilon)^{\eta/2\varepsilon}\Gamma(\eta/2\varepsilon)F(\eta/2\varepsilon,1/2;(\alpha/\varepsilon)^2\varepsilon/2)$$
$$+\alpha(2\varepsilon)^{\eta/2\varepsilon-1/2}\Gamma(\eta/2\varepsilon+1/2)F(\eta/2\varepsilon+1/2,\ 3/2;(\alpha/\varepsilon)^2\varepsilon/2)$$

で与えられる。ただし、$F(c,d;z)$ は、合流型超幾何級数である。$P_{st}^{(\eta)}(X)$ は、$\Gamma(\eta/2\varepsilon)$ が、$\eta=0$ で定義されていないため、$\eta=0$ では、上の表現を用いることはできない。ここでは、$\eta>0$ でのみ成立つ $P_{st}^{(\eta)}(X)$ を $\eta=0$ に解析接続する。合流型超幾何級数の性質より、$N_\eta$ の $\eta\to0$ の時の most divergent term が、$(1/2)(2\varepsilon)^{\eta/2\varepsilon}\Gamma(\eta/2\varepsilon)$

となることを考慮すれば、解析接続を次のように行うことができる。

$$\lim_{\eta/\varepsilon\to+0} P_{st}^{(\eta)}(X) = 2\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}X-\frac{1}{2\varepsilon}X^2\right)\lim_{\eta/\varepsilon\to+0}|X|^{\eta/\varepsilon-1}/\Gamma(\eta/2\varepsilon)$$

$$= 2\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}X-\frac{1}{2\varepsilon}X^2\right)\frac{\mathrm{res.}_{\lambda=-1}X_-^{\lambda}}{\mathrm{res.}_{\lambda=-1}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}$$

$$= 2\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}X-\frac{1}{2\varepsilon}X^2\right)\delta(X) = 2\delta(X)$$

ただし、$X_-^{\lambda}$ は、$X<0$ では、$|X|^{\lambda}$, $X\geq 0$ では、0 であるものとする。また、$\mathrm{res.}_{\lambda=-1}$ は、$\lambda=-1$ における留数をとることを意味している。このように、$\eta\to 0$ で、$P_{st}^{(\eta)}(X)$が、Diracのデルタ関数になることより、我々が最初に考えた$\eta=0$ の場合において、定常確率密度がデルタ関数であらわされることは、妥当であると思われる。すなわち、境界$X=0$ を吸収壁とみなしてもよいものと考えられる。つまり、$\int^{X} d\xi\,\pi(\xi)$ の $X=0$ での発散が、せいぜい log 的である時は、境界は吸収壁であるとするべきだと思う。このように考えることにより、初めて、我々の扱っている模型は、規格化できる定常解を持つようになる。

$P_{st}(X) = 2\delta(X)$ となることを、雑音によって誘起される相転移の立場から考えてみる。雑音がない限り、決定論的方程式 $dx/dt = -\alpha x^2 - x^3$ を扱えばよい。$x(0)<0$ の初期条件

で考えれば、$t\to\infty$ では、安定な定常解 $x_{st}=-\alpha$ に近づくことがわかる。しかし、雑音が少しでもあれば、$\langle x\rangle_{st}=0$ となり、$-\alpha$ と一致しない。このことより、$\varepsilon=0$ で平衡状態の1次転移に対応する相転移がおこることがわかる。ここで考えた模型の時間変化の様相を調べることは興味のあることであるが、それは将来の問題として残しておく。

References


1) W. Horsthemke and M. Malek-Mansou, Z. Phys. B24 (1976), 307.

2) L. Arnold, W. Horsthemke and R. Lefever, Z. Phys. B29 (1978), 367.

3) K. Kitahara, W. Horsthemke, R. Lefever and Y. Inaba, Prog. Theor. Phys. 65 (1980),1233.

4) Y. Hamada, Prog. Theor. Phys. 65 (1981), No 3.

5) H. Haken, Synergetics (Springer-Verlag, 1977).

6) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. 9 (1973),51.

7) J. Keilson, J. Appl. Prob. 2 (1965), 405.

8) Y. Hamada, to be submitted.

9) M. Suzuki and R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 24 (1968), 51.

10) Y. Hamada, Prog. Theor. Phys. 64 (1980), 1127.

11) M. Suzuki, Adv. Chem. Phys. 46 (1980), 195.