数理解析研究所講究録
第435巻 1981年 6-18

臨界点付近における
非線形散逸性ドリフト波

名大 理 谷内俊弥

ChenとOkudaのコンピューターシミュレイションによって無衝突プラズマのドリフト不安定性は強い乱流状態に発達し，そのときmode-couplingによってconvective-cellが作られ，その結果，異常拡散の起ることが示された。また散逸性プラズマの場合にもドリフト波の乱流状態においてconvective-cellが作られ，異常拡散の起ることが示された。ここでは，われわれは散逸性プラズマをドリフト不安定性の臨界点付近においてあつかい，slow convective modeが励起され，このモードによって不安定性が飽和することが示される。したがって乱流状態には発達しない。

散逸性プラズマの臨界点付近の不安定性は，今まで何人かによって非線形な解析がなされた。そのうちセルフコンシステントな理論がMonticelloとSimonによって与えられた。Simonらはスラブモデルを用い，ポテンシャルϕを，プ

ラズマ柱の両端で0とする境界条件を仮定した。したがってConvective-modeは 自動的に排除されてしまう。なぜならこのモードは磁場方向に一定であるから，両端で0ならばすべての点で0となるからである。一方，振動しない成分$(\omega\approx 0)$は ドリフト波の非線形な自己相互作用によって作られる。この成分は $k_{\parallel}=0$ であるが，しかし，convective-modeを励起せずに，磁場の方向に向いた振動しない電場を作り出してしまう。しかし，もし，スラブモデルをトロイダル系の簡単化のために用いたとするならば，周期境界条件が用いられるべきである。この場合には，$k_{\parallel}=0$ の成分はdrift-mode とは別に考えなければならず，convective-modeの存在する可能性が出てくる。実際，Qマシンによって作られたプラズマ柱のエンドプレイトでは プラズマがどのようになっているのかよくわかっていない。そこで，われわれはここでは 中間的な境界条件を仮定することにする。すなわち drift-mode $(k_{\parallel}\neq 0)$ に対しては fixed.boundary-cond.，convective-mode $(k_{\parallel}=0)$ に対しては 磁場方向の境界は自由とし，他の方向のそれは fixed boundary cond. を採用する。

次の章では この境界条件の下で convective-mode がdrift-mode と同じオーダーで励起されることが示される。

この理論は 二流体近似の方程式に基づいており、drift-mode と convective-mode に対して 非線形連立常微分方程式が導かれる。この方程式は正確に積分される。すなわち最初、drift波は線形に成長し、convective-mode を励起し成長は飽和する。ついにはconvective-modeにエネルギーを与えて消失してしまう。それゆえ、乱流にはならない。convective-mode の最低次は渦を作らないで、density-gradient に垂直な運動をするのみなので、拡散にはきかない。拡散は他の理論と同じく、drift波による。最後に われわれの結果と実験とSimonらの結果がくらべられ、われわれの理論が、実験で示されたいくつかの特徴を説明しうることが示される。

ここで扱われるプラズマは 散逸性（$\Omega\tau \gg 1$, τは ion-ion collision time, Ωは ion cyclotron freq.）であり，温度は等温，プラズマ振動は静電的とする。このときイオンの運動方程式は

$$e n\left(\mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}}{c}\right) - \nabla_\perp (nT) = Mn\frac{D\mathbf{u}_\perp}{Dt} + (\nabla\pi)_\perp$$

ただし，Tはイオン温度，$\mathbf{u}_\perp$は磁場に垂直な速度，πは Braginski によるストレステンソルである。一方電子の運動方程式は

$$0 = -en\left(\mathbb{E} + \frac{\mathbb{V}\times\mathbb{B}}{c}\right) - \nabla(nT) - mn\nu\,\mathbb{V}_{\parallel}$$

ただし $\mathbb{V}_{\parallel}$ は磁場に平行な速度，ν は electron-ion collision freq. である。この二つの式より イオンの速度 $\mathbb{U}$ と電子の速度 $\mathbb{V}$ を求め，連続の式に代入すると それぞれ

$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot\Big[-\frac{cn}{B}\hat{z}\times\mathbb{E} + \frac{nc}{\Omega B}\frac{\partial \mathbb{E}_{\perp}}{\partial t} + \frac{\mu T}{M^2\Omega^2}\nabla_{\perp}^2\left(\frac{\nabla_{\perp} n}{n}\right)$$

$$- \frac{\nabla\mu}{M\Omega}\cdot\nabla_{\perp}(\hat{z}\times\mathbb{U}_{\perp 0}) + \hat{z}\times\frac{\nabla\mu}{M\Omega}\cdot\mathbb{U}_{\perp 0}$$

$$+ \frac{CMn}{B}\mathbb{U}_{E}\cdot\nabla(\hat{z}\times\mathbb{U}_{\perp 0}) + \frac{CMn}{eB}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{z}\times\mathbb{U}_{D}) \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot\left(-\frac{cn}{B}\hat{z}\times\mathbb{E} - \frac{T}{m\nu}\nabla_{\parallel} n - \frac{ne}{m\nu}\mathbb{E}_{\parallel}\right) \qquad (2)$$

ただし μ は ion viscocity

$$\mathbb{U}_{\perp 0} \equiv \mathbb{U}_{E} + \mathbb{U}_{D}$$

$$\mathbb{U}_{E} \equiv -\frac{c}{B}\hat{z}\times\mathbb{E}_{\perp} \qquad \mathbb{U}_{D} \equiv \frac{CT}{eBn}\hat{z}\times\nabla_{\perp} n$$

である。ここで $\mathbb{E} = -\nabla\phi$ とすれば n と ϕ に対する基礎方程式が得られる。密度の bach ground を $N(=N_0 e^{-\frac{x}{h}})$ として上の二つの式を線形化すれば 臨界点は簡単に求まる。それらのうち もっとも先に不安定になるモードは その臨界点での振動数を $\bar{\omega}$ と書けば

$$\bar{n} = N_0 \sin(k_x x)\sin(k_z z)\cdot \exp(i k_y y)$$
$$\bar{\Phi} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}(k_\perp a)i\right)\frac{T}{8N}\,\bar{n} \qquad (a\text{はラーマー半径})$$
$$\bar{\omega} = \frac{k_y T c}{2 h g B}$$

である。

Nonlinear Analysis

磁場が臨界点より少し大きくなるとドリフト波は成長しはじめる．しかし，非線形な効果がききはじめ 安定化されるであろう。そこでわれわれは

$$\Delta \equiv \frac{B-\bar{B}}{\bar{B}} \quad (\ll 1)$$

によって n と Φ を漸近展開して，方程式を解く。次のように展開できると仮定する。

$$\begin{aligned} n = N + \Big\{ & n^{(1)}_{d,+1}\exp(-i\bar{\omega}t) + n^{(2)}_{d,+1}\exp(-i\bar{\omega}t) \\ & + n^{(1)}_{d,+2}\exp(-2i\bar{\omega}t) + \text{C.C.} \Big\} \\ & + n^{(2)}_{d,0} + n^{(1)}_{c} + n^{(2)}_{c} + \{ n^{(2)}_{c,+2}\exp(-i2\bar{\omega}t) + \text{C.C.} \} \\ & + O(\Delta^3) \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \Big\{ & \phi^{(1)}_{d,+1}\exp(-i\bar{\omega}t) + \phi^{(2)}_{d,+1}\exp(-i\bar{\omega}t) \\ & + \phi^{(2)}_{d+2}\exp(-2i\bar{\omega}t) + \text{C.C.} \Big\} \end{aligned}$$

(2)式は

$$\frac{\partial n_c^{(1)}}{\partial t} + \frac{c}{B}\left\{\nabla N\cdot\hat{z}\times\phi_c^{(2)} + \nabla n_c^{(1)}\cdot(\hat{z}\times\nabla\phi_c^{(1)})\right\}$$
$$= -\frac{c}{B}\left\langle \nabla n_{d+1}^{(1)}\cdot(\hat{z}\times\phi_{d-1}) + \nabla n_{d-1}^{(1)}\cdot(\hat{z}\times\nabla\phi_{d+1}^{(1)})\right\rangle$$
$$-\frac{T}{m\nu N}\left\langle 2\frac{\partial n_{d+1}^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial n_{d-1}^{(1)}}{\partial z} + n_{d-1}^{(1)}\frac{\partial^2 n_{d+1}^{(1)}}{\partial z^2} + n_{d+1}^{(1)}\frac{\partial^2 n_{d-1}^{(1)}}{\partial z^2}\right\rangle$$

ここで $\langle Q\rangle$ は Q の z によらない部分を取り出したものを示す。このとき $\phi_c^{(2)}$ は x と Δt の関数であると仮定すると上式より

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial t} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\,\frac{cN_0^2 T k_\perp a k_x k_y}{BN\gamma}\,|P|^2 \tag{7}$$

が導びかれる．ここで導入された $\hat{n}(\Delta t)$ は

$$n_c^{(1)} = \hat{n}\sin 2k_x x \tag{8}$$

となるように決められた。$\phi_c^{(1)}$ は(6)と(8)式から得られる。(7)式によればconvective-modeはドリフト波どうしの自己相互作用によって励起されることがわかる。さらに，Δ^2 のオーダーで ϖ で振動するdrift-modeの部分を集めると．

$$\mathbb{M}\begin{pmatrix} n_{d+1}^{(2)} \\ \phi_{d+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_E \\ F_I \end{pmatrix} \tag{9}$$

の形に書ける．$\mathbb{M}$ はマトリックスであって

$$+\phi_{d0}^{(2)} + \phi_c^{(1)} + \phi_c^{(2)} + \left\{ \phi_{c,\pm 2}^{(2)} \exp(-i2\bar{\omega}t) + C.C. \right\} + O(\Delta^3) \tag{4}$$

ここで superscriptは Δ のオーダーを示しており，たとえば $n^{(Q)}/N \sim \Delta^Q$ である。$n_{d\pm1}^{(1)}$ と $\phi_{d\pm1}^{(1)}$ は

$$n_{d+1}^{(1)} \equiv \Gamma \bar{n} \quad , \quad \phi_{d+1}^{(1)} \equiv \Gamma \bar{\phi}$$

で定義される。ここで Γ は Δt の複素関数であり，線形不安定のドリフト波の時間的にゆっくり変化する部分に相当する。subscript の d は drift-mode であることを示し，$k_{\parallel}=0$ の成分はふくまない。C は $k_{\parallel}=0$ の成分だけでできており Δt でゆっくり変化する関数であることを示している。(3), (4)式を (1), (2)式に代入すれば Δ のオーダーでは $\phi_{d+1}^{(1)}$, $n_{d+1}^{(1)}$ に対する線形な方程式を得るがこれは自動的に満たされる。$\phi_c^{(1)}$ と $n_c^{(1)}$ に対しては

$$\frac{CN}{hB} \frac{\partial}{\partial y} \phi_c^{(1)} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{T\mu}{M^2\Omega^2 N} \nabla_{\perp}^4 n_c^{(1)} + \frac{c\mu}{M\Omega B} \nabla_{\perp}^4 \phi_c^{(1)} = 0 \tag{6}$$

となる。これより，$\phi_c^{(1)}$ と $n_c^{(1)}$ は x だけの関数であることがわかる。Δ^2 のオーダーで convective-mode に対しては，

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -i\bar{\omega} - \frac{T}{m\nu}\frac{\partial^2}{\partial z^2} & , \frac{CN}{hB}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{nq}{m\nu}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ -i\bar{\omega} + \frac{T\mu}{M^2\Omega^2 N}\nabla_\perp^4 + i\bar{\omega}\frac{CT}{\Omega B q}\nabla_\perp^2 , & \frac{CN}{hB}\frac{\partial}{\partial y} + i\bar{\omega}\frac{CN}{\Omega B}\nabla_\perp^2 + \frac{c\nu}{M\Omega B}\nabla_\perp^4 \end{pmatrix}$$

で与えられる。F_EとF_Iは coupling によってできる forcing term であって

$$F_E = \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\bar{n} + ik_y\frac{TC}{hqB}\frac{Nq}{T}\bar{\phi}\Delta$$
$$+ \frac{C}{B}\nabla n_c^{(1)}\cdot(\hat{z}\times\nabla_\perp\phi_{d+1}^{(1)}) + \frac{C}{B}\nabla n_{d+1}^{(1)}\cdot(\hat{z}\times\nabla_\perp\phi^{(1)})$$
$$+ \frac{T}{m\nu}\nabla\cdot\left(\frac{n_{d+1}^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}n_c^{(1)}}{N} + \frac{n_c^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}n_{d+1}^{(1)}}{N}\right) \qquad (10)$$

$$F_I = -\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\bar{n} + \nabla_\perp\left(\frac{NC}{\Omega B}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\bar{\phi}\right) + \frac{CT}{\Omega B q}\nabla_\perp\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\bar{n}\right)$$
$$+ \left\{\frac{4\mu T k_\perp^4}{M^2\Omega^2 N}\Delta - 2i\bar{\omega}(k_\perp a)^2\Delta\right\}\bar{n}$$
$$+ \frac{Nq}{T}\left\{ik_y\frac{TC}{hqB}\Delta - 2i\bar{\omega}(k_\perp a)^2\Delta + \frac{4\mu T k_\perp^4}{M^2\Omega^2 N}\Delta\right\}\bar{\phi}$$
$$+ \left[\nabla\cdot\left(\frac{cn}{B}\hat{z}\times\mathbb{E}\right)\right]_{fc} - \left[\nabla\cdot\left(\frac{nc}{\Omega B}\frac{\partial\mathbb{E}_\perp}{\partial t}\right)\right]_{fc}$$
$$+ \left[\nabla\cdot\left\{\frac{\mu T}{M^2\Omega^2}\nabla_\perp^2\left(\frac{\nabla_\perp n}{n}\right)\right\}\right]_{fc} + \left[\nabla\cdot\left(\frac{\mu c}{M\Omega B}\nabla_\perp^2\mathbb{E}\right)\right]_{fc}$$
$$+ \left[\nabla\cdot\left\{\frac{\nabla\mu}{M\Omega}\cdot\nabla(\hat{z}\times u_{\perp 0})\right\}\right]_{fc} - \left[\nabla\cdot\left(\hat{z}\times\frac{\nabla\mu}{M\Omega}\cdot\nabla u_{\perp 0}\right)\right]_{fc}$$
$$- \left[\nabla\cdot\left\{\frac{cMn}{qB}u_E\times\nabla(\hat{z}\times u_{\perp 0})\right\}\right]_{fc} - \left[\nabla\cdot\frac{cMn}{qB}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{z}\times u_0)\right]_{fc} \qquad (11)$$

ここで 下付添字の fc は Δ^2 のオーダーの大きさで，ϖ で振動する部分をもつ成分を示めしている。これらは $(n_c^{(1)}, \phi_{d+1}^{(1)})$ $(n_{d+1}^{(1)}, \phi_c^{(1)})$，$(n_{d+1}^{(1)}, n_c^{(1)})$ の カップリングの項を含んでいる。F_Eの方は完全に書かれている。この(9)式を解くために ここで，次の式を満たす ψ_1, ψ_2 を見つけたとすると

$$\tilde{M}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=0 \qquad , \text{境界上で } (\psi_1, \psi_2)=0$$

次の式が成立する。ただし，上の式で $\tilde{M}$ は M の adjoint のことを示している。

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1-\sqrt{2}(k_\perp a)i+O((k_\perp a)^3)\end{pmatrix}e^{ik_y y}\sin k_x x\cdot\sin k_z z$$

そこで上式に左から (ψ_1, ψ_2) をかけて ψ_1, ψ_2 に対する境界条件を用いれば

$$0=\int_0^l(\psi_1,\psi_2)M\begin{pmatrix}n_{d+1}^{(2)}\\ \phi_{d+1}^{(2)}\end{pmatrix}dx=\int_0^l(\psi_1 F_E+\psi_2 F_I)dx \qquad (12)$$

となる。この積分をすると

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=\Gamma\bar{n}\frac{\Omega}{N}\left(\frac{7}{6}k_\perp a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(k_\perp a)^2+(\gamma+\sigma i)\Gamma \qquad (13)$$

ここで

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(k_\perp a)^3}{k_\perp h}\Omega\Delta \quad , \sigma \equiv -\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{k_\perp a}\gamma$$

(13)式の右辺第一項は drift 波と convective-mode のカップリングによるものである。第二項は 分散関係式をΔで展開した時に得られるもので，γとσはそれぞれ 成長率と frequency shift に対応する。

(7)式と(13)式 によって $\hat{n}$と$\mathcal{P}$に対して連立方程式が得られた。(7)の右辺は常に負であって，$\hat{n}$は時間とともに 減少し続ける。したがって，(13)式の非線形項は常に負となり，線形項とバランスして，$|\mathcal{P}|$が成長するのをおさえる。実際にこれらの方程式は積分できる。すなわち，$\mathcal{P}\equiv|\mathcal{P}|e^{i\theta}$とすれば

$$|\mathcal{P}| = \frac{c}{k}\operatorname{sech}\{A(t-T_{max})\} \quad (14)$$

$$\theta = \frac{3\sqrt{2}}{7k_\perp a}\log\left|\frac{\mathcal{P}_0}{\mathcal{P}}\right| + \left(\frac{3\sqrt{2}}{3k_\perp a}\gamma+\sigma\right)t + \theta_0$$

$$\hat{n} = -\frac{6N}{7(k_\perp a)^2\Omega}\left[A\tanh\{A(t-T_{max})\}+\gamma\right] \quad (15)$$

ここで

$$A\equiv\sqrt{\gamma^2+k^2|\mathcal{P}_0|^2} \qquad k\equiv\sqrt{\frac{7N_0}{24N}\Omega(k_\perp a)^3}$$

$$T_{max}\equiv\frac{1}{2A}\log\frac{A+\gamma}{A-\gamma}$$

Γ_0 と Θ_0 はそれぞれ $|\Gamma|$ と Θ の初期値である。Γ は $t=T_{max}$ のときに最大になる。$|\Gamma_0|$ が小さいとし，また $N\simeq N_0$ とすれば，$|\Gamma|$ の最大値 $|\Gamma_{max}|$ は

$$\sqrt{\frac{24}{7}}\,\frac{\gamma}{\Omega(k_\perp a)^3}\cong 2.26\,\frac{\Delta}{k_\perp h} \qquad (17)$$

一方，$\hat{n}$ は $t\to\infty$ で

$$2\hat{n}(T_{max})\cong -\frac{12}{7}N\,\frac{\gamma}{\Omega(k_\perp a)^3}\cong 2.11\,\frac{N\Delta}{k_\perp h} \qquad (18)$$

に近づく。

この解の示すように，最初，ドリフト波は線形に成長し，convective-mode を励起し，ドリフト波は T_{max} で飽和され，さらに convective-mode にエネルギーを与え続け，最後には消失してしまう。一方，convective-mode は一定のレベルに飽和する。background density の空間的な変化は $\hat{n}\times\sin(2k_x x)$ で与えられる。つまり $0<x<\frac{l}{2}$ では減少し，$\frac{l}{2}<x<l$ では増大する，($k_x=\frac{\pi}{l}$)。しかしながら，飽和は空間的な変化でなく，時間的な変化による。

convective-mode は y によらないので，渦を作らないで $\partial\phi_c^{(1)}/\partial x=(2T\hat{n}/eN)k_x\cos(2k_x x)$ の y 方向の速度をもったプラズマ運動をするのみである。したがって convective-mode は拡散に寄与しない。拡散は $\tilde{\phi}$ と $\tilde{n}$ の位相差によっておこ

る。

以上の結果は 実験に合っているということができる。まず，ドリフト波を

$$\phi_d^{(1)} \equiv \Gamma(\Delta t)\,\overline{\Phi}\,, \qquad n_d^{(1)} \equiv \Gamma(\Delta t)\,\overline{n}\,,$$

としたが，これは実験とよく合っており，また 線形理論が実験を予言できるという説明になっている。convective-mode ができて，shear flow を起す過程は 波のエネルギーが 回転エネルギーに変わる過程といってよい。それゆえこのメカニズムは Simon 等の quasi-linear の示すものとは違ったものである。Simon 等においては飽和値は $|\phi|^2 \propto \gamma$ であるが，われわれの場合は $|\phi| \sim \gamma$ である。また Simon 等においては background-density の変化のオーダーは 初期の波の変化のオーダーよりも高いが，われわれの場合は 実験と同じく，同じオーダーである。

われわれや Simon 等は トロイダル系を カルテシアンで近似したり，しているため 定量的な議論はあまり意味は ないが，飽和値の大きさ は，Simon 等 によれば $|\Gamma| = 2.14 \frac{1}{k_\perp h}\sqrt{\Delta}$ であるが，われわれの場合は $|\Gamma|_{max} = 2.26 \frac{1}{k_\perp h}\Delta$ である。実験値は 数値的に $0.2\sqrt{\Delta}$ であって，もし $\Delta \sim \frac{1}{50}$ とするなら

ば，実験と矛盾しないと言うことができる。