数理解析研究所講究録
第 437 巻 1981 年 40-50

G－CW複体に対するWall型障害類

阪大 理　飯塚 邦彦

CW複体に対するfiniteness conditionはWall型の障害類によって与えられる[4]。同様の定理がGが有限群の場合にはG－CW複体に対しても知られている[1]。

本稿ではGがコンパクトLie群の場合に、G－CW複体に対するfiniteness condition即ち「有限G－CW複体にG-dominateされたG－CW複体が有限G－CW複体のG-ホモトピー型をもつ必要十分条件」は何かを考察する。

問題はいくつかに分解される。軌道型の個数については§1で扱う。§2でHauschildのアイデア(cf.[3])によるG－空間F(Y, X)の構成を述べる。F(Y, X)を用いて胞体の数，次元の有限性の考察は、non-equivariantな場合に帰着させることができる(§3)が、本稿ではF(Y, X)の構成を述べることに重点を置き、§3の定理の証明は省略する。

各次元の胞体の数が有限なG－CW複体を有限型であるとい

うが、次の問題は（GがコンパクトLie群のときには）未解決である；有限型のG-CW複体にG-dominateされたG-CW複体は有限型のG-CW複体のG-ホモトピー型をもつか？

以下GはコンパクトLie群とする。

§1　軌道型の個数に対するfiniteness condition

軌道型の個数に関して、次の定理が得られた。

定理1.1　G-CW複体Xに対して次の(a)と(b)とは同値である；

(a) Xは有限個の軌道型をもつG-CW複体とG-ホモトピー同値である。

(b) Xは有限個の軌道型をもつG-CW複体にG-dominateされる。

証明.　(a)$\Longrightarrow$(b)は明らかである。(b)$\Longrightarrow$(a)を示そう。仮定により有限個の軌道型を持つG-CW複体Yと、G-写像$r: Y \longrightarrow X$及び$j: X \longrightarrow Y$が存在して、$r \circ j \simeq_G id_X$となる。Yの軌道型の全体を$\{(H_k)\}_{1 \leq k \leq p}$とする。ここで$(H_i) \leq (H_j)$ (i.e. H_iはH_jのsubconjugate)ならば$i \geq j$が成り立つようにindexを決める。またXの軌道型の

全体を $\{(H_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ として,

$$\Lambda_i = \left\{ \alpha\in\Lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \max\{t \mid (H_\alpha) \le (H_t)\} = i, \\ (H_\alpha) \notin \{(H_k)\}_{1\le k\le p} \end{array} \right\}$$

ここに $1 \le i \le p$,

とおく。定義から明らかに $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ $(i \neq j)$ であり,

$\forall \alpha \in \Lambda - \bigcup_{i=1}^{p} \Lambda_i$ に対し,$(H_\alpha) \in \{(H_k)\}_{1\le k\le p}$ が成り立つ。

さて $\Lambda_m \neq \phi$ となる最小 m を m_0 とする。このとき

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda_{m_0}} GY^{H_\alpha} \subset \bigcup_{i=1}^{m_0} GY^{H_i}$$

が成り立つから,r の制限

$$r_1 : \left(\bigcup_{i=1}^{m_0} GY^{H_i}, \bigcup_{i=1}^{m_0} GY^{H_i}\right) \longrightarrow \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda_{m_0}} GX^{H_\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}, \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}\right)$$

は G-dominating map である。このことから,G-strong deformation retraction

$$\varphi : \bigcup_{\alpha\in\Lambda_{m_0}} GX^{H_\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}$$

が存在することがわかる (cf. [5, Proposition 1.3.])。ψ を ϕ の G-胞体近似写像として,接着空間 X' を

$$X' = \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \cup_{\psi} X$$

によって定義する。X' は X と G-ホモトピー同値な G-CW 複体で,X' の軌道型は $\{(H_\alpha)\}_{\Lambda-\Lambda_{m_0}}$ である。

X' はまた Y に G-dominate されるから,上と同様の操作をくり返す(高々 p 回)ことにより,有限個の軌道型 $\{(H_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda-\bigcup_{i=1}^{p}\Lambda_m}$ をもち X と G-ホモトピー同値な G-CW

複体が得られる。

（証明終）

§2. F(Y, X)の構成

$p: EG \longrightarrow BG$を普遍主G束とする。G-CW複体Xに対し、$EG \times X$にGの対角作用を考えた自由G-空間をEXで表わす。

定理 2.1. EXはG-CW複体のG-ホモトピー型をもつ。

定理の証明はEXがnumerable principal G-space (cf. [2])であることを用いて、まずEXが$G \times G$-CW複体E_0X（EXに弱位相を与えたもの）とG-ホモトピー同値であることを示し、次にE_0Xの各$G \times G$-胞体をG-CW分割することにより、E_0XがG-CW複体のG-ホモトピー型をもつことをいう。

さて(Y, X)はG-CW対で、Y-X上には自由にGが作用しているとする。このときG空間対(EY, EX)とG-ホモトピー同値な相対G-CW複体(F(Y, X), EX)で、すべての整数k ($k \geq 0$)に対してY-Xに含まれるk次元G-胞体と、F(Y, X)に含まれるk次元G胞体とが一対一に対応するものを構成する。

Step 1　まず$Y-X$に含まれるG−胞~~体~~がすべてn次元であるときを考える。したがって

$$Y = X \cup_{\varphi} (\amalg I^n \times G)$$

（ここにφは

$$\varphi : \amalg \partial I^n \times G \longrightarrow X$$

なるG−写像）と表わされる。EGの一点$*$を固定して、

$$\psi : \amalg \partial I^n \times G \longrightarrow EX$$

を

$$\psi(x, g) = (g \cdot *, \varphi(x, g)) \quad (x \in \amalg \partial I^n,\ g \in G)$$

によって定義する。このψを用いて$F(Y, X)$を

$$F(Y, X) = EX \cup_{\psi} (\amalg I^n \times G)$$

と定める。このとき$(F(Y, X), EX)$と(EY, EX)とがG−ホモトピー同値であることは以下のように証明される。

可換図式

$$\begin{tikzcd} F(Y, X) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "p'"'] & & EY \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

を考える。ここにiは包含写像（$F(Y, X)$は自然にEYのG不変部分空間とみなせる）、pは射影、p'はpの制限である。$p \circ \psi = \varphi$であるからp'がホモトピー同値写像であることがわかるが、EYは numerable principal G-space だからiは

G－ホモトピー同値写像である。したがって $id: EX \longrightarrow EX$ は G－ホモトピー同値写像 $f: EY \longrightarrow F(Y, X)$ に拡張する（[2; Appendix, Lemma 4.2] を参照）。

Step 2　次に帰納法を用いて一般の場合に $F(Y, X)$ を構成する。可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} EX & \subset & EY_0 & \subset & EY_1 & \subset & \cdots & \subset & EY_k \\ \| & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_k \\ EX & \subset & F(Y_0, X) & \subset & F(Y_1, X) & \subset & \cdots & \subset & F(Y_k, X) \end{array}$$

で、$f_0, \cdots, f_k$ は G－ホモトピー同値写像であるものができたと仮定する。ただし Y_i は (Y, X) の相対 i 切片（i.e. $Y_i = X \cup Y^i$）である。いま

$$F(Y_{k+1}, X) = F(Y_k, X) \cup_{f_k} F(Y_{k+1}, Y_k)$$

とおいて、図式

$$\begin{array}{ccccc} EY_k & = & EY_k & \subset & F(Y_{k+1}, Y_k) \\ \downarrow f_k & & \| & & \| \\ F(Y_k, X) & \xleftarrow{f_k} & EY_k & \subset & F(Y_{k+1}, Y_k) \end{array}$$

を考えると、f_k は G－ホモトピー同値写像

$$f' : F(Y_{k+1}, Y_k) \longrightarrow F(Y_{k+1}, X)$$

に拡張することがわかる。

一方、Step 1 でみたように、$id: EY_k \longrightarrow EY_k$ は G－ホモ

トピー同値写像 $f: EY_{k+1} \longrightarrow F(Y_{k+1}, Y_k)$ に拡張する。$f_{k+1} = f' \cdot f$ とおくことにより帰納法は完結する。

ここで $F(Y, X) = \varinjlim_k F(Y_k, X)$ と定義すれば、これが求めるものであることは容易にみられる。

§3 主定理

X を有限型の G-CW複体、Y を有限G-CW複体とし、$r: Y \longrightarrow X$ を G-dominating map とする。したがって G-写像 $j: X \longrightarrow Y$ で rj が id_X と G-ホモトピックになるものが存在する。

さて X は(H)型の G-胞体をもつとする。NH を H の G における正規化群とし、WH で商群 NH/H を表わすことにする。X^H は WH-空間である。いま $X_1^H, X_2^H, \cdots X_i^H$ を X^H の WH-連結成分とする（Y に G-dominate されることからこれらは有限個である）。$X^{>H} = \bigcup_{K \supsetneq H} X^K$（K は G の閉部分群）、$X_k^{>H} = X_k^H \cap X^{>H}$ $(1 \leq k \leq i)$ とおくと、$(X_k^H, X_k^{>H})$ は WH-CW 対である。ここで $X_k^H - X_k^{>H}$ に含まれる WH-胞体はすべて自由な WH-作用をもち、これらは同じ次元の X の(H)型の G-胞体と一対一に対応していることに注意しておく。各 k $(1 \leq k \leq i)$ に対し、$j(X_k^H)$ は Y^H のある WH-連結成分に含まれる。これを Y_k^H とする。このとき

$$r|Y_k^H : (Y_k^H, Y_k^{>H}) \longrightarrow (X_k^H, X_k^{>H})$$

は、WH-dominating map である。

EX, $F(Y, X)$ 等の軌道空間を BX, $B(Y, X)$ 等と表わすことにする。このとき次の補題が成り立つ。

補題 3.1　WH-CW 対としての $(Y_k^H, Y_k^{>H})$ の次元が n であるならば、$(BX_k^H, BX_k^{>H})$ は n 次元の有限 CW 対に dominate される。

証明　下の図式からわかるように、相対 CW 複体 $(B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})$ は有限相対 CW 複体 $(B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H})$ に dominate される。

$$\begin{array}{ccc}
(EY_k^H, EY_k^{>H}) & \xrightarrow[\text{WH-dominating map}]{id \times r|Y_k^{>H}} & (EX_k^H, EX_k^{>H}) \\
\downarrow \overset{WH}{\simeq} & & \downarrow \overset{WH}{\simeq} \\
(F(Y_k^H, Y_k^{>H}), EY_k^{>H}) & \xrightarrow[\text{WH-dominating map}]{} & (F(X_k^H, X_k^{>H}), EX_k^{>H}) \\
\downarrow \text{射影} & & \downarrow \text{射影} \\
(B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H}) & \xrightarrow[\text{dominating map}]{} & (B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})
\end{array}$$

ところが§2で述べたことより、$(B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})$ と $(BX_k^H, BX_k^{>H})$ はホモトピー同値であり、また $(B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H})$ は n 次元の有限 CW 対とホモトピー同値であるから補題の主張が成り立つ。　　　　(証明終)

定義　本節の最初の仮定のもとに、Xの(H)型のWall型障害類$W_{(H)}(X)$を

$$W_{(H)}(X)=\sum_{k=1}^{i} W(BX_k^H, BX_k^{>H}) \in \sum_{k=1}^{i} \widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(BX_k^H))$$

と定義する。ここで$W(BX_k^H, BX_k^{>H})$は位相空間対$(BX_k^H, BX_k^{>H})$に対するWall型障害類を表わす。

定理3.2　$W_{(H)}(X)$は直和因子の置換を除いて、XのG-ホモトピー型のみによって定まる。

定理3.3　HをGの閉部分群とし、Yに含まれる(H)型のG-胞体の最高次元をnとする。このとき次の(i)および(ii)が成り立つ。

(i) $W_{(H)}(X)=0$であるならば、Xは有限型のG-CW複体Zで、次の(a), (b), (c)を満足するものとG-ホモトピー同値である。

(a) Zに含まれる(H)型のG-胞体の個数は有限。

(b) Zに含まれる(H)型のG-胞体の最高次元は$\max(3, n)$。

(c) JをHと共役でないGの閉部分群とするとき、Xに含まれる(J)型のm次元G-胞体の個数と、Zに含まれる(J)型のm次元G-胞体の個数は任意のmに対して等しい。

(ii) Xが有限型のG－CW複体Z'で、Z'に含まれる(H)型のG－胞体の個数が有限なものとG－ホモトピー同値であれば、$W_{(H)}(X)=0$である。

定理の(i)は$W(BX_\kappa^H, BX_\kappa^{>H})=0$より、$(BX_\kappa^H, BX_\kappa^{>H})$が次元が$\max(3, n)$の有限CW対とホモトピー同値になることから証明される。(ii)は仮定より$W(BX_\kappa^H, BX_\kappa^{>H})=0$となるからである。

最後に、G－CW複体の次元の有限性に関しては次の定理が得られる。

定理 3.4　G－CW複体Xが、有限個の軌道型をもつn次元G－CW複体にG－dominateされるならば、Xは次元が$\max(3, n)$のG－CW複体とG－ホモトピー同値である。

定理1.1より、Xの軌道型も有限個であるとしてよく、その各軌道型(H)に対し、$(BX^H, BX^{>H})$が$\max(3, n)$次元のCW対とホモトピー同値になることから、定理3.4が得られる。

参考文献

[1] Baglivo, J. A.: An equivariant Wall obstruction theory, Trans. Amer. Math. Soc., 256 (1979), pp. 305–324.

[2] Boardman, J. M., and R. M. Vogt: Homotopy invariant algebraic structure on topological spaces, Lecture Notes in Math., 347 (1973), Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

[3] Hauschild, H.: Äquivariante Whiteheadtorsion, Manuscripta Math, 26 (1978), pp. 63–82.

[4] Wall, C. T. C.: Finiteness conditions for CW complexes, Ann. of Math., 81 (1965), pp. 55–69.

[5] Illman, S.: Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci. Fenn., A. I. 588 (1974).