数理解析研究所講究録
第 437 巻 1981 年 51-67

ホモロジー球面への古典群の作用

国際基督教大学　　中西あい子

最近、M. Davis, W.C. Hsiang, J. Morgan 等によって、ホモトピー球面上の regular $U(n)$, $SP(n)$, $O(n)$-作用の Concordance の下での分類がなされた。[3], [5]　ここに、Concordance とは、次で定義されるG-多様体上の同値関係である。

ψ_i ; $G \times M_i \longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$ 可微分作用

ψ_1, ψ_2 が concordant

$\Longleftrightarrow$ $M \times I$ 上の可微分作用が存在して、その $M \times \{i\}$ への制限が ψ_i に同値。

そこで、我々は、対象とする多様体Mをホモロジー球面とし、Mへの古典群Gの可微分作用の、同変微分同型の下での分類を考えることにする。本稿では、特に、G-ホモロジー球面Mが、余次元2の principal orbit を持ち、更にM上の可微分G-作用ψが linear model をもつ場合のみを扱う。

上の、ψが linear model をもつとは次の意味である。

linear model

Mをn次元ホモロジー球面とし、ψをM上の可微分G－作用、φをn次元単位球面上のG－線型作用とする。φとψのorbit typesが等しく、また、対応するorbitのslice表現が等しいとき、φをψのlinear modelとよぶ。（acyclic多様体上の可微分作用と、ユークリッド空間上の線型作用に対しても、同様にlinear modelの概念を定義できる。）

また、表現に関するWeylの次元公式[6]を使うことによって、単位球面上への余次元2のprincipal orbitをもった古典群Gの線型作用は、§1のTableで、すべて与えられることがわかる。（但し、$G \neq SO(2), SO(4)$）

このとき、次の結果が得られた。

定理

Mをホモロジー球面、Gを$SO(n)$ $(n \neq 2, 4)$, $SU(n)$あるいは$SP(n)$とする。M上の可微分G－作用ψが、余次元2のprincipal orbitをもち、更に、linear modelをもつならば、ψは、そのlinear modelか、あるいはBrieskorn球面W_k^{4m+1}（k；奇数，$m \geq 2$）上の標準的な$SO(2m+1)$－作用に、同変微分同型である。

上の W_k^{4m+1} は $2\rho_{2m+1}$ （ρ_{2m+1} は $SO(2m+1)$ の標準的な表現）をmodelにもち、その作用は次で与えられる。

$$W_k^{4m+1} = \left\{ (z_0, z_1, \cdots, z_{2m+1}) \in \mathbb{C}^{2m+2} ; \begin{array}{l} z_0^k + z_1^2 + \cdots + z_{2m+1}^2 = 0 \\ |z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_{2m+1}|^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$SO(2m+1)$ は $z_1, \cdots, z_{2m+1}$ に $U(2m+1)$ の部分群として作用する。また、W_k^{4m+1} は k が奇数のとき、ホモロジー球面で、$k \neq k'$ ならば、W_k^{4m+1} と $W_{k'}^{4m+1}$ は同変微分同型にはならない。[1] 但し、$2\rho_3$ をmodelにもつ $SO(3)$-ホモロジー球面は、model $2\rho_3$ 自身に同変微分同型である。

上の定理に関連して、[4] に次のような興味ある結果が述べられている。

<Hsiangs, Davis>

Gをコンパクト単純リー群、Mをホモロジー球面か、あるいはacyclic多様体とする。このとき、M上のどんな可微分G-作用 φ も、それが自明でない（即ち $\{e\}$ でない）principal isotropy群をもてば、それは、いつでもlinear modelをもち、またそのmodelは φ に対して一意に定まる。

この結果を使うならば、$(SO(3), 2\rho_3)$, $(SU(2), 2Ad_{SU(2)})$, $(SU(2), [\mu_2]_R + 2\theta')$ を model にもつ場合を除いて、我々の定理から、ψ が linear model をもつ という条件を省くことができる。(上の3つの type は、ともに自明な principal isotropy 群をもつ。) しかし、残念ながら、上に述べられた<Hsiangs, Davis>の結果の完全な証明は、未だ発表されていない。

§2, 3 で orbit space $M/G = M^*$ に関するある情報を与え、§4, 5 で上の定理の証明の概略を与える。

§1. Linear model.

G を $SO(n)$ $(n \neq 2, 4)$, $SU(n)$ あるいは $Sp(n)$ とし、φ を単位球面上への余次元2の principal orbit をもった線型 G-作用とすると、φ は次の Table で与えられる。

Type	G	φ	principal isotropy 群
regular	$SO(n)$	$\rho_n + 2\theta'$	$SO(n-1)$
	$n \neq 2, 4$	$2\rho_n$	$SO(n-2)$
	$SU(n)$	$[\mu_n]_R + 2\theta'$	$SU(n-1)$
	$Sp(n)$	$[\nu_n]_R + 2\theta'$ $(n \geq 2)$	$Sp(n-1)$

adjoint	G	$Ad_G + (3-\mathrm{rank}\,G)\theta^1$, $\mathrm{rank}\,G=2,3$	maximal torus
	$Sp(n)$	$c\varphi = \Lambda^2\nu_n + (3-n)\theta^1$, $n=3,4$	$Sp(1)^n$
	$SO(3)$	$S^2\rho_3$	maximal Z_2-torus
near adjoint	$SU(5)$	$[\Lambda^2\mu_5]_R + \theta^1$	$SU(2)^2$
	$SU(7)$	$[\Lambda^2\mu_7]_R$	$SU(2)^3$
mixed	$SU(4)$	$[\mu_4]_R + \varphi_1 + \theta^1$, $(c\varphi_1 = \Lambda^2\mu_4)$	$SU(2)$

このTableで、(G, φ)のlifting $(\hat{G}, \hat{\varphi})$は除外したが、$\hat{G}$-多様体の分類がG-多様体の分類から自然に与えられることによる。また、ρ_n, μ_n, ν_nは各々、$SO(n), SU(n), Sp(n)$の標準的な表現で、θ^1は自明な1次元実表現、$c\varphi$はφの複素化、$[\psi]_R$は複素表現あるいはsymplectic表現を実表現とみなしたものである。

regular, adjoint, near adjoint, mixed typeの言葉は[4]の意味で使った。

上のTableにある、regular typeの表現をmodelにもつホモロジー球面への可微分G-作用の分類は、すでによく知られており、それはそのmodel自身か、あるいは、W_k^{4m+1}への$SO(2m+1)$-作用に同変微分同型である。[1], [2]

そこで、以後、残りのtype、即ち、adjoint, near adjoint, mixed typeをmodelにもつG-ホモロジー球面のみを

取り扱い．上の定理の略証を与える。

§2. "orbit space"

Mを §1 の Table の regular type 以外を model にもつ G－ホモロジー球面とする。そのとき，Mはいつでも isolated singular orbit をもち，また exceptional orbit をもたない。そして orbit space $M/G = M^*$ は2次元球体D^2となる。

G/H, G/L_i, G/K_i, を各々 principal orbit, non-isolated singular orbit, isolated singular orbit とすると，L_i, K_i は次の条件を満たすように選ぶことができる。（p は MからM^*への自然な射影）

<u>条件P</u>　先ず principal isotropy 群 Hを1つ定める。

そして i) $K_i, L_i > H$, $K_i > L_i, L_{i-1}$ $(K_1 > L_1, L_c)$

ii) $\partial p^{-1}(A_i)$ は $M_{\pi_i} \underset{id}{\cup} M_{\pi_{i-1}}$ に同変微分同型．

$(1 \leq i \leq c, \pi_0 = \pi_c)$

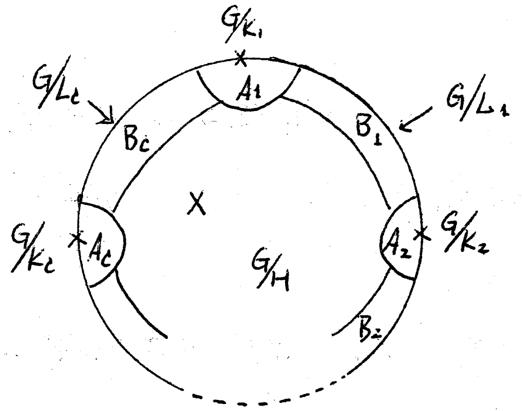
π_j ; $G/H \longrightarrow G/L_j$ 射影

M_{π_j} ; π_j の写像柱

iii) $p^{-1}(B_i)$ は $M_{\pi_i} \times I$ に同変微分同型．

（図I 参照）

図I



$M^* = D^2$

上の条件Pをみたす組 $(K_1, L_1, K_2, \cdots, K_c, L_c)$ を "<u>orbit space</u>" とよぶことにする。

注意2-1; ある $g \in G$ によって $(K_1', L_1', \cdots, K_c', L_c') = (gK_1g^{-1}, gL_1g^{-1}, \cdots, gL_cg^{-1})$ となるとき、$(K_1, L_1, \cdots, K_c, L_c)$ と $(K_1', L_1', \cdots, K_c', L_c')$ は同じG-多様体を与える。

注意2-2; 条件Pより、$p^{-1}(X \cup (\bigcup_{i=1}^{c} B_i))$ は $(G/H \times X) \cup_{id} (\bigcup_{i=1}^{c} M_{\pi_i} \times I)$ に同変微分同型である。故に、同じ "orbit space" をもつG-多様体の分類は、$\partial p^{-1}(A_i)$ $(i=1, \cdots, c)$ のはり合わせ写像の選び方にのみよる。

§3. "orbit space" と G-ホモロジー球面の関係.

$\partial p^{-1}(A_i)$ を条件P ii) によって $M_{\pi_i} \cup_{id} M_{\pi_{i-1}}$ とみなすことによって $\partial p^{-1}(A_i)$ のはり合わせ写像に関して次の補題を得る。($N(K)$ は K の正規化群をあらわす。)

補題3-1

$N(H)/H$ を有限とする。そのとき，$\partial p^{-1}(A_i)$ の同変微分同型写像の集合は $(N(H)\cap N(L_i)\cap N(L_{i-1}))/H$ と1対1に対応する。

$[a_i]\in (N(H)\cap N(L_i)\cap N(L_{i-1}))/H$ に対応する $\partial p^{-1}(A_i)$ の同変微分同型写像を $\widetilde{f}_{a_i}$ と記すとき，

補題3-2

$N(H)/H$ を有限とする。このとき，$N(H)\cap N(L_i)\cap N(L_{i-1})\subset N(K_i)$ ならば $\widetilde{f}_{a_i}$ は ∂S を $\partial S'$ に写す。ここに S, S' は $G_x=G_{a_i^{-1}x}=K_i$ となる x 及び $a_i^{-1}x$ での slice である。

上の $\widetilde{f}_{a_i}: \partial S \longrightarrow \partial S'$ は，次の2つの写像の積であらわされることは容易にわかる。

$$h: \partial S \longrightarrow \partial S \quad で \quad h(gx)=a_i g a_i^{-1}x \quad (g\in K_i)$$
$$L_{a_i}: \partial S \longrightarrow \partial S' \quad で \quad L_{a_i}(v)=a_i^{-1}v \quad (v\in \partial S)$$

そして L_{a_i} が S 上に拡張されることは明らか故，h が S 上への拡張をもつこと，即ち h が線型写像であることを見ることによって，$\widetilde{f}_{a_i}$ が S 上に，そしてそれ故 $p^{-1}(A_i)$ 上に拡張されることが証明される。[8]　このとき，この拡張を使って，次の補題を得る。

補題 3-3

$N(H)/H$ を有限とする。そのとき，同じ "orbit space" をもつ G-ホモロジー球面は、同変微分同型である。

$N(H)/H$ が有限でない場合には、実際にホモトピーを構成することで、次の補題が与られる。[8]

補題 3-4

$N(H)/H$ を有限でないとする。このとき，$\partial p^{-1}(A_i)$ の同変微分同型写像は $\partial p^{-1}(A_i)$ の恒等写像に同変イソトープである。

これより、

補題 3-5

$N(H)/H$ を有限でないとする。そのとき，同じ "orbit space" をもつ G-ホモロジー球面は同変微分同型である。

§4. 定理の証明

補題3-3，3-5より、G-ホモロジー球面 M がその linear model と同じ "orbit space" をもつことのみを証明すればよい。

<u>Case 1</u> ： M が $(SO(3), S^2P_3)$, $(SU(7), [\Lambda^2 U_7]_R)$ 以外の model をもつとき。

このとき，オイラー標数の公式，

$$\chi(M) = \chi(G/H) + \sum \chi(G/K_i) - \sum \chi(G/L_i) \qquad (4.1)$$

より，M が，その linear model と同じ "orbit space" をもつことが，容易に確かめられる。(実際には，各 type の orbits の数が model のそれと等しくなることのみ見ればよい。)

<u>Case 2</u> ：$(SO(3), S^2P_3)$ を model にもつとき。

K. Hudson [7] より，$H_1(M: Z_2) = 0$ となるとき，M の "orbit space" は $(K_1, L_1, K_2, L_2) = (SO(3), N_i, SO(3), N_j)$ となる。ここに N_i, N_j は $O(2)$ に共役な部分群で $N_i \neq N_j$ である。そして，この "orbit space" はまた，S^2P_3 のそれと等しい。

<u>Case 3</u> ：$(SU(7), [\Lambda^2 U_7]_R, S^{41})$ を model にもつとき。

このとき，各 i に対していつも $\chi(M) = \chi(G/H) = \chi(G/K_i) = \chi(G/L_i) = 0$ なので，公式 (4.1) は効力をもたない。そこで，具体的に，M のホモロジーを計算していく訳だが，Case 3 の証明は §5 で与えることとする。

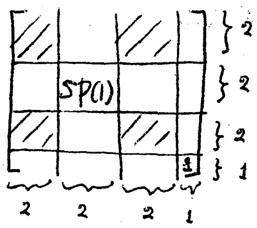
§5. 定理の証明 — Case 3

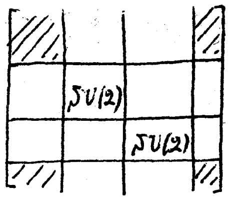
先ず，"orbit space" を次のように言いかえる。

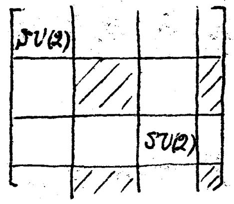
a) "orbit space" の言いかえ。

G/L を non-isolated singular orbit とし、principal isotropy 群 H を $SU(2)^3$ と定める。このとき、$H < L$ となる L は次の6つのうちのどれかである。各々を1～6の整数であらわす。

1 : $Sp(2)\times Sp(1)$　　2 ; $Sp(1)\times Sp(2)$　　4 ; $SU(2)^2\times SU(3)$

3 ; 

5 ; 

6 ; 

3 は $Sp(2)\times Sp(1)$ に、5, 6 は $SU(2)^2\times SU(3)$ に共役な群。

また、"orbit space" $(K_1, L_1, K_2, L_2, \cdots\cdots K_c, L_c)$ は $(L_1, L_2 \cdots\cdots L_c)$ によって一意に定まってしまうことは容易に確かめられる。故に "orbit space" をサイクル $\sigma=(i_1\, i_2 \cdots i_c)$, $i_j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ と同一視することができる。但し K_i-slice表現、及び§2の条件Pより、このサイクルは次の i) ii) を満足するものでなくてはならない。

i) $i_j \neq i_{j-1}$ $(i_1 \neq i_c)$

ii) $(i_{j-1}, i_j) \neq (4,5), (4,6), (5,6), (5,4), (6,4), (6,5)$

例； $[{}^{r}\mu_7]_R$ の "orbit space" $(K_1 L_1 K_2 L_2 K_3 L_3) = (SP(2) \times SU(3),$ $SP(2) \times SP(1),\ SP(3),\ SP(1) \times SP(2),\ SU(2) \times SU(5),\ SU(2)^2 \times SU(3))$ は サイクル(124) に対応する。

b) 基本サイクル

$\sigma_k = (i_1 i_2 \cdots i_k)$ で $(2 \leq k \leq 6)$，$\{i_j\}$ が全て異なるとき σ_k を基本 k-サイクルと呼ぶことにする。

c) サイクルの分解

サイクル $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_c)$ が，$1 \leq j \leq c$，$i_{c+m} = i_m$ で $i_j = i_{j+k}$ かつ $\{i_{j+1}, \cdots, i_{j+k}\}$ は全て異なる部分集合 $(i_j i_{j+1} \cdots i_{j+k})$ をもつとき．σ から $i_{j+1}, \cdots, i_{j+k}$ を取り除く。この操作で σ は基本 k-サイクルと長さ $c-k$ の新しいサイクル σ' に分解される。σ' に更に この操作が可能ならば行う。これをくり返すことで．σ はいくつかの基本サイクルに分解される。この操作をサイクル σ の分解と呼ぼう。

この分解を使って、一つの "orbit space" 即ち サイクル σ に対応する $SU(7)$-多様体が次の様に構成される。

d) サイクル σ に対応する $SU(7)$-多様体の構成

σ に c) の分解を行う。n 回の操作で σ が基本サイクル $(s_1 s_2 \cdots s_m)$ になったとする。

$$\sigma \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow (s_1 s_2 \cdots s_l\ i_{j+1} \cdots i_{j+k}\ s_{l+1} \cdots s_m) \quad s_l = i_{j+k}$$
$$\longrightarrow (s_1 s_2 \cdots s_m)$$

今、任意の基本サイクルに対応する $SU(7)$-多様体が構成されたとしよう。

$(s_1 s_2 \cdots s_m)$ に対応する $SU(7)$-多様体を X_n, n 回目の操作で取り除く基本サイクル $(i_{j+1} \cdots i_{j+k})$ に対応する $SU(7)$-多様体を Y とし、更に、$\mathcal{K}$ を $s_l = i_{j+k}$ に対応する non-isolated singular isotropy 群、V_{X_n}, V_Y を各々、$\mathcal{G}/_{\mathcal{K}}$ の X_n, Y での同変管状近傍とする。このとき、

$$(X_n - \mathrm{Int}\, V_{X_n}) \bigcup_{\partial V_{X_n} = \partial V_Y} (Y - \mathrm{Int}\, V_Y)$$

は $(s_1 s_2 \cdots s_l\ i_{j+1} \cdots i_{j+k}\ s_{l+1} \cdots s_m)$ に対応する $SU(7)$-多様体を与える。(ここで、同じ orbit type の slice 表現は等しいので、∂V_{X_n} と ∂V_Y は自然な同変微分同型写像ではり合わされている。) これをくり返せば、σ に対応する $SU(7)$-多様体 X は、いくつかの基本サイクルに対応する $SU(7)$-多様体の和で構成されることになる。即ち、

$$X = \bigcup_{S(\xi)} X_j \quad ; \quad \begin{array}{l} X_j = N_j - \cup \operatorname{Int} D(\xi). \\ N_j \text{ はある基本サイクルに対応する} \\ SU(7)\text{-多様体} \\ D(\xi) \text{ は } G/L \text{ の同変管状近傍} \\ S(\xi) \text{ は } D(\xi) \text{ の随伴球面束.} \end{array}$$

よって、Xの構成は、各N_jの構成に帰着する。

c) 基本サイクルに対応する$SU(7)$-多様体

基本k-サイクル$\sigma_k = (i_1 i_2 \cdots i_k)$と$\sigma'_k = (i'_1 i'_2 \cdots i'_k)$が次の(i)あるいは(ii)の関係にあるとき、$\sigma_k$と$\sigma'_k$は共役であると呼ぶことにする。

(i) $(i'_1 \cdots i'_k) = (i_m\, i_{m+1}\, i_{m+2} \cdots i_k\, i_1 \cdots i_{m-1})$ あるいは、

$(i_m\, i_{m-1} \cdots i_1\, i_k \cdots i_{m+1})$, $(1 \le m \le k)$

(ii) $L(i'_j) = g L(i_j) g^{-1}$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$ ${}^{\exists} g \in G = SU(7)$

ここに$L(i)$は、整数iに対応する non-isolated singular isotropy 群とする。

σ_kとσ'_kが共役のとき、各々に対応する$SU(7)$-多様体M, M'は$M' = M$かあるいは$M' = -M$である。故に、基本サイクルの共役類に対応する多様体の構成を考えれば十分である。実際、各サイクルに対応する多様体は次で与えられる。

I) 2－サイクルに対応する多様体

(12)； $M_0 = SU(7) \times_{Sp(3)} S^{14}_{\nearrow \varphi}$， $c\varphi = \Lambda^2 \nu_3$

(14)； $M_1 = SU(7) \times_{Sp(2)\times SU(3)} S^{11}_{\nearrow \varphi}$， $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$，

$c\varphi_1 = \Lambda^2 \nu_2$， $\varphi_2 = [\Lambda^2 \mu_3]_R$

(24)； $M_2 = SU(7)/SU(2) \times_{SU(5)} S^{20}_{\nearrow \varphi}$， $\varphi = [\Lambda^2 \mu_5]_R + \theta^1$

任意の2－サイクルは、上の3つのどれかに共役である。

II) 3－サイクルに対応する多様体

(124)； $M_3 = S^{41}$， $SU(7)$－作用は $[\Lambda^2 \mu_7]_R$

(123)； M_3'， $K_1, K_2, K_3 \in (Sp(3))$

(126)； M_3''， $K_1, K_3 \in (SU(2) \times SU(5))$，$K_2 \in (Sp(3))$

任意の3－サイクルは、上の3つのどれかに共役である。

III) 4，5，6－サイクルに対応する多様体

これらは、いくつかの M_3，M_3'，M_3'' から、ある isolated singular orbit の管状近傍を取り除いたものを、その境界ではり合わせることによって得られる。（詳細は略する。）ちなみに、4－サイクルは、(1234)，(1235)，(1425)，(1426) のどれかに、5－サイクルは、(12435)，(12436)，(12534)，(12536) のどれかに、そして6－サイクルは、(142536)，(152436)，(162435) のどれかに共役になっている。

定理の Case 3 の証明に戻る。

上の d) で構成した $X = \bigcup_{S(3)} X_j$ に対して、Mayer-Vietoris 完全系列等を使うことで、X がホモロジー球面を与え、かつ $[\Lambda^2 U_7]_R$ をその linear model にもつものは、その "orbit space" が (124)，即ち、$X = M_3$ の場合に限ることが簡単な計算から証明される。これは、$[\Lambda^2 U_7]_R$ を model にもつホモロジー球面は、linear model 自身に同変微分同型でなくてはならぬことを示しているので、Case 3 においても定理が証明された。

以上で、我々の目的とした定理の証明がなされた訳だが、Case 3 に関しては、簡単な別証がある。[8] を参照されたい。

References

1. G. E. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, 1972
2. M. Davis, Multiaxial Actions on Manifolds, Lecture Notes in Math., vol. 643, Springer-Verlag, 1978
3. M. Davis, and W. C. Hsiang, Concordance Classes of Regular U(n) and SP(n) Actions on Homotopy Spheres, Ann. of Math., 105, 1977
4. M. Davis, W. C. Hsiang and W. Y. Hsiang, Differential

Actions of Compact Simple Lie Groups on Homotopy Spheres and Euclidean Spaces, Algebraic and Geometric Topology, Proceedings of Symposia in Pure Math., vol XXXII, part I, A.M.S., 1978.

5. M. Davis, W. C. Hsiang and J. Morgan, Concordance Classes of Regular O(n) Actions on Homotopy Spheres, Acta. Math., 144, 1980

6. E. B. Dynkin, The Maximal Subgroups of the Classical Groups, A.M.S., Translations, 6, 1957

7. K. Hudson, Classification of SO(3)-Actions on Five Manifolds with Singular Orbits, Michigan Math. J., 26, 1979

8. A. Nakanishi, SO(n), SU(n), Sp(n) - Homology Sphere with Codimension Two Principal Orbit, Preprint, 1981