数理解析研究所講究録
第437巻 1981年 68-75

QUATERNION PROJECTIVE SPACE への C_n 型のコンパクトリイ群および非コンパクトリイ群の作用について

山形大学 理　内田伏一

§1. C_n 型のコンパクトリイ群の作用について.

次の2つの補題を準備する。証明は省略するので, 文献[1]の対応する補題の証明を参照してほしい。

Lemma 1. $n \geqq 7$, G: connected closed proper subgr. of $Sp(n)$, $\dim Sp(n)/G \leqq 8n-2$

$\Rightarrow$ $G \sim Sp(n-i) \times K$, K: subgr. of $Sp(i)$, $i = 1, 2, 3$.

(注) $Sp(n) = \{ A \in M_n(H) : A^*A = I_n \}$.

Lemma 2. $r \geqq 5$, $k < 8r$; $Sp(r)$ の k-dim. non-trivial real representation は $(\nu_r)_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}^{k-4r}$ と同値である。ここに $(\nu_r)_{\mathbb{R}} : Sp(r) \hookrightarrow O(4r)$ は standard な inclusion である。

以下, $n \geqq 7$, M: connected closed smooth manifold, $\dim M \leqq 8n-2$, 且つ M 上に $Sp(n)$ が smooth かつ non-trivial に働いているものとする。

$$F_{(i)} = \{x \in M : Sp(n-i) \subset Sp(n)_x \subset Sp(n-i) \times Sp(i)\},$$

$$M_{(i)} = Sp(n) \cdot F_{(i)}$$

と置く。 $M_{(0)} = F_{(0)} = F(Sp(n), M)$ であり, さらに

$$M_{(i)} \cong Sp(n)/Sp(n-i) \underset{Sp(i)}{\times} F_{(i)} \quad (\text{equiv. diffeo.})$$

<u>Proposition 3.</u> 上記の M について

(i) $M = M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(2)} \cup M_{(3)}$,

(ii) $F(Sp(n-k), M_{(i)}) = \phi$ for $k < i \leqq n-i$,

(iii) $M_{(k)} \neq \phi \Rightarrow M_{(i)} = \phi$ for $i \geqq k+2$.

証明. (i) は Lemma 1 より分かる. (ii) について, $F(Sp(n-k), M_{(i)}) \neq \phi$ とすれば, $x \in F_{(i)}$, $g \in Sp(n)$ が存在して $gx \in F(Sp(n-k), M_{(i)})$ となる。即ち

$$Sp(n-k) \subset Sp(n)_{gx} = g\, Sp(n)_x\, g^{-1} \subset g\,(Sp(n-i) \times Sp(i))\, g^{-1}.$$

図式

$$\begin{array}{ccccc} Sp(n-k) & \xrightarrow{\text{injection}} & & Sp(n-i) \times Sp(i) & \\ & & \swarrow^{\text{proj.}} & & \searrow^{\text{proj.}} \\ & & Sp(n-i) & & Sp(i) \end{array}$$

を考え，$Sp(n-k)$ が simple Lie gr. であることより，$n-k \leq \max(n-i, i)$ となる。 $\therefore\ k \geq \max(i, n-i)$.

(iii) について，$x \in F(k)$ における slice 表現を σ_x とする．Lemma 2 が使用できて，

$$\sigma_x | Sp(n-k) \cong (V_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial} \quad \text{or} \quad \text{trivial}$$

となる．いずれにせよ，up to conjugation in $Sp(n)$ で principal isotropy gr. が $Sp(n-k-1)$ を含むことになる。

$$\therefore\ M(i) \neq \phi \Rightarrow F(Sp(n-k-1), M(i)) \neq \phi .$$

しかるに，(ii) より $i > k+1 \Rightarrow F(Sp(n-k-1), M(i)) = \phi$ であるから，$M(i) = \phi$ for $i > k+1$ となる。

Proposition 4. $M = M(0) \cup M(1)$ のとき，compact connected $Sp(1)$-manifold X が存在して，∂X 上の $Sp(1)$-action は free で，$M \cong \partial(D^{4n} \times X)/Sp(1)$ と表わされる．M: orientable $\Leftrightarrow$ X: orientable.

証明は文献 [2] を参照してほしい。

Proposition 5. $M = M(k) \cup M(k+1)$，$M(k) \neq \phi$，$M(k+1) \neq \phi$ のとき，$F(k)$ の各連結成分の余次元 $= 4(k+1)(n-k)$.
$(k = 0, 1, 2)$

証明. $x \in F(k)$ における slice 表現 σ_x について, Lemma 2 および $M(k+1) \neq \phi$ より,

$$\sigma_x \,|\, Sp(n-k) \cong (\nu_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial}.$$

一方, orbit $Sp(n)\cdot x$ における isotropy 表現 ρ_x について, $\rho_x \,|\, Sp(n-k) \cong k\cdot(\nu_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial}$ となる.

$$\therefore \quad (\sigma_x \oplus \rho_x) \,|\, Sp(n-k) \cong (k+1)(\nu_{n-k})_{\mathbb{R}} \oplus \text{trivial}.$$

$$\therefore \quad \text{codim. of } F(k) \text{ at } x = 4(k+1)(n-k).$$

<u>Cor.</u> $M = M(2) \cup M(3) \Rightarrow M(2) = \phi$ or $M(3) = \phi$.

(注) $\dim Sp(n)/Sp(n-k)\times Sp(k) = 4k(n-k)$,

$\dim Sp(n) = n(2n+1)$, $\quad \chi\left(Sp(n)/Sp(n-k)\times Sp(k)\right) \overset{\text{オイラー標数}}{=} \binom{n}{k}$.

<u>Theorem A.</u> $7 \leq n \leq m \leq 2n-2$, $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ or $\mathbb{Z}_p$

M: closed orientable manifold with non-trivial smooth $Sp(n)$-action, $M \underset{K}{\sim} P_m(\mathbb{H})$

$\Rightarrow M \cong \partial(D^{4n}\times X)/Sp(1)$, X: compact connected orientable $Sp(1)$-manifold, $Sp(1)$-action on ∂X is free, X: acyclic$/K$, $\pi_1(M) \cong \pi_1(X)$.

さらに, $K = \mathbb{Z}$ のとき, X 上の $Sp(1)$-action は唯一つ

の不動点をもち，その点以外では $Sp(1)$ は free に働く。

証明. この定理は [2] の定理を改良したものである。
(イ) $M = M_{(i)}$ $(i=1,2,3)$ とすれば，$F_{(i)} \to M \to Sp(n)/Sp(n-i)\times Sp(i)$ なる fibration を使って

$$m+1 = \chi(M) = \chi(F_{(i)})\cdot\chi\left(Sp(n)/Sp(n-i)\times Sp(i)\right) \equiv 0 \mod \binom{n}{i}$$

となるが，$n < m+1 \leq 2n-1$ より矛盾を生ずる。
(ロ) $M = M_{(1)} \cup M_{(2)}$ とすれば，Proposition 5 および slice 表現の計算によって，M は余次元 1 の principal orbit をもつことになる. オイラー標数の計算によって矛盾を生ずる.
(ハ) 結局，$M = M_{(0)} \cup M_{(1)}$ となり，Proposition 4 により，$M \cong \partial(D^{4n}\times X)/Sp(1)$ と表わすことが出来る。あとは，文献 [2] の証明と同様にして，Theorem A の主張の大半を得る。
(ニ) 最後に，$K = \mathbb{Z}$ のとき X 上の $Sp(1)$-action が唯一つの不動点をもち，それ以外では free に働くことを示そう。$Sp(1)$-manifold X は acyclic/$\mathbb{Z}$ であり，∂X 上の $Sp(1)$-action は free である。$Sp(1)$ の maximal torus $U(1)$ について，Smith の定理より，

$X^{U(1)} = \{x\}$: 1点集合 であることが分かる。

このとき，$Sp(1)_x = U(1), NU(1)$ or $Sp(1)$ である。

$(Sp(1)/U(1))^{U(1)} = NU(1)/U(1) = 2$-points 故 $Sp(1)_x \neq U(1)$.

次に $\mathbb{Z}_p$ (p: 素) を $U(1)$ の subgr. とみると，$X^{\mathbb{Z}_p}$ は closed manifold，orientable/$\mathbb{Z}_p$ 且つ acyclic/$\mathbb{Z}_p$ である。

$$\therefore \{x\} = X^{U(1)} \subset X^{\mathbb{Z}_p} = 1\text{-point} \quad \therefore X^{\mathbb{Z}_p} = \{x\}.$$

とくに，$X - Sp(1)\cdot x$ の各点の isotropy 群が単位元のみから成ることが分かる。さらに，$Sp(1)$ の center $G = \{\pm 1\}$ について，

$$(Sp(1)/NU(1))^G = Sp(1)/NU(1) = P_2(\mathbb{R}) : \text{not acyclic}/\mathbb{Z}$$

一方，$X^G = \{x\}$ であるから $Sp(1)_x \neq NU(1)$ となる.

結局，$Sp(1)_x = Sp(1)$ となる.

§2. C_n 型の非コンパクトリイ群の作用について.

まず，若干の記号と定義を与えよう.

$Sp(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{C}) : {}^tA J_n = -J_n A\}$,

$Sp(n) \cong Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$, $J_n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$.

この節では，この右辺を改めて $Sp(n)$ と置く.

$L(n)$: standard $Sp(n,\mathbb{C})$-action on $\mathbb{C}^{2n}$ における $e_1 = {}^t(1,0,\cdots,0)$ における isotropy 群.

$N(n)$: standard $Sp(n,\mathbb{C})$-action on $P_{2n-1}(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^{2n})$ における $[e_1]$ における isotropy 群.

具体的には，

$$L(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & * \cdots * & * & * \cdots * \\ \hline 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \\ \hline 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \end{array} \right) \right\}, \quad N(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} * & * \cdots * & * & * \cdots * \\ \hline 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \\ \hline 0 & 0 \cdots 0 & * & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & & * & \\ \vdots & * & \vdots & * \\ 0 & & * & \end{array} \right) \right\}.$$

Lemma. G : connected closed proper subgr. of $Sp(n,\mathbb{C})$, (i) $Sp(n-1) \subset G$, (ii) $Sp(n,\mathbb{C})/G$ 上の restricted $Sp(n)$-action の各点の isotropy 群が $Sp(n-1)$ と共役な subgr. を含む. $\Rightarrow$ $\exists h \in Sp(n,\mathbb{C})$ s.t.

$$L(n) \subset hGh^{-1} \subset N(n).$$

証明は省略する。リイ環の計算によって証明するのであるが，文献[1]を参照してほしい。

Theorem B. $7 \leq n \leq m \leq 2n-2$, $M \underset{\mathbb{Q}}{\sim} P_m(\mathbb{H})$.

$\Rightarrow$ M は non-trivial smooth $Sp(n,\mathbb{C})$-action をもたぬ.

証明. M が non-trivial smooth $Sp(n,\mathbb{C})$-action をもったとする。restricted $Sp(n)$-action も non-trivial であり, Theorem A によって, $M \cong \partial(\mathbb{D}^{4n}\times X)/Sp(1)$ と表わされる。$X^{U(1)}=\{x\}$ とする。$e_1\times x$ の表わす M の点の isotropy 群は $Sp(n-1)\times Sp(1)_x$ となり, $Sp(1)_x = NU(1)$ or $Sp(1)$ である。他方,

$$g N(n) g^{-1} \cap Sp(n) \sim U(1)\times Sp(n-1) \quad (\text{in } Sp(n))$$

が任意の $g\in Sp(n,\mathbb{C})$ に対して成り立つので, 先の Lemma と合せて矛盾を生ずる。