数理解析研究所講究録
第437巻 1981年 83-87

コンパクトリー群の実射影空間の直積への自由作用について.

岩手大 人文社会科学部 石川洋一郎

§1. 序

Gをコンパクトリー群とするとき, Robert Oliver [1]は, 次の結果を示した. 即ち, Gが同次元のsphereの直積に自由に作用するための条件は, Gが$SO(3)$を含まないことである。これに対して, $X = RP^{n_1} \times \cdots \times RP^{n_k}$ を実射影空間の直積とするとき, X上のGの自由作用について, 次の様な結果が得られました。

定理A 単純リー群GがX上に自由に作用する条件は,

(1) $G = SO(3)$,

(2) $\exists n_i = 4m+3$, (mは非負整数である)

が成立することである.

定理B コンパクト連結リー群GがX上に自由に作用する条件は,

(1) $G = T \times SO(3) \times \cdots \times SO(3)$,

(2) $\mathrm{rk}\, G \leqq k$

（Tはトーラス群）が成立することである。

<u>定理C</u> コンパクトリー群GがX上に自由に作用する条件は

(1) $G_0 = T \times SO(3) \times \cdots \times SO(3)$

(2) $\mathrm{rk}\, G \leqq k$

（G_0はGの単位成分）が成立することである。

§2. 準備.

定理を証明するために，次の二つの補題を必要とする。
XをG-空間とするとき，ev^x；$G \longrightarrow X$ を $ev^x(g) = g \cdot x$ で定義される写像とする。

<u>補題1.</u> コンパクト連結リー群GがX上に自由に作用するとき $(ev^x)_*$；$H_1(G : Z_2) \longrightarrow H_1(X : Z_2)$ は単射である.

(証明). TをGの極大トーラスとするとき，包含写像 $i : T \subset G$ から誘導された写像 i_*；$H_1(T ; Z_2) \longrightarrow H_1(G : Z_2)$ は全射なので，GがトーラスTのとき証明すればよい。
$T = S^1 \times \cdots \times S^1$ (l-times) として，$(a_1 \cdots a_l) \in \ker (ev^x)_*$ で $(a_1 \cdots a_l) \neq 0$ とする

f_i ; $S^1 \to S^1$ 及び $f : S^1 \to T$ を 次の如く定義する.

$$f_i(t) = \begin{cases} t, & (a_i \neq 0) \\ e, & (a_i = 0) \end{cases}$$

$$f(t) = (f_1(t), \cdots, f_l(t))$$

このとき, f は単射で $(ev^{x_0} \circ f)_*$; $H_1(S^1 ; Z_2) \to H_1(X ; Z_2)$ は自明である。今 f により誘導される X 上の自由 S^1-作用を考えて, fiber 空間, $S^1 \to X \xrightarrow{p} X/S^1$ のホモトピー完全列から, 同型 p_* ; $H_1(X ; Z_2) \approx H_1(X/S^1 ; Z_2)$ が導かれる. 故に, p^* ; $H^*(X/S^1 ; Z_2) \longrightarrow H^*(X : Z_2)$ は全射となり, 矛盾する。

<u>補題２.</u> G を単純リー群で, $\mathrm{rk}\, G \geq 2$ とする. このとき, 包含写像 $i : T \subset G$ (但し T は G の極大トーラス) から誘導された写像

i_* : $H_1(T ; Z_2) \longrightarrow H_2(G ; Z_2)$ は単射でない.

§3. 定理の証明.

G をコンパクトリー群とし, $G' \subseteqq G$ を index $l < +\infty$ の部分群とする。X を G'-空間とするとき $\mathrm{Map}_{G'}(G\ X) \approx X^l$ で G は X^l に自然な作用をもつ, 又, G' が X に自由に作用すれば, G は X^l に自由に作用することがわかる。このことは定理 C を証明するのに使用される。

定理Aの証明. 補題1,2により $\mathrm{rk}\, G \leqq 1$ となり, $G \neq SU(2)$ となるので, $G = SO(3)$ となる。

補題1から $(e\cup^X)^*$; $H^1(X; Z_2) \to H^1(SO(3), Z_2)$ は全射なので, $H^*(X; Z_2) \to H^*(SO(3); Z_2)$ も全射となる。故に, fiber空間

$$SO(3) \longrightarrow X \longrightarrow X/SO(3)$$

に対して, Z_2-係数のspectral列は自明となり poincaré 多項式について,

$$(1+t+t^2+t^3)g(t) = (1+t+\cdots+t^{n_1})\times\cdots\times(1+t+\cdots t^{n_k})$$

が成立する。故にこの式の右辺は $1+t^4$ で割り切れる。このことから $n_i = 4m+3$ となる。

定理Bの証明. Gをコンパクト連結リー群とするとき

$$G \approx T\times H_1\times\cdots\times H_t/K$$

但し, H_iは単連結単純リー群で, Tはトーラス群, そしてKは $T\times H_1\times\cdots\times H_t$ の有限位数の中心である。このとき次の図式は可換となる,

$$\begin{tikzcd} H_i \arrow[r] \arrow[dr, "q"'] & H_iK \arrow[d, "p"] \\ & H_iK/K \end{tikzcd}$$

このとき, $\ker q = H_i \cap K$ なので, $H_i/H_i\cap K \approx H_iK/K$ となる

従って, $H_i/H_i\cap K$ は単純リー群なので, 補題1,2から, $H_i/H_i\cap K \approx SO(3)$ となる。故に $H_i \approx SU(2)$ で $H_i\cap K \approx Z_2$ となるので $G = T\times SO(3)\times\cdots\times SO(3)$ となる。

又補題1から $\mathrm{rk}\, G \leqq k$ が成立する。

<u>定理Cの証明</u>. 十分条件を証明すればよい。G_0 を G の単位成分として, $l = |G/G_0|$ とおく。G_0 は $X = RP^{n_1} \times \cdots \times RP^{n_k}$ に自由に作用するとする。このとき前に注意したことにより, G は, X^l に自由に作用することがわかる。$1 \neq g \in G/G_0$ に対して g により生成された cyclic group は $SO(3) \approx RP^3$ に自由に作用するので G/G_0 に誘導される空間を M_g とおくとき, G は

$$\Big(\prod_{1 \neq g \in G/G_0} M_g \Big) \times \Big(\prod^{l} X \Big)$$

に自由に作用することがわかる。これで証明が終る。

文献

[1] Robert Oliver. Free compact group actions on products of spheres. Lecture Notes in Math. No. 763. Springer 1978.

[2]. G. E. Bredon. Introduction to compact transformation groups. Academic Press. 1972.