数理解析研究所講究録
第440巻 1981年 11-16

代数的数体のイデール群の構造について

名大 教養部　三宅 克哉

詳細は近々東北数学雑誌に掲載されるはこびになっている論文[3]にゆずることにし，ここでは主たる結果の二，三を報告することにする。

1. イデアルの capitulation について

一般に，有限次代数的数体 F に対して，その絶対イデアル類群を C_F，絶対類体を $\widetilde{F}$ としよう。

不分岐アーベル拡大 K/F に対し $\iota_{K/F} : C_F \to C_K$ を F のイデアルの K へのもち上げから得られる準同型写像とすれば，$P_F(K) = \mathrm{Ker}(\iota_{K/F})$ は K において単項化する F のイデアルのなす類からなる。この $P_F(K)$ が C_F の部分群としてどう特徴づけられるかが問題なのであるが，たとえば，

まず定量的に

問題 拡大次数 $[K:F]$ は位数 $|P_F(K)|$ を割り切るか?

と問うてみると考え易いかもしれない。特に K/F が巡回拡大であればこれは肯定的である(ヒルベルトの定理94)。

これらの問題に対する決定的な解答はまだ得られていないが,部分的とはいえ,$\mathrm{Hom}(C_F, N_{K/F}(C_K))$ のある部分群によって $P_F(K)$ をある程度分析することができたので報告する。ここで $N_{K/F}: C_K \to C_F$ は K/F のノルム写像であり,$H_F(K) = N_{K/F}(C_K)$ は類体論で K に対応する C_F の部分群である。

まず,自然な準同型写像

$$\pi_{K/F}: H^1(\mathrm{Gal}(\hat{K}/F), C_K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_F, H_F(K))$$

が存在することに注意しよう。実際,$N_{K/F}: C_K \to C_F$ によってコホモロジー群の間の準同型写像

$$H^1(\mathrm{Gal}(\hat{K}/F), C_K) \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\hat{K}/F), H_F(K))$$

が得られる。後者において,$\mathrm{Gal}(\hat{K}/F)$ は $H_F(K)$ に自明に作用するから,これは単に $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\hat{K}/F), H_F(K))$ にほかならない。しかも $H_F(K)$ はアーベル群であるから,この $\mathrm{Gal}(\hat{K}/F)$ を交換子群による剰余群でおきかえてよく,これは $\mathrm{Gal}(\hat{F}/F)$ と同一視でき,よって C_F と同型である。以上のものを組みあわせて $\pi_{K/F}$ を得る。

この $\pi_{K/F}$ の像を $\widetilde{X}_{K/F}$ と表わす。すなわち

$$\widetilde{X}_{K/F} = \pi_{K/F}(H^1(Gal(\widetilde{K}/F), C_K)).$$

さらに $f \in \widetilde{X}_{K/F}$ に対し

$$d(f) = |\mathrm{Coker}(f)| = [H_F(K) : \mathrm{Im}(f)]$$

とおく。

定理 1. 各 $f \in \widetilde{X}_{K/F}$ に対して

$$\{ x^{d(f)} \mid x \in \mathrm{Ker}(f) \} \subset P_F(K).$$

特に $d(f) = 1$ となる f が存在すれば

$$[K : F] \mid |P_F(K)|.$$

自然な写像 $\iota_{K/F} : C_F \to C_K$ と $N_{K/F} : C_K \to C_F$ とを合成して得られる $\overline{\iota} = N_{K/F} \circ \iota_{K/F}$ は $\widetilde{X}_{K/F}$ に含まれている。この $\overline{\iota}$ に定理 1 をあてはめれば、容易に次の結果が得られる:

$$n = [K : F],$$
$$C_F(n) = \{ x \in C_F \mid x^n = 1 \},$$
$$m = |C_F(n)| / n$$

とすれば $d(\overline{\iota}) = m$ であり、

定理 2. $C_F(n)^m \subset P_F(K) \subset C_F(n)$.

註．特に $K=\widetilde{F}$ のとき $C_F(n)=C_F$，$m=1$ であり，定理２より $P_F(\widehat{F})=C_F$ を得る。これは単項化定理にほかならない。

2．イデール群の構造について

一般に有限次代数的数体 F のイデール群を $F_{\mathbb{A}}^{\times}$ とし，そのアルキメデス的な部分を $F_{\infty}^{\times}$，その１の属する連結成分を $F_{\infty+}^{\times}$ とする。

有限次ガロワ拡大 L/F が与えられたとし，K を L における F の最大アーベル拡大とする。イデール群 $L_{\mathbb{A}}^{\times}$ の開部分群 V で $L^{\times}\cdot L_{\infty+}^{\times}$ を含み

$$(*)\qquad V^{\sigma}=V \quad (\forall\sigma\in Gal(L/F))$$

を満足しているものをとり，

$$d(V)=[L_{\mathbb{A}}^{\times}:F_{\mathbb{A}}^{\times}\cdot V\cdot N_{L/F}^{-1}(F^{\times})]$$

としよう。また $K_{\mathbb{A}}^{\times}$ の開部分群 $U=K^{\times}\cdot N_{L/K}(V)$ に対して

$$d(U)=[K_{\mathbb{A}}^{\times}:F_{\mathbb{A}}^{\times}\cdot U\cdot N_{K/F}^{-1}(F^{\times})]$$

とする。ここで $K_{\mathbb{A}}^{\times}$，$F_{\mathbb{A}}^{\times}$ は自然に $L_{\mathbb{A}}^{\times}$ にうめ込まれたものと見る。このとき $U\subset V$ であり $N_{K/F}^{-1}(F^{\times})\subset$

$N^{-1}_{L/F}(F^\times)$ となっている。

定理 3. $\{a^{d(V)} \mid a \in F^\times_{\mathbb{A}} \cap V \cdot N^{-1}_{L/F}(F^\times)\} \subset F^\times_{\mathbb{A}} \cap V$。

さらにくわしく: $d = [L:K]$ とし $e(V)$ をアーベル群 $F^\times_{\mathbb{A}} \cdot U \cdot N^{-1}_{K/F}(F^\times) / F^{\times d}_{\mathbb{A}} \cdot U \cdot N^{-1}_{K/F}(F^\times)$ の exponent とすれば $d(U) \cdot e(V) \mid d(V)$ であり,

$$\{a^{d(U)\cdot e(V)} \mid a \in F^\times_{\mathbb{A}} \cap V \cdot N^{-1}_{L/F}(F^\times)\} \subset F^\times_{\mathbb{A}} \cap U。$$

また $[L:K]/e(V)$ は位数

$$[F^{\times e(V)}_{\mathbb{A}} : F^{\times e(V)}_{\mathbb{A}} \cap U \cdot N^{-1}_{K/F}(F^\times)]$$

と互いに素である。

特に $d(V) = 1$ の場合に注目すれば, 次の定理を得る。

定理 4. V がさらに

$$(**) \quad L^\times_{\mathbb{A}} = F^\times_{\mathbb{A}} \cdot V \cdot N^{-1}_{L/F}(F^\times)$$

を満たすとき $U = K^\times \cdot N_{L/K}(V)$ は

$$K^\times_{\mathbb{A}} = F^\times_{\mathbb{A}} \cdot U \cdot N^{-1}_{K/F}(F^\times)$$

を満たし

$$F^\times_{\mathbb{A}} \cap V \cdot N^{-1}_{L/F}(F^\times) = F^\times_{\mathbb{A}} \cap U \cdot N^{-1}_{K/F}(F^\times) = F^\times_{\mathbb{A}} \cap V = F^\times_{\mathbb{A}} \cap U。$$

しかも $[L:K]$ は $[F^\times_{\mathbb{A}} : F^\times_{\mathbb{A}} \cap V]$ と互いに素であり,

$$[K:F] \mid [F^\times_{\mathbb{A}} \cap V : F^\times \cdot N_{L/F}(V)].$$

系. $L_{\mathbb{A}}^{\times} = V \cdot N_{L/F}^{-1}(F^{\times}) \Rightarrow F_{\mathbb{A}}^{\times} \subset V$.

この系は[1]の主定理であって，[2]における general principal ideal theorem の拡充に際しての key lemma であった。

注. アーベル拡大 K/F に対しては，定理3（L=Kの場合）を，またさらにK/Fが不分岐のときには§1の定理1（のイデールのことばで表わされたもの）を，それぞれ特殊な場合として含むようなイデール群の構造定理が得られている（[3]）。

参考文献

[1] K. Miyake, On the structure of the idele group of an algebraic number field, Nagoya Math. J. 80 (1980) 117–127.

[2] ———, On the general principal ideal theorem, Proc. Japan Acad. 56, Ser A (1980) 171–174.

[3] ———, On the structure of the idele groups of algebraic number fields. II, Tôhoku Math. J. 34, no.1 (1982).