数理解析研究所講究録
第440巻 1981年 71-75

p-進多重Γ関数とp-進L関数の値について

東北大 教養部　　今井秀雄

多重Γ-関数のp-進類似の構成と、それを用いてのp-進L関数の整数点での値の記述について、J. Diamond [4] の結果の拡張が得られたのでそれを報告する。

以下pを素数とし、有理数体の代数閉包$\overline{\mathbb{Q}}$の複素数体$\mathbb{C}$への埋め込み、及び$\overline{\mathbb{Q}}$のp-進数体の代数閉包の完備化Ω_pへの埋め込みを固定し、代数的数はこれらによって複素数及びp-進数と考えることにする。 $\mathcal{O}_p$をΩ_pの整数環、$\mathfrak{m}$を$\mathcal{O}_p$の極大イデアルとする。 r, nを自然数とし、 $L_i(y) = L_i(y_1, \cdots, y_r) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} y_j$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をr変数の1次形式で、係数a_{ij}は $a_{ij} \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ (i.e., 代数的数で複素数と考えた時実数になる), $a_{ij} > 0$, $a_{ij} \in \mathfrak{m}$ をみたすものとする。 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を $x_i \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$, $x_i > 0$, $x_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ をみたす元とし, c_j $(j = 1, 2, \cdots, r)$ を自然数でpと互いに素なものとし, $\xi_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ を1のc_j-乗根で1でないものとする。

次の n 変数の複素関数を考える.

$$Z(s)=Z(s_1,\cdots,s_n)=\sum_{m_1,\cdots m_r=0}^{\infty}\xi_1^{m_1}\cdots\xi_r^{m_r}(x_1+L_1(m))^{-s_1}\cdots(x_n+L_n(m))^{-s_n}$$

ここで $m=(m_1,\cdots,m_r)$ とおいた。

この級数は $s_1,\cdots,s_n$ の実数部分が十分大なる所で絶対収束し、そこで解析関数を表わす。

$L_j^*(t)=L_j^*(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}t_i \quad (j=1,2,\cdots,r)$ を前の係数 a_{ij} から作られる1次形式とし、$G(t)$ を次の有理型関数とする。

$$G(t)=G(t_1,\cdots,t_n)=\prod_{j=1}^{r}(1-\xi_j\exp(L_j^*(t)))^{-1}.$$

定理1. (i) $Z(s_1,\cdots,s_n)$ は全空間 $\mathbb{C}^n$ に(各変数について)有理型に解析接続され, $Z(-a_1,\cdots,-a_n)=$ ($(0,\cdots,0)$ での $G(t)$ の Laurent 展開の $\frac{t_1^{a_1}}{a_1!}\cdots\frac{t_n^{a_n}}{a_n!}$ の項の係数) が $a_i\geq 0,\ a_i\in\mathbb{Z}\ (i=1,\cdots,n)$ に対し成立する。

(ii) n 変数の p-進解析関数 $Z_p(s_1,\cdots,s_n)$ で, $s_i\in\mathbb{Z}_p\ (i=1,2,\cdots,n)$ で定義され, $Z_p(-a_1,\cdots,-a_n)=Z(-a_1,\cdots-a_n)$ $(a_i\geq 0,\ a_i\in\mathbb{Z})$ なるものが存在する。

この定理1は[5]で示された。なお,[5]では $Z(s_1,\cdots,s_n)$ の定義が $\sum_{m_1,\cdots,m_r}\xi_1^{m_1}\cdots\xi_r^{m_r}L_1(x+m)^{-s_1}\cdots L_n(x+m)^{-s_n}$ (但し, $x=(x_1,\cdots,x_r)$ で, x_j は $x_j\in\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R},\ x_j>0,\ L_i(x)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$ をみたす)

となっているが、ここで述べたものにしても証明は同様にできることに注意しておく。

次に $Z_p(s_1,\cdots,s_n)$ の正整数での値を考える。 以下、$\log$ で p-進対数関数（Iwasawa [7] で定義されるもの）を表わす。

$\prod_{i=1}^{n}\log(x_i+L_i(y))=\prod_{i=1}^{n}\left(\log x_i+\log\left(1+\frac{L_i(y)}{x_i}\right)\right)$ を $y_1,\cdots,y_r$ の整級数に展開し、$y_1,\cdots,y_r$ について形式的に積分（但し定数項は 0 とする）したものを $\lambda(L,x,y)$ とおく。 即ち、

$$\lambda(L,x,y)=\int_0^{y_1}dy_1\cdots\int_0^{y_r}\prod_{i=1}^{n}\log(x_i+L_i(y))\,dy_r .$$

p-進解析関数 $G_\xi(L,x)$ を次の式で定義する。

$$G_\xi(L,x)=(-1)^r\lim_{N\to\infty}\frac{1}{c_1\cdots c_r p^{rN}}\sum_{j=1}^{r}\sum_{m_j=0}^{qp^N-1}\xi_1^{m_1}\cdots\xi_r^{m_r}\lambda(L,x,m)$$

ここで $m=(m_1,\cdots,m_r)$ とおいた。又、limit は p-adic limit である。

定理 2. $$\frac{\partial}{\partial s_1}\cdots\frac{\partial}{\partial s_n}Z_p(0,\cdots,0)=(-1)^nG_\xi(L,x),$$

$$Z_p(a_1,\cdots,a_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{a_i-1}}{(a_i-1)!}\cdot\frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}\cdots\frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}G_\xi(L,x)$$

が $a_i>0,\ a_i\in\mathbb{Z}\ (i=1,2,\cdots,n)$ に対し成立する。

（注意） J. Diamond [3] の p-adic $\log\Gamma$-関数は

$$G_p(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{p^N}\sum_{m=0}^{p^N-1}\{(x+m)\log(x+m)-(x+m)\}$$ で $G_\xi(L,x)$

はその拡張になっている。 また Shintani [9] の結果によれば総実代数体の L 関数は $Z(s,\cdots,s)$ の形の関数を用いて表わされる（ Cassou-Noguès [2] も参照）。よって定理2より総実代数体の p-進 L 関数について、その正整数での値が多重 Γ 関数（の log をとった）p-進類似 $G_\xi(L,x)$ で記述されることが分る。

定理2の証明は Koblitz [8] の p-進積分（の多変数への拡張）を用いて，

$$Z_p(s_1,\cdots,s_n)=\int_{\mathbb{Z}_p^r}\prod_{i=1}^{n}(x_i+L_i(y))^{-s_i}\,d\mu_\xi(y),$$

$$G_\xi(L,x)=\int_{\mathbb{Z}_p^r}\prod_{i=1}^{n}\log(x_i+L_i(y))\,d\mu_\xi(y)$$

と表わされることによる（詳細は [6] 参照）。$G_\xi(L,x)$ については Barnes [1] の多重 Γ 関数と同様の関数等式が成立することも分っている。

初めに戻って L 関数として Dirichlet 指標 $\chi_1,\cdots,\chi_r$ をとり，

$$Z(\chi,s)=\sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}\xi_1^{m_1}\cdots\xi_r^{m_r}\chi_1(m_1)\cdots\chi_r(m_r)(x_1+L_1(m))^{-s_1}\cdots(x_n+L_n(m))^{-s_n}$$

としてもよい。（但し、χ_j の導手を d_j とするとき，1 の c_j-乗根 ξ_j は $\xi_j^{d_j}\neq 1$ なるものとする）。 それは $m_1,\cdots,m_r$ についての和を d_j を法として分けると、$Z(\chi,s)$ は $Z(s)$ の場合に帰着するからである。

References

[1] E. W. Barnes, On the theory of multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374–425.

[2] P. Cassou-Noguès, Valuers aux entier négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Inv. math. 51 (1979), 29–59.

[3] J. Diamond, The p-adic log gamma function and p-adic Euler constants, Trans. Amer. Math. Soc. 233 (1977), 321–337.

[4] J. Diamond, On the values of p-adic L functions at positive integers, Acta Arith. 35 (1979), 223–237.

[5] H. Imai, On the construction of p-adic L functions, Hokkaido Math. J. 10 (1981), 249–253.

[6] H. Imai, On the p-adic log multiple gamma functions and the values of p-adic L functions, preprint.

[7] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L functions, Ann. of Math. Studies, No 74, Princeton Univ. Press, 1972.

[8] N. Koblitz, A new proof of certain formulas for p-adic L functions, Duke Math. J. 46 (1979), 455–468.

[9] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, Sec. IA (1976) 393–417.