数理解析研究所講究録
第440巻 1981年 85-102

岩沢加群の類数公式

東工大・理　中里 肇
福田 隆

§0. Introduction

p を奇素数とする．k を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とし，k_∞ を k の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $k\mathbb{Q}_\infty$ とする。ここに $\mathbb{Q}_\infty$ は $\mathbb{Q}$ 上の唯一の $\mathbb{Z}_p$ 拡大である．$n\geq 0$ に対し，k_n を k_∞/k の中間体で k 上の次数が p^n であるものとし，$\Gamma_n = Gal(k_\infty/k_n)$ とおく．A_n を k_n の ideal 類群の p-Sylow 部分群とし，D_n を A_n の部分群で p 上の primes の積を含む類から成るものとする．$A'_n = A_n/D_n$ とおく (c.f. [6])．

k を CM 体とする．k_∞ も CM 体である．j で k_∞ の複素共役を表す．任意の $\mathbb{Z}[\{1,j\}]$-加群 M に対し，

$$M^- = \{a \in M \mid (1+j)a = 0\}$$

とおく．

(0.1) 定義．$A_\infty^- = \varinjlim A_n^-$，$A'^-_\infty = \varinjlim A'^-_n$ とおく．

Greenberg [3] 及び Ferrero-Greenberg [2] は k が絶体 abel

体の時，$(A'_\infty)^{\Gamma_n}$ の位数は有限であることを証明した。我々は $[k:\mathbb{Q}]$ が p と素である時，その位数を p 進L関数を用いて計算する。

以後 $k/\mathbb{Q}$ は有限次虚abel拡大で $[k:\mathbb{Q}]$ は p と素であるとする。$G=\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$，$\hat{G}$ を指標群 $\mathrm{Hom}(G,\overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ とする。ここで $\overline{\mathbb{Q}}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包である。類体論により，$\hat{G}$ の元を $k/\mathbb{Q}$ の原始Dirichlet指標と見なす。ω を mod p の Teichmüller 指標とする。$\phi\neq\omega$，$\phi(j)=-1$ である $\phi\in\hat{G}$ をとり，$L_p(s;\omega\phi^{-1})$ を $\omega\phi^{-1}$ に付随する p 進L関数とする。p 進L関数の岩沢の構成法により，$\kappa\in 1+p\mathbb{Z}_p$，$\kappa\notin 1+p^2\mathbb{Z}_p$ に対し，

$$f(\kappa^{s-1};\omega\phi^{-1})=L_p(s;\omega\phi^{-1})$$

となる巾級数 $f(T;\omega\phi^{-1})\in\Lambda_\phi$ が存在する。ここで，$\mathbb{Z}_p[\phi]=\mathbb{Z}_p[\{\text{all values of }\phi\}]$，$\Lambda_\phi=\mathbb{Z}_p[\phi][[T]]$ である。

$$f(0;\omega\phi^{-1})=L_p(0;\omega\phi^{-1})=(1-\phi^{-1}(p))L(0;\phi^{-1})$$

であることに注意する。

(0.2) 定義．$\hat{f}(T;\omega\phi^{-1})\in\Lambda_\phi$ を

$$\hat{f}(T;\omega\phi^{-1})=\begin{cases} f(T;\omega\phi^{-1})/T & \text{if } \phi(p)=1, \\ f(T;\omega\phi^{-1}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。

Ferrero-Greenberg [2] は $\hat{f}(0;\omega\phi^{-1})\neq 0$ であることを証

明した．従って，$\hat{f}(\zeta-1;\omega\phi^{-1})\neq 0$ for all ζ with $\zeta^{p^n}=1$, $n\geq 0$ であり，$\Lambda_\phi/(\hat{f}(T;\omega\phi^{-1}), \omega_n)$ の位数は有限である．ここで $\omega_n=(1+T)^{p^n}-1$ である．

有限集合 A に対し，$^{\#}A$ で A の濃度を表す．群 G の表現が $\mathbb{Q}_p$-既約であるとは，それが $\mathbb{Q}_p$ 上定義され，$\mathbb{Q}_p$ 上既約であることとする．G の指標が $\mathbb{Q}_p$-既約とは，それが G の或る $\mathbb{Q}_p$-既約表現の指標であることとする。

(0.3) 定理. (1) $k/\mathbb{Q}$ は有限次 abel 拡大であり，

(2) k は虚であり，

(3) $[k:\mathbb{Q}]$ は p と素であると仮定する．

この時，

$$^{\#}(A_\infty^-)^{\Gamma_n} = {}^{\#}\bigoplus_{\Phi} \Lambda_\phi/(\hat{f}(T;\omega\phi^{-1}),\omega_n) \quad \text{for all } n\geq 0$$

が成立する．ここで，Φ は $G=Gal(k/\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}_p$-既約指標で $\Phi\neq\omega$，$\Phi(j)\neq\Phi(1)$ であるもの全体を動き，ϕ は Φ の（一つの）絶対既約成分である．

$a, b\in\mathbb{Q}_p^\times$ に対し，$ord_p(a)=ord_p(b)$ の時 $a\underset{p}{\sim}b$ とかく．

$$^{\#}\Lambda_\phi/(\hat{f}(T;\omega\phi^{-1}),\omega_n) \underset{p}{\sim} \prod_{\psi}\prod_{\zeta^{p^n}=1} \hat{f}(\zeta-1;\omega\psi^{-1})$$

であることに注意する．ここで，ψ は ϕ の $\mathbb{Q}_p$ 上のすべての"共役"を動く．

(0.5) 注意. kの最大実部分体k^+とkの間で分解するp上のprimesがない時は，定理(0.3)のformulaはkの解析的類数公式からの直接の結果である(c.f.[1])。しかしk/k^+で分解するp上のprimesが存在する時は，$(A_\infty'^-)^{\Gamma_n}$は無限群となり，あるϕに対して$f(0;\omega\phi^{-1})=0$となる。

(0.6) 注意. 定理(0.3)を証明するには，Gauss和と森田のp進Γ関数の特殊値に関するGross-Koblitzのformula及び$L_p'(0;\chi)$に関するFerrero-Greenbergのformulaを用いる。

(0.7) 注意. 仮定(3)は本質的ではない。実際，定理(2.1)を証明するためには，$[k:\mathbb{Q}]$がpと素であると仮定する必要はない。

(0.8) 注意. Ferrero-Greenberg [2]はkが虚2次体で$n=0$の時，定理(0.3)を証明している。

記号. 通常どおり$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$でそれぞれ，有理整数環，有理数体，実数体，複素数体を表す。素数pに対し，$\mathbb{Z}_p$，$\mathbb{Q}_p$でそれぞれp進整数環，p進数体を表す。$\mathbb{Q}$及び$\mathbb{Q}_p$の代数閉包$\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$を固定する。embeddings $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 及び $\rho: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$を固定する。

§1. 岩沢加群

$k/\mathbb{Q}$ を定理(0.3) のようにとる．$[k:\mathbb{Q}]$ は p と素だから，k の p 上の primes はすべて k_∞ で完全分岐している．すべての $n\geqq 0$ に対し $(A'^{-}_\infty)^{\Gamma_n}$ は有限であり，$A'^{-}_n \to A'^{-}_m$ $(m\geqq n\geqq 0)$ は injective であるから，次の補題を得る．

(1.1) 補題．任意の $n\geqq 0$ に対し，$m_0\geqq 0$ が存在し

$$(A'^{-}_\infty)^{\Gamma_n} = (A'^{-}_m)^{\Gamma_n} \quad \text{for} \quad m\geqq m_0 \quad となる．$$

Z を $k/\mathbb{Q}$ に関する p の分解群とする．$\phi\in\hat{G}$ に対し，$\mathrm{Tr}\phi$ で ϕ を一つの絶対既約成分にもつ G の $\mathbb{Q}_p$-既約指標を表し，$e(\mathrm{Tr}\phi)$ で $\mathrm{Tr}\phi$ に対応する $\mathbb{Z}_p[G]$ の直交巾等元を表す．A_n, D_n, A'_n は自然に $\mathbb{Z}_p[G]$-加群と見なせる．k の p 上の primes はすべて k_n で完全分岐しているから，次の補題を得る．

(1.2) 補題．もし制限 $\phi|Z$ が trivial でなければ，すべての $n\geqq 0$ に対して $e(\mathrm{Tr}\phi)D_n=0$ となる．

(1.3) 補題(c.f.[3])．$m\geqq n\geqq 0$ に対して，

$$D^{-}_m/D^{-}_n \simeq ((\mathbb{Z}_p/p^{m-n}\mathbb{Z}_p)[G/Z])^{-} \quad (\mathbb{Z}_p[G]\text{-加群として}).$$

(1.4) 補題．$m\geqq n\geqq 0$ に対して，

$$0\to D^{-}_n \to A^{-}_n \xrightarrow{\alpha} (A^{-}_m)^{\Gamma_n}/D^{-}_m \to 0$$

は $\mathbb{Z}_p[G]$-加群の完全系列である．ここで α は $A^{-}_n\to A^{-}_m$ から誘導される．

$m\geqq n\geqq 0$ に対し

$$M^{(m)}_n = \{\alpha\in A^{-}_m \mid (s-1)\alpha\in D^{-}_m\}$$

とおく．s は $Gal(k_m/k_n)$ の生成元である (c.f. [3])．準同型 $\beta : M_n^{(m)} \to D_m^-$ を $\beta(a)=(s-1)a$ で定義すると，$D_m^- \subset \mathrm{Ker}\,\beta = (A_m^-)^{\Gamma_n}$ であり，$\mathbb{Z}_p[G]$-加群の完全系列

$$0 \to (A_m^-)^{\Gamma_n}/D_m^- \to M_n^{(m)}/D_m^- \to D_m^- \qquad (1.5)$$

を得る．$M_n^{(m)}/D_m^- = (A'^-_m)^{\Gamma_n}$ だから，補題(1.4)より，$\mathbb{Z}_p[G]$-加群の完全系列

$$0 \to A'^-_n \to (A'^-_m)^{\Gamma_n} \to D_m^- \qquad (1.6)$$

を得る．

§2. Reduction

定理(0.3)は次の定理(2.1)に帰着される（証明略）．

(2.1) 定理．(1) $k/\mathbb{Q}$ は有限次abel拡大であり，

(2) k は虚であり，

(3) p は $k/\mathbb{Q}$ で完全分解していると仮定すると，

$$\#(A'^-_\infty)^{\Gamma_n} = \#\bigoplus_{\Phi} \Lambda_\phi/(\hat{f}(T;\omega\phi^{-1}), \omega_n) \quad \text{for } n \geq 0$$

が成立する．ここで Φ と ϕ は定理(0.3)と同様に動く．

定理(2.1)では $[k:\mathbb{Q}]$ が p と素であるという仮定は必要なく，p が $k/\mathbb{Q}$ で完全分解していることが本質的である．

§3. 虚 p-単数群

以後 k は定理(2.1)の仮定(1)〜(3)をみたしているとする。$n\geqq 0$ に対し H_n を k_n の p-単数群とする。すなわち

$$H_n = \{\alpha\in k_n^\times \mid (\alpha) = k_n \text{ の } p \text{ 上の primes の積}\}$$

$N_{m,n}: k_m \to k_n$ $(m\geqq n\geqq 0)$ を norm 写像とする。

(3.1) 定義. 準同型 $\varphi_n^{(m)}: M_n^{(m)} \to H_n^{1-j}/N_{m,n}(H_m^{1-j})$ を次の様に定義する(c.f. [3])。s を $\mathrm{Gal}(k_m/k_n)$ の生成元とする。$c\in M_n^{(m)}$, $\mathfrak{a}\in c$ とすると、或る $\alpha\in k_m^\times$ 及び p 上の primes の積である k_m の ideal $\mathfrak{L}$ が存在して、$\mathfrak{a}^{1-s} = (\alpha)\mathfrak{L}$ となる。この時、$\varphi_n^{(m)}(c) = N_{m,n}(\alpha^{1-j}) \bmod N_{m,n}(H_m^{1-j})$ と定義する。これは well-defined で (c.f. [3])、次の補題を得る。

(3.2) 補題([3]). (1) $\mathrm{Ker}\,\varphi_n^{(m)} = (A_m^-)^{\Gamma_n}$

(2) $\mathrm{Im}\,\varphi_n^{(m)} = (H_n^{1-j}\cap N_{m,n}(k_m^\times)^{1-j})/N_{m,n}(H_m^{1-j})$

(3.3) 系. $0\to A_n'^- \to (A_m'^-)^{\Gamma_n} \to \mathrm{Im}\,\varphi_n^{(m)} \to 0$

は $\mathbb{Z}_p[G]$-加群の完全系列である。

§4. p 進 regurators

この節では H_0^{1-j} の或る部分群に対して p 進 regurator を定義する。k は定理(2.1)の仮定(1)〜(3)をみたしているとする。E_n を k_n の単数群, $\mathbb{P}_n = \{(\alpha)\mid \alpha\in H_n\}$ とする。完全系列 $0\to E_n\to H_n\to \mathbb{P}_n\to 0$ から完全系列 $0\to$

$E_n \cap H_n^{1-j} \to H_n^{1-j} \to \mathbb{P}_n^{1-j} \to 0$ を得る．$\mu(k_n)$ で k_n に含まれる1の巾根全体を表す．$E_n \cap H_n^{1-j} = \mu(k_n) \cap H_n^{1-j}$ だから（$n=0$ として）

$$\mu(k)H_0^{1-j}/\mu(k) \simeq \mathbb{P}_0^{1-j} \tag{4.1}$$

を得る．$\mathbb{P}_0^{1-j}$ は rank $g = [k:\mathbb{Q}]/2$ の自由 $\mathbb{Z}$-加群であることに注意する．M を $\mu(k)H_0^{1-j}$ の部分加群で $\mu(k)M/\mu(k)$ の rank が g であると仮定する．$m_1, \ldots, m_g$ を $\mu(k)M$ の元で $m_1 \bmod \mu(k), \ldots, m_g \bmod \mu(k)$ が $\mu(k)M/\mu(k)$ の $\mathbb{Z}$-基底であるものとする．$s_1, \ldots, s_g$ を $G/\{1,j\}$ の代表系とする．$\log_p : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Q}_p$ を $\log_p p = 0$, $\log_p \zeta = 0$ （$\zeta^{p-1}=1$）で正規化された p 進 logarithm とする（c.f. [5]）．定理(2.1)の仮定(3)より $\rho(k) \subset \mathbb{Q}_p$ である．ただし $\rho : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ は前に固定した embedding である．

(4.2) 定義．M の p 進 regulator $R_p(M)$ を

$$R_p(M) = \det\begin{pmatrix} \log_p \rho(s_1 m_1), & \ldots, & \log_p \rho(s_1 m_g) \\ \vdots & & \vdots \\ \log_p \rho(s_g m_1), & \ldots, & \log_p \rho(s_g m_g) \end{pmatrix} \text{ up to } \pm 1$$

で定義する．これは $(s_1, \ldots, s_g)$ 及び $(m_1, \ldots, m_g)$ の選び方によらない．

(4.3) 補題．$M_1 \subset M_2$ を $\mu(k)H_0^{1-j}$ の部分加群で $R_p(M_1) \neq 0$ とする．この時，$R_p(M_2) \neq 0$ であり

$$R_p(M_1)/R_p(M_2) = (\mu(k)M_2 : \mu(k)M_1) \quad \text{up to } \pm 1 .$$

§5. Gauss 和

この節では [4] で定義された Gauss 和を扱う．k は定理 (2.1) の仮定 (1)〜(3) をみたしているとする．N を $k/\mathbb{Q}$ の conductor とする．p は $k/\mathbb{Q}$ で完全分解しているので，N は p と素である．$K = \mathbb{Q}(\mu_N)$, $G_N = Gal(K/\mathbb{Q})$, $H = Gal(K/k)$, D = $K/\mathbb{Q}$ に関する p の分解群とする．μ_N は $\overline{\mathbb{Q}}$ に含まれる 1 の N 乗根全体である．$(t, N) = 1$ である $t \in \mathbb{Z}$ に対して $s_t \in G_N$ を $s_t(\zeta) = \zeta^t$ $(\forall \zeta \in \mu_N)$ で定義する．すると $D = \langle s_p \rangle$ である．v を $\rho : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対応する $\overline{\mathbb{Q}}$ の place とする．$\mathfrak{z}$ (resp. $\mathfrak{z}_N$) は v を k (resp. K) へ制限して得られる k (resp. K) の prime とする．

(5.1) 定義. $\mathcal{A}_N = \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} - \{0 \bmod \mathbb{Z}\}$,

$\qquad\qquad\mathfrak{A}_N = \mathrm{Map}(\mathcal{A}_N, \mathbb{Z})$ とおく.

$a = (t/N \bmod \mathbb{Z}) \in \mathcal{A}_N$ に対し，$\delta_{t/N} = \delta_a \in \mathfrak{A}_N$ を $\delta_a(a) = 1$, $\delta_a(b) = 0$ $(\forall b \in \mathcal{A}_N, b \neq a)$ で定義する．G_N の $\mathcal{A}_N$ 及び $\mathfrak{A}_N$ への作用は次で与えられる．

$$s_t(t'/N \bmod \mathbb{Z}) = tt'/N \bmod \mathbb{Z} \quad \text{for } s_t \in G_N,\ t'/N \bmod \mathbb{Z} \in \mathcal{A}_N,$$

$$(s\alpha)(a) = \alpha(s^{-1}a) \quad \text{for } s \in G_N,\ \alpha \in \mathfrak{A}_N,\ a \in \mathcal{A} .$$

Gauss 和 $g(\alpha, \mathfrak{z}_N, \Psi \circ Tr) = g(\alpha, \mathfrak{z}_N)$ を [4] の (1.3) 及び (1.4)

の様に定義する．

(5.2) Note．$\alpha \in N\mathfrak{a}_N$ の時 $g(\alpha, \mathfrak{z}_N)$ は K^D に含まれ，G_N の作用は次のようになる．

$$g(\alpha, \mathfrak{z}_N)^s = g(s\alpha, \mathfrak{z}_N) \quad \text{for } s \in G_N .$$

$x \in \mathbb{R}$ に対し，$\langle x \rangle$ で $0 \leqq \langle x \rangle < 1$，$x - \langle x \rangle \in \mathbb{Z}$ なる実数を表す．$a = (t/N \bmod \mathbb{Z}) \in \mathcal{A}_N$ に対し，$\langle a \rangle = \langle t/N \rangle$ とおき，$\alpha \in \mathfrak{a}_N$ に対し，$n(\alpha) = \sum_{a \in \mathcal{A}_N} \alpha(a) \langle a \rangle$ とおく．

Γ_p を森田の p 進 Γ 関数とする．[4] と同様に $\Gamma_p : \mathfrak{a}_N \to \mathbb{Z}_p$ を次のように定義する．

$$\Gamma_p(\alpha) = \prod_{a \in \mathcal{A}_N} \Gamma_p(\langle a \rangle)^{\alpha(a)} \quad \text{for } \alpha \in \mathfrak{a}_N .$$

次の定理は Gross と Koblitz [4] によって証明された．

(5.3) 定理．$n(\alpha) \in \mathbb{Z}$ ならば

$$\rho(g(\alpha, \mathfrak{z}_N)) = (-p)^{n\left(\sum_{s \in D} s\alpha\right)} \Gamma_p\left(\sum_{s \in D} s\alpha\right) \quad \text{in } \mathbb{Q}_p .$$

(5.4) 系．$\alpha \in N\mathfrak{a}_N$ ならば

$$\log_p \rho(g(\alpha, \mathfrak{z}_N)) = \sum_{s \in D} \log_p \Gamma_p(s\alpha) .$$

$X^- = \{ \phi \in \widehat{G} \mid \phi(j) = -1 \}$ とする．M を N の約数とする．$X_M = \{ \phi \in X^- \mid \text{conductor of } \phi = M \}$，$H_M = Gal(\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q}(\mu_M)) \subset G_N$ とおく．$2g = [k:\mathbb{Q}] = \# G = \# (G_N/H)$ であることを思い出す．

G_N/H の代表系 $\{s_1,\dots,s_{2g}\}$ ($s_i\in G_N$, $1\leqq i\leqq 2g$) を一つ固定する. $\phi\in X^-$ に対して

$$e(\phi)=\frac{1}{\# G}\sum_{s\in G}\phi(s^{-1})s\in\overline{\mathbb{Q}}_p[G],$$

$$\tilde{e}(\phi)=\frac{1}{\# G}\sum_{i=1}^{2g}\phi((s_iH)^{-1})s_i\in\overline{\mathbb{Q}}_p[G_N]$$

とおく. $\# G\sum_{\phi\in X_M^-}e(\phi)\in\mathbb{Z}[G]$, $\# G\sum_{\phi\in X_M^-}\tilde{e}(\phi)\in\mathbb{Z}[G_N]$ である.

(5.5) 定義. $\mathfrak{a}_k$ を $\left\{\# G\sum_{\phi\in X_M^-}e(\phi)N\delta_{1/M}\mid M|N\right\}$ で生成される $N\mathfrak{a}_N$ の部分加群とする.

(5.6) 定義. $\alpha\in N\mathfrak{a}_N$ に対応する k の Gauss 和 $g_k(\alpha)$, 及び k の Gauss 和の群 $\mathcal{G}_k$ を

$$g_k(\alpha)=N_{K^D/k}(g(\alpha,\mathfrak{P}_N)),$$

$$\mathcal{G}_k=\{g_k(\alpha)\mid\alpha\in\mathfrak{a}_k\}$$

で定義する.

$\mathbb{Z}_p[G_N]$ 準同型 $S_k:N\mathfrak{a}_N\longrightarrow\mathbb{Z}[G]$ を

$$S_k(\alpha)=\sum_{s\in G_N}n(s\alpha)(sH)^{-1}\quad\text{for }\alpha\in N\mathfrak{a}_N$$

で定義すると, k における Stickelberger relation が得られる.

(5.7) $\alpha\in N\mathfrak{a}_N$ ならば $(g_k(\alpha))=\mathfrak{p}^{S_k(\alpha)}$ in k.

$\mathbb{D}_n$ ($n\geq 0$) を p 上の primes で生成される k_n の ideal 群の部分群とし, $\mathbb{G}_k=\{(g_k(\alpha))\mid\alpha\in\mathfrak{a}_k\}$ とおく. (5.7) より $\mathbb{G}_k$ は $\mathbb{D}_0$ の $\mathbb{Z}[G]$-部分加群である.

(5.8) 命題. $(\mathbb{D}_0^{1-j} : G_{k}^{1-j}) = (2gN)^g \prod_{M|N} ({}^\# H_M)^{{}^\# X_M^-} \prod_{\phi \in X^-} L(0;\phi^{-1})$.

g_k の p 進 regurator は p 進 L 関数を用いて計算される。

(5.9) 定理. $R_p(g_k) = (4gN)^g \prod_{M|N} ({}^\# H_M)^{{}^\# X_M^-} \prod_{\phi \in X^-} L'_p(0;\omega\phi^{-1})$ up to ± 1 .

Ferrero と Greenberg [2] は次の定理を証明した。

(5.10) 定理. $M|N$, $\phi \in X_M^-$ とする. この時,

$$L'_p(0;\omega\phi^{-1}) = \sum_{\bar{s}_t \in G_M} \phi^{-1}(\bar{s}_t) \log_p \Gamma_p(s_t \delta_{1/M}) .$$

(5.10) と (5.4) より

$$L'_p(0;\omega\phi^{-1}) = \frac{1}{N\,{}^\# H_M} \sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p \rho(g_k(N\delta_{1/M})^s) . \quad (5.11)$$

$g_{k,M} = g_k(N\delta_{1/M})$ とおく. $s_t \in G_N$ に対し, $s_t H = s$ とすると

$$\log_p \rho(g_k(N\,{}^\# G \sum_{\psi \in X_M^-} \tilde{e}(\psi) s_t \delta_{1/M}))$$

$$= \log_p \rho\left((g_{k,M})^{{}^\# G \sum_{\psi \in X_M^-} e(\psi) s}\right).$$

(5.12) Claim. $L|N$, $\phi \in X_L^-$ とすると

$$\sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p \rho\left((g_{k,M})^{{}^\# G \sum_{\psi \in X_M^-} e(\psi) s}\right)$$

$$= \begin{cases} {}^{\#}G \sum_{s\in G} \phi^{-1}(s) \log_p \rho((g_{k,M})^s) & \text{if } L=M, \\ 0 & \text{if } L\neq M. \end{cases}$$

実際，$\log_p \rho(g_k^{1-j}) \subset \mathbb{Q}_p$ であるから，$\overline{\mathbb{Q}}_p[G] \otimes \log_p \rho(g_k^{1-j}) = \overline{\mathbb{Q}}_p[G] = \sum_{\phi} e(\phi)\overline{\mathbb{Q}}_p$ の中で計算することにより，

$$e(\phi) \sum_{s\in G} s^{-1} \log_p \rho\left((g_{k,M})^{{}^{\#}G \sum_{\psi\in X_M^-} e(\psi) s} \right)$$

$$= e(\phi)\, {}^{\#}G \sum_{\psi\in X_M^-} e(\psi) \sum_{s\in G} s^{-1} \log_p \rho((g_{k,M})^s)$$

$$= \begin{cases} e(\phi)\, {}^{\#}G \sum_{s\in G} \phi^{-1}(s) \log_p \rho((g_{k,M})^s) & \text{if } L=M, \\ 0 & \text{if } L\neq M. \end{cases}$$

<u>定理(5.9)の証明</u>

写像 $\mathrm{Log}_p : H_0^{1-j} \longrightarrow (1-j)\mathbb{Q}_p[G]$ を

$$\mathrm{Log}_p(x) = (1-j) \sum_{\bar{s}\in G/\{1,j\}} \log_p \rho(x^s) s^{-1} \quad \text{for } x \in H_0^{1-j}$$

で定義する．$\mathrm{Log}_p(g_k^{1-j}) \subset (1-j)\mathbb{Q}_p[G]$ だから，$R_p(g_k^{1-j})$ を $(1-j)\mathbb{Q}_p[G] \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p = (1-j)\overline{\mathbb{Q}}_p[G] = \bigoplus_{\phi\in X^-} e(\phi)\overline{\mathbb{Q}}_p$ の中で計算する．

g_k^{1-j} は

$$(g_{k,M}^{1-j})^{{}^{\#}G \sum_{\psi\in X_L^-} e(\psi)} \quad \text{for all } M|N,\ L|N$$

で生成されるので(5.12)より

$$\pm R_p(g_k^{1-j}) = \prod_{M|N} \prod_{\phi \in X_M^-} 2^{\#G} \sum_{s \in G} \phi^{-1}(s) \log_p \rho((g_{k,M})^s)$$

$$= (2^{\#G})^{\#X^-} \prod_{M|N} \prod_{\phi \in X_M^-} N^{\# H_M} L_p'(0; \omega\phi^{-1}). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Ferrero と Greenberg [2] は $L_p'(0;\omega\phi^{-1}) \neq 0$ であることを証明した。これより $R_p(g_k^{1-j}) \neq 0$ であり，従って補題(4.3)より

$$R_p(H_0^{1-j}) \neq 0 \quad \text{(c.f. [3])} \tag{5.13}$$

§6. 定理(2.1)の証明

この節では定理(2.1)を証明する。$n \geq 0$ とする。$\mathcal{P}_n$ を k_n の単項 ideal 群とし，$\mathbb{P}_n = \mathcal{P}_n \cap \mathbb{D}_n$，$\mathcal{D}_n = \mathbb{D}_n / \mathbb{P}_n$ とおく。すると

$$(\mathbb{D}_0^{1-j} : \mathbb{P}_0^{1-j}) = \#\mathcal{D}_0^{1-j} \ (\text{2-factor を除いて}) \sim_p \# D_0^-$$

を得る。従って命題(5.8)と定理(5.9)より次を得る。

$$\pm \frac{R_p(g_k^{1-j})}{R_p(H_0^{1-j})} = (\mathbb{P}_0^{1-j} : \mathbb{G}_k^{1-j}) = \frac{(\mathbb{D}_0^{1-j} : \mathbb{G}_k^{1-j})}{(\mathbb{D}_0^{1-j} : \mathbb{P}_0^{1-j})} \ (\text{2-factor を除いて}) \tag{6.1}$$

(6.2) 補題. $m \geq 0$ の時，

$$\#(H_0^{1-j}/(H_0^{1-j} \cap N_{m,0}(k_m^\times)^{1-j})) \sim_p p^{(m+1)g} / R_p(H_0^{1-j}).$$

(6.3) $n \geq 0$ 及び十分大きな $m \geq n$ に対して，

$$\mathbb{Z}_p \otimes (H_0^{1-j} \cap N_{m,0}(k_m^\times)^{1-j}) = \mathbb{Z}_p \otimes (N_{n,0}(H_n^{1-j} \cap N_{m,n}(k_m^\times)^{1-j})).$$

(6.4) $m \geq n \geq 0$ に対して，

$$(\mathbb{Z}_p\otimes H_0^{1-j}:\mathbb{Z}_p\otimes(H_0^{1-j}\cap N_{m,0}(k_m^{\times})^{1-j}))$$
$$=(\mathbb{Z}_p\otimes \mathbb{P}_0^{1-j}:\mathbb{Z}_p\otimes(\mathbb{P}_0^{1-j}\cap N_{m,0}(\mathcal{E}_m^{1-j}))),$$
$$(\mathbb{Z}_p\otimes(H_n^{1-j}\cap N_{m,n}(k_m^{\times})^{1-j}:\mathbb{Z}_p\otimes N_{m,n}(H_m^{1-j}))$$
$$=(\mathbb{Z}_p\otimes(\mathbb{P}_n^{1-j}\cap N_{m,n}(\mathcal{E}_m^{1-j})):\mathbb{Z}_p\otimes N_{m,n}(\mathbb{P}_m^{1-j})).$$

$n\geqq 0$ に対し，(6.3)をみたす $m\geqq n$ をとる． norm 写像 $N_{m,n}:\mathbb{D}_m^{1-j}\to\mathbb{D}_n^{1-j}$, $N_{n,0}:\mathbb{D}_n^{1-j}\to\mathbb{D}_0^{1-j}$ は bijective であるから，次の図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{D}_m^{1-j} & & & \supset & & & \mathbb{P}_m^{1-j} \\
\wr\big\downarrow N_{m,n} & & & & & & \wr\big\downarrow \\
\mathbb{D}_n^{1-j} & \supset & & \mathbb{P}_n^{1-j}\cap N_{m,n}(\mathcal{E}_m^{1-j}) & \supset & & N_{m,n}(\mathbb{P}_m^{1-j}) \\
\wr\big\downarrow N_{n,0} & & & \wr\big\downarrow & & & \wr\big\downarrow \\
\mathbb{D}_0^{1-j} & \supset & \mathbb{P}_0^{1-j} \supset & \mathbb{P}_0^{1-j}\cap N_{m,0}(\mathcal{E}_m^{1-j}) & \supset & & N_{m,0}(\mathbb{P}_m^{1-j})
\end{array} \qquad (6.5)$$

(6.5)より

$$(\mathbb{Z}_p\otimes(\mathbb{P}_n^{1-j}\cap N_{m,n}(\mathcal{E}_m^{1-j})):\mathbb{Z}_p\otimes N_{m,n}(\mathbb{P}_m^{1-j}))$$
$$=\frac{(\mathbb{Z}_p\otimes\mathbb{D}_m^{1-j}:\mathbb{Z}_p\otimes\mathbb{P}_m^{1-j})}{(\mathbb{Z}_p\otimes\mathbb{D}_0^{1-j}:\mathbb{Z}_p\otimes\mathbb{P}_0^{1-j})(\mathbb{Z}_p\otimes\mathbb{P}_0^{1-j}:\mathbb{Z}_p\otimes(\mathbb{P}_0^{1-j}\cap N_{m,0}(\mathcal{E}_m^{1-j})))}.$$

従って補題(3.2)と(6.4)より，

$$\#\mathrm{Im}\,\varphi_n^{(m)}=\frac{\#(D_m^-/D_0^-)}{(\mathbb{Z}_p\otimes H_0^{1-j}:\mathbb{Z}_p\otimes(H_0^{1-j}\cap N_{m,0}(k_m^{\times})^{1-j}))}$$

となり，更に補題(6.2)と補題(1.3)を用いると

$$\#\mathrm{Im}\,\varphi_n^{(m)}\sim_p p^{-g}R_p(H_0^{1-j}) \qquad (6.6)$$

が得られる。

$$L'_p(0;\omega\phi^{-1}) \sim_p p\,\hat{f}(0;\omega\phi^{-1}) \tag{6.7}$$

であることに注意する。

定理(2.1)の証明

与えられたnに対し，$(A'^{-}_{\infty})^{\Gamma_n}=(A'^{-}_{m})^{\Gamma_n}$となり，かつ(6.3)が成立する$m \geq n$をとる。(3.3)，(6.1)，(6.6)，(6.7)及び

$$\#(A'^{-}_{n}/A'^{-}_{0}) \sim_p \prod_{\phi\in X^-} \prod_{\substack{\zeta^{p^n}=1\\ \zeta\neq 1}} \hat{f}(\zeta-1;\omega\phi^{-1})$$

を用いて

$$\#(A'^{-}_{m})^{\Gamma_n} \sim_p \prod_{\phi\in X^-} \prod_{\zeta^{p^n}=1} \hat{f}(\zeta-1;\omega\phi^{-1})$$

を得る。　Q.E.D.

§7．例

1．$p=5$とし，kを$\mathbb{Q}$上の次数が4である$\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/1949))$の（唯一つの）部分体とする。この時，5は$k/\mathbb{Q}$で完全分解し，$\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$の虚$\mathbb{Q}_5$-既約指標は2つ存在する。$\#A_0^-=5^3$，$D_0^-\simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$であることは容易にわかり，従って$\#A'^{-}_0=5$である。$\hat{f}(T;\omega\phi^{-1})$の係数を近似計算することにより，

$$\# \bigoplus_{\Phi} \Lambda_\phi / (\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}), \omega_0) = 5^3$$

が得られる．定理(0.3)を用いると $\#(A_\infty'^-)^{\Gamma_0} = 5^3$ となる．従って $A_0'^- \subsetneqq (A_\infty'^-)^{\Gamma_0}$ である．更に $\# A_1^- = 5^9$, $\# D_1^- = 5^4$, $\# A_1'^- = 5^5$ であることもわかる．k の λ_5^--invariant は 6 である．

2． $p=5$ とし，k を $\mathbb{Q}$ 上の次数が 4 である $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/2269))$ の（唯一つの）部分体とする．この場合は，

$$\bigoplus_{\Phi} \Lambda_\phi / (\hat{f}(T; \omega\phi^{-1}), \omega_0) = \{0\}$$

であり，定理(0,3)を用いると，$(A_\infty'^-)^{\Gamma_0} = \{0\}$ となる．従って $A_0'^- = (A_\infty'^-)^{\Gamma_0} = \{0\}$ であり，$\# D_0^- = \# A_0^- = 5^3$ となる．k の λ_5^--invariant は 2 である．

文献

1. J. Coates, S. Lichtenbaum : On l-adic zeta functions. Ann. Math. 98, 498-550 (1973)

2. B. Ferrero, R. Greenberg : On the behavior of p-adic L-functions at s=0. Inv. Math. 50, 91-102 (1978)

3. R. Greenberg : On a certain l-adic representation. Inv. Math. 21, 117-124 (1973)

4. B. Gross, N. Koblitz : Gauss sums and the p-adic Γ-function. Ann. Math. 109, 569-581 (1979)

5. K. Iwasawa : Lectures on p-adic L-functions. Ann. Math. Studies 74, Princeton University Press, 1972

6. K. Iwasawa : On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields. Ann. Math. 98, 246-326 (1973)