数理解析研究所講究録
第 440 巻 1981 年 103-118

岩沢類数公式の一般化 II

東大・教養 片岡俊孝

§0. Introduction.

p を素数、m を有理数とする。$\{\sqrt[p^n]{m}\}_{n=0}^{\infty}$ を、$(\sqrt[p^n]{m})^p=\sqrt[p^{n-1}]{m}$, $n=1,2,\cdots$, となるようにえらんでおく。拡大

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt[p]{m})\subset\mathbb{Q}(\sqrt[p^2]{m})\subset\cdots\subset\mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{m})\subset\cdots\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{m})$$

を考える。$m=1$, $\sqrt[p]{m}$ を 1 の原始 p 乗根とすると、これは $\mathbb{Q}(\sqrt[q]{m})$ ($q=\begin{cases}p & p\neq 2 \text{ のとき}\\ 4 & p=2 \text{ のとき}\end{cases}$) 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大となっている。このとき、整数 λ, μ, ν が存在して、十分大きな n に対して、$\mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{m})$ の類数 の p-part は、p^{e_n}, $e_n=\lambda n+\mu p^n+\nu$, とかけることが知られている（岩沢の類数公式）。ここでは、$m\neq\pm1$, 0 の case へ上の類数公式を、拡張することを考える。

ところで、上の岩沢の類数公式の証明は、$\mathbb{Z}_p$ 上の一変数形式的巾級数環上の加群の話に還元される。それは、任意の有限次代数体上の $\mathbb{Z}_p$-拡大の場合でも、全く同一である。我々

の場合でも、適当な分岐にかんする条件をみたしさえすれば、他の場合についても同じようにあつかうことができる。

さて、片岡[7]を、一般化した次のような有限次代数体 k 上の無限次代数拡大 K を考えよう。

$(*)_p$: k 上の拡大 L で次の i)〜iii) をみたすものが存在する。

i) L/k : Galois 拡大,

ii) $L \cap K = k$,

iii) KL/L : $\mathbb{Z}_p$-拡大。

この拡大 K/k の中間体は、片岡[7]と同じようにかける。

(α) 整数 $n \geq 0$ に対して、k 上の拡大次数が、p^n である K/k の中間体 k_n が唯一つ存在する。

(β) $k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots \subset K$

(γ) $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} k_n$

i)〜iii) をみたす L に対して、KL/k は、Galois 拡大となり、そのようなものの中で最小のものが存在する。以後、L はつねにそのようなものをあらわすとしよう。このとき、$Gal(L/k)$ は、自然に $\mathbb{Z}_p^{\times}$ の closed subgroup と identify

することができる。ここで2つのcaseにわかれる。

(a) $[L:k] < +\infty$

(b) $[L:k] = \infty$

(a)のcaseは、すでに片岡[7]であつかっている。このcaseでは、拡大K/kの片岡[8]§1の意味でのGalois群の作用全体のなす環"R"によって中間体のp-class groupの一様な記述が得られ、$\mathbb{Z}_p$−拡大のときと同様の方針で、岩沢類数公式の成立することが示される。ところが、(b)の場合では、(a)のときの"R"にあたるものが$\mathbb{Z}_p$となってしまって、$\mathbb{Z}_p$−拡大のときと同じ方針で類数公式をもとめることは、全く不可能になってしまう。したがって、拡大KL/kまで考えることが必然的になってくる。冒頭にあげた拡大は、$(*)_p$をみたし、(b)のcaseにあたる。以後、(b)が成立することを仮定する。

このような問題に対して、今のところ特殊な場合しかわかっていない。この報告では、一般的方針をのべ、わかりやすい場合に限定して、結果を説明することにする。大雑把にいって、考察は、次の3つの部分にわかれる。

(1) 中間体の p-class group の一様な記述,

(2) 分類問題,

(3) index の計算.

以後，(1)，(2) 及び L/k が cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大をふくむときの拡大 K/k の記述のみに限定する。(2) の特殊な case での explicit な記述，(3)，p-rank にかんする結果及び例などは割愛する.

記号

(1) $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大 M に対して，C_M で $\varprojlim_{M' \subset M} C_{M'}$ をあらわす。ただし，M' は M の $\mathbb{Q}$ 上有限次である部分体をわたり，$C_{M'}$ は M' の p-class group をあらわす。

(2) $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L/k), \mathbb{Z}_p^\times)$ を，

$$\begin{array}{cccc} \eta\,; & \mathrm{Gal}(L/k) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathrm{Gal}(KL/L)) = \mathbb{Z}_p^\times \\ & \sigma & \longmapsto & (x \longmapsto \tilde{\sigma}^{-1} x \tilde{\sigma}) \end{array}$$

で定める。ただし $\tilde{\sigma}$ は σ の KL の automorphism への拡張である。

(3) $G = \mathrm{Gal}(KL/k)$，$H = \mathrm{Gal}(KL/K)$，$N = \mathrm{Gal}(KL/L)$ とおく。

(4) $\Lambda_G = \mathbb{Z}_p[[G]]$，$\Lambda_H = \mathbb{Z}_p[[H]]$，$\Lambda_N = \mathbb{Z}_p[[N]] = \Lambda$ とおく。

(5) L/k は，仮定より，k 上の $\mathbb{Z}_p$-拡大を唯一つ含むが，それと k 上 linearly disjoint な極大な部分体の一つを L_0 とかく。$p=2$，$\mathrm{Im}\,\eta \ni -1$ のときには，このような L_0 は 2ケ存在し，それ以外のときは unique に定まる。

(6) $\mathrm{Gal}(KL/L_0)=G_0$ とおく。

§1. 分岐。

まず，類数公式が成立するためには，最低限次が必要と思われる。

(R-1)； K/k で分岐する k の素点は有限個。

さらに強い条件として次のようなものが考えられる。

(R-2)； K/k で分岐する k の素点は有限個であって，KL/L_0 で分岐する KL の素点の inertia field は，L あるいは L_0 上の有限次拡大である。

(R-3)；(R-2) をみたし，拡大 KL/k での inertia field が k_n ($n\in\mathbb{Z}, \geq 0$) である KL の素点が存在する。

(R-2)，(R-3) に，さらに条件
“KL/L_0 で分岐する KL の素点の decomposition field は，L_0 上有限次である。”
を追加したものをそれぞれ，(R-2)′，(R-3)′ と呼ぶことにする。

以上の準備のもとで，

命題 1.1　p: odd とする。(R-3) を仮定する。n_0 を次のような性質をみたす非負整数とする。

"$k_{n_0}L$ の素点が $KL/k_{n_0}L$ で分岐するならば、そこで完全分岐する。"

このとき、

(1) 整数 $n \geq n_0$ に対して、$C_{k_n} \simeq C_{KL}/C_0 C_1^{\nu_{n_0,n}}$ が成り立つ。
ただし、$C_0 = \mathrm{Ker}(C_{KL} \to C_K)$, $C_1 = \mathrm{Ker}(C_{KL} \to C_{k_{n_0}L})$ である。整数 $0 \leq m \leq n$ に対して、$\nu_{m,n}$ を $\frac{\sigma^{p^n}-1}{\sigma^{p^m}-1} \in \Lambda_N$ で定める。ここに σ は N の topological generator である。

(2) C_0 は、$[C_{KL}, H]$ $(= \langle c^{\tau-1} \mid c \in C_{KL}, \tau \in H \rangle)$ をふくみ $C_0/[C_{KL}, H]$ は $\mathbb{Z}_p$-加群として、有限生成で、generator の数は、"KL/kL で分岐する k の素点の数 -1" とできる。τ を H の topological generator とすると、$[C_{KL}; H] = C_{KL}^{\tau-1}$ である。

(3) C_1 は、$C_{KL}^{\omega_{n_0}}$ をふくむ。もし拡大 K/k が (R-3)' をみたせば、$C_1/C_{KL}^{\omega_{n_0}}$ は、$\mathbb{Z}_p$-加群として、有限生成で、generator の数は、"$KL/k_{n_0}L$ で分岐する $k_{n_0}L$ の素点の数 -1" とできる。ω_{n_0} は、$\sigma^{p^{n_0}}-1$ $(\in \Lambda)$ である。

Remark. (R-2) の下でも同様のことが成立すると思われる。

§2. 拡大の記述 (Cyclotomic Case).

この§では、L/kにふくまれる$\mathbb{Z}_p$-拡大が、cyclotomic となる拡大K/kを決定する。pは奇素数であるとし、有限次代数体k、k上の無限次アーベル拡大L、及び$\mathrm{Gal}(L/k)$から$\mathbb{Z}_p^\times$へのinjective cont. hom. ηを固定する。$k(\mu_{p^\infty}) \subset L(\mu_p)$を仮定する。次のように記号を定める。

__記号__

(1) $\mu_{p^\infty} = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x^{p^n} = 1\}$, $\mu_p = \{x \mid x^p = 1\}$.

(2) χ : $L(\mu_p)/k$ の cyclotomic character i.e.

$\chi : \mathrm{Gal}(L(\mu_p)/k) \to \mathbb{Z}_p^\times$ s.t. $\zeta^\sigma = \zeta^{\chi(\sigma)}$, $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L(\mu_p)/k)$, $\forall \zeta \in \mu_{p^\infty}$

(3) $\eta_0 : \mathrm{Gal}(L_0(\mu_p)/k) \to \mathrm{Gal}(L_0/k) \to \mathrm{Gal}(L/k) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}_p^\times$.

(4) $\chi_0 : \mathrm{Gal}(L_0(\mu_p)/k) \to \mu_{p-1} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ s.t. $\zeta^\sigma = \zeta^{\chi(\sigma)}$,

$\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L_0(\mu_p)/k)$, $\forall \zeta \in \mu_p$.

(5) $\theta = \chi_0 \eta_0^{-1} \in X(\mathrm{Gal}(L_0(\mu_p)/k)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L_0(\mu_p)/k), \mathbb{Z}_p^\times)$.

(6) K_η : $\mathrm{Ker}\,\theta$の固定体。

(7) $\chi_1 : \mathrm{Gal}(k\mathbb{Q}_\infty/k) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L(\mu_p)/k) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}_p^\times$,

$\eta_1 : \mathrm{Gal}(k\mathbb{Q}_\infty/k) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L(\mu_p)/k) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}_p^\times$.

ただし、$\mathbb{Q}_\infty$は$\mathbb{Q}$上の$\mathbb{Z}_p$-拡大である。

(8) S : p上の素点をすべてふくむkの素点の有限集合。

(9) $E_{*,S}$: kの有限次拡大$*$のS-units全体。

(10) e_θ : θに対応する$\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(L_0(\mu_p)/k)]$の idempotent.

定理 2.1. 上の仮定の下で、

(1) $\chi_1 \neq \eta_1$ ならば、

" K/k : S-ramified $\Longrightarrow$ K/k : p-ramified "

が成り立つ。

(2) L_0 のみにより定まる $Gal(k\mathbb{Q}_\infty/k)$ の $\mathbb{Q}_p$-valued character よりなる有限集合があって、η_1 がそれに属さなければ、

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} Gal(K_\eta/L) = r_2(k).$$

ここに、K_η は、対応する $Gal(L/k)$ の character が η となる $(*)_p$ をみたす k 上の拡大 K すべての合成体，$r_2(k)$ は、k の虚な素点の数をあらわす。ただし、$r_2(k)=0$ のときは、上は、対応する character が η となる $(*)_p$ をみたす拡大 K が存在しないことを意味する。

(3) $\chi_1 = \eta_1$ のとき、次のよう自然な bijective な対応がある。

$$\left\{ K/k\ ;\ \begin{array}{l}\text{最上のもち上げが } L \text{ であって、対応する } Gal(L/k) \text{ の} \\ \text{character は } \eta\end{array} \right\} \Big/ \underset{k\text{上の共役}}{\sim}$$

$$\longleftrightarrow \left\{ W\ ;\ (E_{k_\eta} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{e_\theta} \text{ の } \mathbb{Z}_p \text{ と isomorphic な直和因子} \right\}.$$

具体的な対応は、$K \leftrightarrow W$ とすると、

$k_\eta \cdot k_n = k_\eta(\sqrt[p^n]{\alpha})$，ただし、$\alpha$ は、$\mathrm{Im}(W \to E_{k_\eta,S}/E_{k_\eta,S}^{p^n})$ $= \langle \alpha \pmod{E_{k_\eta,S}^{p^n}} \rangle$ となる $E_{k_\eta,S}$ の元である。

(3)* $(E_{k_\eta,S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{e_\theta}{}_{tor} \cong \begin{cases} 0 & k \neq L_0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z} & k = L_0,\ \mu_{p^\infty} \cap k_\eta = \mu_{p^e},\ e \geq 1 \end{cases}$

したがって、$k \neq L_0$ のときは $(E_{k_\eta,S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p)^{e_\theta}$ の一次元部分空間といっても同じである。

(4)（分岐にかんして）$\chi_1 = \eta_1$ であるとする。

$\mathfrak{p}$ を k の p 上の素点とする。$\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{p}$ 上の k_η の素点とする。

$\widehat{k_{\eta,\mathfrak{P}}^\times} = \varprojlim_n k_{\eta,\mathfrak{P}}^\times / k_{\eta,\mathfrak{P}}^{\times p^n}$ とおく。

$\varphi_{\mathfrak{p}} ;\ (E_{k_\eta,S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{e_\theta} \longrightarrow \widehat{k_{\eta,\mathfrak{P}}^\times} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$

を $E_{k_\eta,S} \hookrightarrow k_{\eta,\mathfrak{P}}^\times$ より induce される homomorphism とする。

このとき、

$\varphi_{\mathfrak{p}}(W) \neq 0 \iff \mathfrak{p}$ の拡大 KL/k での惰性体は、k の有限次拡大である。

Remark. 1. (3) の e は、n によって変化するかもしれない。

Remark. 2. 証明は、Kummer 拡大の理論による。

<u>Cor. 2.2</u> $p=$ odd, $k = \mathbb{Q}$ とする。

(1) すべての n について、k_η が pure field

$\iff L = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$, η は cyclotomic character.

(2) $L = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$, η は cyclotomic character であるとする。

$S = \{p, l_1, l_2, \cdots, l_r\}$ ($l_1, \cdots, l_r, p$ は相異なる素数) とする。

すると、K/k に対して、$\mathbb{P}^r_{\mathbb{Q}_p}$ の元 $x=(x_0,\dots,x_r)$ ($x_i\in\mathbb{Z}_p$, $\exists j$ $x_j\notin p\mathbb{Z}_p$) が存在して、$k_n=\mathbb{Q}\left(\sqrt[p^n]{p^{x_0^{(n)}}l_1^{x_1^{(n)}}\cdots l_r^{x_r^{(n)}}}\right)$ ($n=0,1,2,\cdots$) とかける。ただし、$x\in\mathbb{Z}_p$, $n\in\mathbb{N}$ に対して、$x^{(n)}\in\mathbb{Z}$ を、$0\leq x^{(n)}\leq p^n-1$, $x^{(n)}\equiv x \pmod{p^n}$ で定める。

(3)' (2)と同じ仮定の下で、

K/k が (R−3) をみたす $\Leftrightarrow$ K/k が (R−2) をみたす

$\Leftrightarrow$ $x_0\neq 0$, あるいは $\prod_{i=1}^{r}(l_i^{p-1})^{x_i}\neq 1$ in $\mathbb{Q}_p$

Remark. (3)で、(R−3), (R−2) に " ′ " をつけてもよい。

§3. Iwasawa algebra 上の加群の分類.

M. Harris [4] の定理より、(R−1) の仮定の下で必要な Λ_G−加群の分類問題は、次のようなものである。

(C−1); Λ_G−有限生成, Λ_{G_0}−Torsion 加群の分類.

しかし、§2 の結果及び Ferrero-Washington の定理[3]により、次の分類で十分である。

(C−2); Λ_N−有限生成, Λ_G−加群の分類.

実際、岩沢[5]より

" C_L の μ-invariant が 0 $\Leftrightarrow$ C_{kL} が Λ_N-有限生成 "

が (R−2)′ の仮定の下に成立するから，L_0 がアーベル体 L が Cyclotomic $\mathbb{Z}_p$−拡大をふくむときは，(C−2) で十分である。

しかし，完全な記述は，

(C−3) : Λ_N−cyclic，Λ_G−加群の分類

に限定してのべる。

分類問題にかんする結果をのべる前につぎのことを注意する。

命題 3.1. (M. Lazard [11] をみよ)

M を completed $\mathbb{Z}_p$−module とする。M 上に次の三つの構造を入れることは同値である。

(1) M 上の Contineous G−module structure,

(2) M 上の Contineous $\mathbb{Z}_p[[G]]$−module structure,

(3) M 上の contineous Λ_N−module structure と，contineous semi-linear H−module structure.

ただし，M が，contineous Λ−module かつ，contineous H−module であるときに，M が semi-linear であるとは，

$$\sigma(\lambda m) = \lambda^{\sigma}(\sigma m), \quad \forall \sigma \in H, \forall \lambda \in \Lambda, \forall m \in M$$

が成り立つことである。ここに $\lambda^{\sigma} = \sigma^{-1}\lambda\sigma$ in Λ_G である。

我々は，(3)の立場をとることにする。

定理3.2 $p \neq 2$，あるいは，$p=2$ かつ $I_H \not\ni -1$ を仮定する。

(1) 次のような bijective な対応がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_N\text{-有限生成，}\Lambda_G\text{-加群} \\ \text{の isomorphism classes} \end{array} \right\} \simeq \coprod_M H^1(H, \mathrm{Aut}_\Lambda(M))$$

ただし，Mは，有限生成 Λ_N-加群で，$\rho_h^*(M) \simeq M$ $(\forall h \in H)$ をみたすものの isomorphism classes をわたる。

H の $\mathrm{Aut}_\Lambda(M)$ への action は，M の Λ_N-加群の構造と compatible な Λ_G-加群の構造を入れたものを一つ固定し，$h \in H$, $f \in \mathrm{Aut}_\Lambda(M)$ に対して，

$$(h \cdot f)(x) = h(f(h^{-1}x)) \quad , \forall x \in M$$

で入れる。

$\rho_h^*(M) = \rho_h^*(\Lambda) \otimes_\Lambda M$，$\rho_h^*(\Lambda)$ は，isomorphism $x \mapsto h x h^{-1}$ によって，Λ に Λ-module structure を入れたものである。(i.e. $x \in \Lambda$ $y \in \rho_h^*(\Lambda)$ に対して，$\rho_h^*(\Lambda)$ の Λ-module としての作用を "$*$" でかくことにすると，$x * y = (h x h^{-1}) y$ である。)

(2) (1) の M は Λ-module として，次のようなものと pseudoisomorphic である。

$$\Lambda^{(s)} \oplus \sum_\alpha \oplus \Lambda / f_\alpha \Lambda \text{。}$$

ただし，$s \geq 0$，f_α は，p あるいは，ξ_i $(i=0,1,\cdots)$ の中である。

$\xi_0 = \sigma - 1$，$\xi_i = \sigma^{p^i} - 1 / \sigma^{p^{i-1}} - 1$ $(i=1,2,\cdots)$ $\in \Lambda$，である。

(3) $\mathfrak{a}$ を Λ のイデアルとすると，

$$\forall h \in H \quad \rho_h^*(\Lambda/\mathfrak{a}) \simeq \Lambda/\mathfrak{a} \Longleftrightarrow \forall h \in H,\ \mathfrak{a}^h = \mathfrak{a} \text{。}$$

(4) $\mathfrak{a}^t = \mathfrak{a}$, $\forall t \in H$ をみたす Λ のイデアル $\mathfrak{a} \neq 0$ は、次のように unique にかける。

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\, p^{e_0} \xi_{j_1}^{e_1} \cdots \xi_{j_k}^{e_k} \quad (e_0 \geq 0,\ k \geq 0,\ e_1 > 0,\ \cdots,\ e_k > 0)$$

$\mathfrak{A}$ は、$\mathfrak{m}^N$ の形のイデアルをふくまないイデアルであって、$\mathfrak{A}^t = \mathfrak{A}$, $\forall t \in H$ をみたすもの。$\mathfrak{m}$ は局所環 Λ の maximal ideal.

Remark 1. $p = 2$, $\mathrm{Im}\,\eta \geq 1$ のときも適当に修正すれば、同様のことが成立する。

Remark 2. τ を H の top. generator とすると、

$$\mathfrak{S}^*_\tau(M) \cong M \iff \forall t \in H \quad \mathfrak{S}^*_t(M) \cong M$$

Remark 3. $\mathfrak{a}^t = \mathfrak{a}$, $\forall t \in H$, なる Λ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対しては、$x \pmod{\mathfrak{a}} \mapsto x^t \pmod{\mathfrak{a}}$ なる自然な $t \in H$ の action がはいる。

上の定理の具体的な対応は次のようになっている。

Λ_G-加群 M に対応する 1-cocycle を、

$$f_\tau(x) = \tau(x^{\tau^{-1}}) \qquad (x \in M)$$

で定める。ただし、M に対して、固定してある Λ_G-加群の構造による H の action を M の元の右肩にかく。逆に、1-cocycle $f \in Z^1(H, \mathrm{Aut}_\Lambda(M))$ に対して、

$$t \cdot x = f_t(x^t) \qquad (x \in M,\ t \in H)$$

で M への H の action を定めると、G が continuous に acts し、

したがって、Λ_G－加群の構造がはいる。

Mが、Λ_N-cyclicのときは、$H^1(H, \mathrm{Aut}_\Lambda(M))$は、次のようになる。

命題 3.3 $\mathfrak{a}$をΛのイデアルで、$\mathfrak{a}^t = \mathfrak{a}$, $\forall t \in H$ をみたすものとする。

(1) $\mathrm{Aut}_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{a}) = (\Lambda/\mathfrak{a})^\times$.

(2) $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$ とする。

$$\begin{array}{ccc} H^1(H, (\Lambda/\mathfrak{a})^\times) & \simeq & 1+\mathfrak{m} \,/\, (1+\mathfrak{a})[1+\mathfrak{m}, H] \\ \ni & & \ni \\ f & \longmapsto & f_\tau. \end{array}$$

ここに、τは、Hのtop. generator, $[1+\mathfrak{m}, H] = \langle \lambda^{t-1} \mid \lambda \in 1+\mathfrak{m}, t \in H \rangle$ である。

C_{kL}がΛ_N-cyclicのときのIndex $(C_{kL} : C_0 C_1^{U_{n_0,L}})$の計算のためには、$H^1(H, (\Lambda/\mathfrak{a})^\times)$のexplicitな記述が必要であるが、それは、別の機会に譲ることにする。

文献

[1] J. Coates－A. Wiles; On p-adic L-functions and elliptic units. , J. Australian Math. Soc., A, 25, 1－25, 1978.

[2] R. F. Coleman : Division values in local fields, Inv. math.

, 53, 91–116, 1979

[3] B. Ferrero and L. Washington; The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields. Ann. Math., 109, 377–395, 1979.

[4] M. Harris; p-adic representations arising from descent on abelian varieties. Compo. Math., 39, 177–249, 1979

[5] K. Iwasawa; On the μ-invariants of $\mathbb{Z}_\ell$-extensions, Conference on number theory, algebraic geometry and commutative algebra in honor of Y. Akizuki, Tokyo, 1–11, 1973.

[6] K. Iwasawa and C. C. Sims; Computation of invariants in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan, 18, 86–96, 1966

[7] 片岡俊孝；岩沢類数公式の一般化，数理研講究録 378, 47–60, 1980年2月

[8] 片岡俊孝；Class number relations，数理研講究録 411; 142–161, 1981年1月

[9] 片岡俊孝；$\mathbb{Q}(\sqrt[2^n]{\pm l})$ 及び $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[2^n]{\pm l})$ の類数の 2-part，日本数学会代数分科会予稿集，1980年10月.

[10] S. Lang : Cyclotomic fields, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978

[11] M. Lazard : Groupes analytiques p-adiques, Pub. Math. I.H.E.S., 26, 1965