数理解析研究所講究録
第 440 巻 1981 年 126-130

2-基本アーベル群をイデアル類群にもつ虚2次体について

熊大 理　　山元 淳

類数1の虚2次体の決定についての Siegel の方法([1])を，イデアル類群が2-基本アーベル群となる虚2次体の場合に適用して，Siegel と同じ不定方程式が得られることを述べる。この結果は類数2の場合に九州大学における代数的整数論研究会(1978)で既に報告している。

Q を有理数体，$K=Q(\sqrt{d})$ を判別式 d をもつ虚2次体とし，$d=p_1^* p_2^* \cdots p_r^*$ (p_i^* は素判別式)，$\omega=\frac{\sqrt{d}-5d}{2}$，$j(z)$ を modular 不変量とする。

定理. K の類数が 2^{r-1} であり，$d\equiv \pm 2 \pmod 5$，$(3,d)=1$ とする。このとき，次のことが成り立つ。

(i) $d\equiv 1 \pmod 4$ のとき，不定方程式 $A^2-5B^6=4$ をみたす $Q(j(\omega))$ の整数 A, B が存在する。

(ii) $d\equiv 0 \pmod 8$ のとき，不定方程式 $A^2-5B^6=-4$ をみた

す $Q(j(\omega),\sqrt{-d})$ の整数 A, B が存在する。

(iii) $d=-4m$, $m\equiv 1\pmod 4$ のとき，不定方程式 $A^2-5B^6=-4$ をみたす $Q(j(\omega),\sqrt{E})$ の整数 A, B が存在する。ここで ε_m を $Q(\sqrt{m})$ の基本単数とするとき，$E=\begin{cases}\varepsilon_m & (N\varepsilon_m=-1)\\ \sqrt{\varepsilon_m} & (N\varepsilon_m=1)\end{cases}$ である。

以下，この定理の証明の概略を述べる。$\eta(z)$ を Dedekind の η-関数とし，Siegel に従って

$$\varphi(z)=\sqrt{5}^{-1}\frac{\eta(\frac{z}{5})\eta(\frac{z-1}{5})\eta(\frac{z+1}{5})}{\eta(5z)\eta(\frac{z-2}{5})\eta(\frac{z+2}{5})},\quad \psi(z)=\sqrt{5}^{-1}\frac{\eta(\frac{z}{5})\eta(\frac{z-2}{5})\eta(\frac{z+2}{5})}{\eta(5z)\eta(\frac{z-1}{5})\eta(\frac{z+1}{5})}$$

とおくと，$\varphi(z), \psi(z)$ は stufe 5 の modular 関数で，$\varphi(-z^{-1})=\psi(z)^{-1}$ となる。また，$j(z)$ はこれらの関数によって

$$\begin{aligned}(1)\quad j(z)&=\sqrt{5}^5\varphi(z)^{-5}(\varphi(z)+\varepsilon^3)\left[(\varphi(z)+\varepsilon)(\varphi(z)^2-\varepsilon^{-1}\varphi(z)+\varepsilon^{-2})\right]^3\\ &=\sqrt{5}^5\psi(z)^{-5}(\psi(z)+\varepsilon^{-3})\left[(\psi(z)+\varepsilon^{-1})(\psi(z)^2-\varepsilon\psi(z)+\varepsilon^2)\right]^3\end{aligned}$$

と表わされる。ここで $\varepsilon=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。更に，

$$\frac{\eta(z)}{\eta(5z)}\prod_{k=-2}^{2}\frac{\eta(z)}{\eta(\frac{z+k}{5})}=1,\quad \sqrt{-\varepsilon\sqrt{5}}=\zeta_5-\zeta_5^{-1}\quad (\zeta_5=e^{\frac{2\pi i}{5}})$$

を用いて，$\varphi^*(z)=\sqrt{-\varepsilon^{-3}\varphi(z)}$，$\psi^*(z)=\sqrt{-\varepsilon^3\psi(z)}$ を

$$\varphi^*(z)=\sqrt{-\varepsilon^{-3}\sqrt{5}^{-1}}\frac{\eta(z)^3}{\eta(5z)\eta(\frac{z-2}{5})\eta(\frac{z+2}{5})},\quad \psi^*(z)=\sqrt{-\varepsilon^3\sqrt{5}^{-1}}\frac{\eta(z)^3}{\eta(5z)\eta(\frac{z-1}{5})\eta(\frac{z+1}{5})}$$

と定義すると，$\eta(z)$ の変換公式によって $\varphi^*(z), \psi^*(z)$ は stufe 10 の modular 関数であり，$\varphi_k^*(z)=\varphi^*(z+k)$，$\psi_k^*(z)=\psi^*(z+k)$ $(0\leq k\leq 4)$

とおくとき，

$$\varphi_k^*(z+5)=-\varphi_k^*(z)\ ,\quad \psi_k^*(z+5)=-\psi_k^*(z)\qquad (0\leqq k\leqq 4)$$

$$\varphi_0^*(-z^{-1})=-\psi_0^*(z)^{-1}\ ,\quad \varphi_1^*(-z^{-1})=\psi_3^*(z)^{-1}\ ,\quad \psi_2^*(-z^{-1})=\varphi_3^*(z)\ ,$$

$$\varphi_4^*(-z^{-1})=\psi_2^*(z)^{-1}\ ,\quad \psi_1^*(-z^{-1})=\psi_1^*(z)\ ,\quad \psi_4^*(-z^{-1})=\psi_4^*(z)$$

となる。従って $\pm\varphi_k^*(z),\pm\psi_k^*(z)^{-1}$ $(0\leqq k\leqq 4)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ の作用で互いに置換する。また (1) は $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ によって

(2)
$$\begin{aligned} j(z)&=-\sqrt{5}^{-1}(\varphi^*(z)-\varphi^*(z)^{-1})\left[5(\varepsilon\varphi^*(z)-\varepsilon^{-1}\varphi^*(z)^{-1})(\varepsilon^4\varphi^*(z)^2+\varepsilon^{-4}\varphi^*(z)^{-2}+1)\right]^3\\ &=-\sqrt{5}^{-1}(\psi^*(z)-\psi^*(z)^{-1})\left[5(\varepsilon^{-1}\psi^*(z)-\varepsilon\psi^*(z)^{-1})(\varepsilon^{-4}\psi^*(z)^2+\varepsilon^4\psi^*(z)^{-2}+1)\right]^3\end{aligned}$$

と表される。次に $\varphi^*(\omega),\psi^*(\omega)$ が含まれる類体を求めるために $q=e^{2\pi iz}$ とし，$\varphi_k^*(z),\psi_k^*(z)$ を $q^{\frac{1}{10}}$-展開すると，定義からそれらの係数は $Q(\zeta_5)$ に含まれる。従って K_t を K の t を法とする合同類体とすれば，Söhngen の定理（[2]）より

(3) $\quad \varphi(\omega),\psi(\omega)\in K_5\ ,\quad \varphi^*(\omega),\psi^*(\omega)\in K_{10}$

となる。また Dirichlet－Kronecker の極限公式によって

(4)
$$(-1)^d\prod_{\substack{d_1d_2=d\\ d_1>0}}\varepsilon_{5d_1}^{\frac{1}{2r}h_{5d_1}h_{5d_2}}=\begin{cases}\varphi(\omega) & d\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)\\ \psi(\omega) & d\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 5)\end{cases}$$

が得られる（Stark [3]）。ここで積は $d_1=1, d_2=d$ を含めて d_1, d_2 が２次体の判別式となるすべてにわたり，ε_{5d_1}, h_{5d_1} は $Q(\sqrt{5d_1})$ の基本単数と類数，h_{5d_2} は $Q(\sqrt{5d_2})$ の類数である。以后，定理の証明には $d\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$ と $d\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 5)$ の２つの場合に分れるが，全く同様に証明出来るので，$d\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$

従って φ, φ^* の方のみを扱う。(4)において $2^{r-1} | h_{5d_1} h_{5d_2}$ に注意すると，$\varphi(\omega)^2 \in Q(j(\omega), \sqrt{5})$ 即ち $K_1(\varphi(\omega))/K_1$ は2次又は4次の拡大である。また $\left(\frac{d}{5}\right)=-1$, $d \neq -3, -4$ より $[K_5 : K_1]=12$ である。更に $\zeta_5 \in K_5$, $[K_1(\zeta_5) : K_1]=4$ であるから(3)より $\varphi(\omega) \in K_1(\zeta_5)$ となる。$\varphi(\omega)$ は実単数であるから $\varphi(\omega) \in Q(j(\omega), \sqrt{5})$ であり，結局 $\varphi^*(\omega)^2 \in Q(j(\omega), \sqrt{5})$ が得られる。一方 K_{10}/K_1 の拡大次数は

$$[K_{10} : K_1] = \begin{cases} 4 \cdot 3 & \left(\frac{d}{2}\right)=1 \\ 4 \cdot 3^2 & \left(\frac{d}{2}\right)=-1 \\ 8 \cdot 3 & \left(\frac{d}{2}\right)=0 \end{cases}$$

である。このことから定理が次の様に証明される。

(i) $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき，(3)より $\varphi^*(\omega)$ は $K_1(\zeta_5)$ に含まれる実単数であるから，$\varphi(\omega)$ と同じく $\varphi^*(\omega) \in Q(j(\omega), \sqrt{5})$ となる。今 σ を $Q(j(\omega), \sqrt{5})/Q$ の自己同型写像で $j(\omega)^\sigma = j(\omega)$, $\sqrt{5}^\sigma = -\sqrt{5}$ とすると，(4)より $(\varphi(\omega)\varphi(\omega)^\sigma)^2 = 1$ である。一方 $\varphi(\omega)\varphi(\omega)^\sigma = -(\varphi^*(\omega)\varphi^*(\omega)^\sigma)^2$ であり，従って $\varphi(\omega)\varphi(\omega)^\sigma = -1$ となる。また定理の仮定 $(3, d)=1$ のとき，$\sqrt[3]{j(\omega)} \in Q(j(\omega))$ である。故に，(2)より $\varphi^*(\omega) - \varphi^*(\omega)^{-1} \equiv 0 \pmod{\sqrt{5}}$ となり $\sqrt{5}^{-1}(\varphi^*(\omega) - \varphi^*(\omega)^{-1}) = B^3$ (B は $Q(j(\omega))$ の整数) とおける。従って $\varphi^*(\omega)^\sigma = \varphi^*(\omega)^{-1}$ となるから $\varphi^*(\omega) = \frac{A + B^3\sqrt{5}}{2}$ とおくと A も $Q(j(\omega))$ の整数であり $A^2 - 5B^6 = 4$ が得られる。

(ii) $d \equiv 0 \pmod{8}$ のとき，$i = \sqrt{-1} \notin K_1$ かつ $i \in K_2 \subset K_{10}$ である。従って $K_1(i, \zeta_5)$ が K_{10} に含まれる K_1 上の8次の拡大体となり，(4)より $i'\varphi^*(\omega)$ は実単数であるから $i'\varphi^*(\omega) \in Q(j(\omega), \sqrt{-d}, \sqrt{5})$ が得

られる。故に(i)の場合と同様にして，$i^{-1}\varphi^*(\omega)=\frac{A+B^3\sqrt{5}}{2}$ （A, B は $Q(j(\omega),\sqrt{-d})$ の整数）となり $A^2-5B^6=-4$ が成り立つ。

(iii) $d=-4m$, $m\equiv 1 \pmod 4$ のとき，$i\in K_1$ である。ε_m を $Q(\sqrt{m})$ の基本単数とし，$E=\begin{cases}\varepsilon_m & (N\varepsilon_m=-1)\\ \sqrt{\varepsilon_m} & (N\varepsilon_m=1)\end{cases}$ とおくと $K(\sqrt{E})/K$ はアーベル拡大であり，$E\in K_1$, $\sqrt{E}\notin K_1$ である。従って $K_1(\sqrt{E},\zeta_5)$ は K_1 上の8次の拡大体である。また $\alpha=\frac{\sqrt{E}+i\sqrt{E}^{-1}}{1+i}$ とおくとき，$K_1(\sqrt{E})=K_1(\alpha)$ かつ $\alpha^2\equiv 1 \pmod 2$ となる。このことから導手を計算して $K_1(\sqrt{E})=K_2$ が得られ，$K_1(\sqrt{E},\zeta_5)$ が K_{10} に含まれることが判る。故に(ii)の場合と同じく $i^{-1}\varphi^*(\omega)=\frac{A+B^3\sqrt{5}}{2}$ （A, B は $Q(j(\omega),\sqrt{E})$ の整数）となり $A^2-5B^6=-4$ が成り立つ。

参考文献

[1] C. L. Siegel, Zum Beweise des Starkschen Satzes, Inventiones Math., 5 (1968), 180−191.

[2] H. Söhngen, Zur komplexen Multiplikation, Math. Ann., 111 (1935), 302−328.

[3] H. M. Stark, Values of L-functiones at s = 1. I. L-functiones for quadratic forms, Adv. in Math., 7 (1971), 301−343.