数理解析研究所講究録
第441巻 1981年 57-65

Iterated Boolean powers

早大 理工　　高橋 真

[4]に於いてR. Mansfieldは次の定理を証明している。

定理([4]) 完備ブール代数$\mathcal{B}$が$(<\kappa,\infty)$ distributive lawを満たし，完備ブール代数Aが$\mathcal{B}$に関する$<\kappa$ chain conditionを満たすとする。もしブール代数$\mathcal{B}(A)$が完備ならば，iterated Boolean ultrapower $(M^{(A)}/\mu)^{(\mathcal{B})}/\nu$ はBoolean ultrapower $M^{(\mathcal{B}(A))}/\mu\times\nu$ に同型である。但しμ,νはそれぞれA，$\mathcal{B}$上のultrafiterとする。

ここでは，$\mathcal{B}(A)$が完備という仮定は必要でないことを第一に示す。すなわち，完備ブール代数$\mathcal{B}$が$(<\kappa,\infty)$ distributive lawを満たし，完備ブール代数Aが$\mathcal{B}$に関する$<\kappa$ chain conditionを満たすならば，$\mathcal{B}(A)$は完備であることが示される。第二にここでは，$\mathcal{B}(A)$-valued structure $(M^{(A)})^{(\mathcal{B})}$を定義した後に，これが$\mathcal{B}(A)$-valued structureとして，定理と同じ仮定の下に$M^{(\mathcal{B}(A))}$と同型であることを示す。

§1 定義

$\mathcal{L}$：等号を持ち，定数記号，関数記号を持たない一階の言語.

$\mathcal{L}(I)$：$\mathcal{L}$に定数記号$\{c_i \mid i \in I\}$を導入した一階の言語.

$S(I)$：$\mathcal{L}(I)$の sentences 全体

M：$\mathcal{L}$- structure

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$：ブール代数，$\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} - \{\mathbb{0}\}$，$\mathcal{B}|b = \{a \in \mathcal{B} \mid a \leq b\}$.

$|X|$：Xの濃度

$\mathcal{B}$がλ-完備 $\Longleftrightarrow \forall X \subset \mathcal{B}\ [|X| < \lambda \Rightarrow X$の最小上界が存在する$]$

$\mathcal{B}$が完備 $\Longleftrightarrow \forall \lambda\ [\mathcal{B}$が$\lambda$-完備$]$.

$\{b_i \mid i \in I\}$が pairwise disjoint family (p.d.f.)

$\Longleftrightarrow \forall i, j\ [i \neq j \Rightarrow b_i \wedge b_j = \mathbb{0}]$.

$\{b_i \mid i \in I\}$が$\mathbb{1}$の分解

$\Longleftrightarrow \forall i, j\ [i \neq j \Rightarrow b_i \wedge b_j = \mathbb{0}]\ \&\ \bigvee_{i \in I} b_i = \mathbb{1}$.

$PDF(\mathcal{B})$：$\mathcal{B}$の p.d.f. 全体

$PART(\mathcal{B})$：$\mathcal{B}$の$\mathbb{1}$の分解全体

$N = \langle N, [\![\cdot]\!]_N \rangle$が$\mathcal{B}$-valued structure

$\Longleftrightarrow$ i) $[\![\cdot]\!]_N$は$S(N)$から$\mathcal{B}$への関数

ii) $[\![\varphi \vee \psi]\!]_N = [\![\varphi]\!]_N \vee [\![\psi]\!]_N$

$[\![\varphi \wedge \psi]\!]_N = [\![\varphi]\!]_N \wedge [\![\psi]\!]_N$

$[\![\neg \varphi]\!]_N = - [\![\varphi]\!]_N$

$$[\![\exists x\, \varphi(x)]\!]_N = \bigvee \{ [\![\varphi(c_f)]\!] \mid f \in N \}$$

$$[\![\forall x\, \varphi(x)]\!]_N = \bigwedge \{ [\![\varphi(c_f)]\!] \mid f \in N \}$$

$$[\![\text{Equality axioms}]\!] = \mathbb{1}$$

以下 $[\![\varphi(c_{f_1}, \cdots, c_{f_k})]\!]$ を $[\![\varphi(f_1, \cdots, f_k)]\!]$ と書くことにする.

N, N' : $\mathcal{B}$-valued structures

関数 $e : N \to N'$ が $\mathcal{B}$-elementary embedding

$\Leftrightarrow$ i) e : injection

ii) $[\![\varphi(f_1, \cdots, f_k)]\!]_N = [\![\varphi(e(f_1), \cdots, e(f_k))]\!]_{N'}$

$\mathcal{B}$-elementary embedding e が $\mathcal{B}$-isomorphism

$\Leftrightarrow$ e : surjection.

$N \prec_{\mathcal{B}} N' \Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$-elementary embedding $e : N \to N'$ が存在する.

$N \cong_{\mathcal{B}} N' \Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$-isomorphism $e : N \to N'$ が存在する.

$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ に関する $<\kappa$ chain condition を満たす

$\Leftrightarrow \forall p : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \, [\forall a, a' \, [p(a) \wedge p(a') = \mathbb{0} \Rightarrow a = a' \text{ or } a \wedge a' = \mathbb{0}]$

$\Rightarrow \exists \{ b_i \mid i \in I \} \subset \mathcal{B} \, [\bigvee_{i \in I} b_i = \mathbb{1} \ \& \ \forall i \in I \, [| \{ a \mid p(a) \wedge b_i > \mathbb{0} \} |]]]$

$\mathcal{B}$ が $(<\kappa, \lambda)$ distributive law を満たす

$\Leftrightarrow \forall \delta < \kappa \, \forall \{ a_{\alpha\beta} \in \mathcal{B} \mid \alpha < \delta, \beta < \lambda \} \, [\bigwedge_{\alpha < \delta} \bigvee_{\beta < \lambda} a_{\alpha\beta} = \bigvee_{f \in \lambda^\delta} \bigwedge_{\alpha < \delta} a_{\alpha f(\alpha)}]$

$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は κ-Mansfield pair である

$\Leftrightarrow$ i) $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ に関する $<\kappa$ chain condition を満たす

ii) $\mathcal{B}$ が $(<\kappa, |\mathcal{A}|)$ distributive law を満たす

§2 ブール代数 $\mathcal{B}(A)$

ここでは $\mathcal{B}$ は完備とする．

ブール代数 $\mathcal{B}(A)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{B}(A) = \{f \in \mathcal{B}^{A} \mid \{f(a) \mid a \in A\} \in \mathrm{PART}(\mathcal{B})\},$$

$$f \vee g\ (a) = \bigvee\{f(b_1) \wedge g(b_2) \mid b_1 \vee b_2 = a\},$$

$$f \wedge g\ (a) = \bigwedge\{f(b_1) \wedge g(b_2) \mid b_1 \wedge b_2 = a\},$$

$$\sim f\ (a) = f(\sim a).$$

次の lemmas 1－4 は有用である。(Mansfield [4] を見よ。)

lemma 1　$\{b_i \mid i \in I\} \in \mathrm{PART}(\mathcal{B})$, $\{f_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{B}(A)$ とする。このとき，任意の $i \in I$ に対し $\bigvee\{f(a) \wedge f_i(a) \mid a \in A\} \geqq b_i$ となる $f \in \mathcal{B}(A)$ が存在する。又，この f は一意的に決まるので，$\sum_{i\in I} b_i \cdot f_i$ 又は $\sum_i b_i \cdot f_i$ と書くことにする。

lemma 2　(i)　任意の $f \in \mathcal{B}(A)$ に対し，$f = \sum_{a\in A} f(a) \cdot a^*$.

但し $a^*(c) = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{if } c = a, \\ \mathbb{0} & \text{otherwise} \end{cases}$ とする。

ii)　任意の $a \in A$ に対し　$\sum_i b_i \cdot a_i^*\ (a) = \bigvee\{b_i \mid a_i = a\}$.

lemma 3　(i)　$\sum_i b_i \cdot a_i^* \vee \sum_j t_j \cdot s_j^* = \sum_{i,j} (b_i \wedge t_j) \cdot (a_i \vee s_j)^*$,

$\sum_i b_i \cdot a_i^* \wedge \sum_j t_j \cdot s_j^* = \sum_{i,j} (b_i \wedge t_j) \cdot (a_i \wedge s_j)^*$,

$\sim \sum_i b_i \cdot a_i^* = \sum_i b_i \cdot (\sim a_i)^*$.

(ii)　$\{a_{ij} \mid j \in J\}$ $(i \in I)$ が最小上界を持つとすると，$\sum_i b_i \cdot (\bigvee_j a_{ij})^*$ は $\{\sum_i b_i \cdot a_{ij}^* \mid j \in J\}$ の最小上界である。

lemma 4　$f_1 \wedge f_2 = \mathbb{0}^*$ とする。$f_1(a_1) \wedge f_2(a_2) > \mathbb{0}$ ならば $a_1 \wedge a_2 = \mathbb{0}$ である。

lemma 5 (folklore)　任意の $\{a_\alpha \mid \alpha < \delta\} \in PDF(A)$ $(\delta < \lambda)$ が最小上界を持つならば，A は λ－完備である。

proof)　A は λ－完備でないとする。$\delta_0 = \sup\{\delta \mid A$ は δ－完備$\}$ とおくと，仮定より $\delta_0 < \lambda$．又，δ_0 の定義より，最小上界を持たない $\{a_\alpha \mid \alpha < \delta_0\}$ が存在する。今 $\{b_\alpha \mid \alpha < \delta_0\} \in PDF(A)$ を $b_\alpha = a_\alpha \wedge \sim \bigvee_{\beta < \alpha} a_\beta$ $(\alpha < \delta_0)$ により定義する。仮定より $\bigvee_{\beta < \alpha} a_\beta$ は存在する。又，$\{b_\alpha \mid \alpha < \delta_0\} \in PDF(A)$ は条件より最小上界 $\bigvee_{\alpha < \delta_0} b_\alpha$ を持つ。しかし，これは $\{a_\alpha \mid \alpha < \delta_0\}$ の最小上界になっており仮定に反する。従って A は λ－完備である。$\dashv$

定理6　A を λ－完備とする。(A, B) が κ－Mansfield pair ならば $B(A)$ は λ－完備である。

proof)　lemma 5 より $\{f_\alpha \mid \alpha < \delta\} \in PDF(B(A))$ $(\delta < \lambda)$ に最小上界が存在することを証明すれば十分である。関数 $P : A \longrightarrow B$ を $P(a) = \bigvee\{f_\alpha(a) \mid \alpha < \delta\}$ により定義する。$P(a) \wedge P(a') > \mathbb{0}$ で $a \neq a'$ とする。$f_\alpha(a) \wedge f_\beta(a') > \mathbb{0}$ となる $\alpha, \beta < \delta$ $(\alpha \neq \beta)$ が存在する。従って lemma 4 より $a \wedge a' = \mathbb{0}$ である。A は B に関する $<\kappa$ chain condition を満たすから $\bigvee_{i \in I} b_i = \mathbb{1}$ で $|\{a \mid P(a) \wedge b_i > \mathbb{0}\}| < \kappa$ となる $\{b_i \mid i \in I\} \subset B$ が存在する。任意の $i \in I$ と $a \in A^+$ に対し $X_a = \{b_i \wedge f_\alpha(a) \mid \alpha < \delta\} \cup \{b_i \wedge \sim P(a)\} \in PART(B \mid b_i)$ とおく。

$|\{X_a \mid a\in\mathcal{A}^+\}|<\kappa$ かつ $\bigwedge_{a\in\mathcal{A}^+}\bigvee X_a=b_i$ である。$(<\kappa, |\mathcal{A}|)$-distributive law より $b_i=\bigvee\{\bigwedge_{a\in\mathcal{A}^+}\rho(a) \mid \rho\in\prod_{a\in\mathcal{A}^+}X_a\}$ である。$b_{i,\rho}=\bigwedge_{a\in\mathcal{A}^+}\rho(a)$, $K_i=\{\rho\in\prod_{a\in\mathcal{A}^+}X_a \mid b_{i,\rho}>\mathbb{0}\}$ とおく。この時 $f_\alpha(a)\wedge b_{i,\rho}>\mathbb{0} \iff \forall_{i\in I,\, \rho\in K_i,\, a\in\mathcal{A}^+,\, \alpha<\delta}[b_{i,\rho}\le f_\alpha(a)]$ となる。又、この事より $f_\alpha(\mathbb{0})\wedge b_{i,\rho}>\mathbb{0} \iff \forall_{i\in I,\, \rho\in K_i,\, \alpha<\delta}[b_{i,\rho}\le f_\alpha(\mathbb{0})]$ を得る。従って $\bigvee_{a\in\mathcal{A}}f_\alpha(a)=\mathbb{1}$ より、任意の $i\in I,\rho\in K_i,\alpha<\delta$ に対し $\{a \mid f_\alpha(a)\wedge b_{i,\rho}>\mathbb{0}\}\neq\phi$. 従って任意の $i\in I,\rho\in K_i,\alpha<\delta$ に対し $b_{i,\rho}\le f_\alpha(a)$ となる a が存在する. 又, $a\neq a'$ ならば $f_\alpha(a)\wedge f_\alpha(a')=\mathbb{0}$ であるから、その様な a は一意的に定まる。$g_{i,\rho}(\alpha)$ をこの a とする。この時 $\bigvee_{i\in I}\bigvee_{\rho\in K_i}\bigvee_{\alpha<\delta}f_\alpha(g_{i,\rho}(\alpha))\ge\bigvee_{i\in I}\bigvee_{\rho\in K_i}b_{i,\rho}\ge\bigvee_{i\in I}b_i=\mathbb{1}$ であるから $\bigvee_{\rho\in\mathcal{A}^\delta}\bigwedge_{\alpha<\delta}f_\alpha(\rho(\alpha))=\mathbb{1}$ となる。次に $f\in\mathcal{B}(\mathcal{A})$ を

$f=\sum_{\rho\in\mathcal{A}^\delta}\bigwedge_{\alpha<\delta}f_\alpha(\rho(\alpha))\cdot(\bigvee_{\alpha<\delta}\rho(\alpha))^*$ により定義すると、

$f_\alpha(a)=f_\alpha(a)\wedge\bigvee_{\rho\in\mathcal{A}^\delta}\bigwedge_{\beta<\delta}f_\beta(\rho(\beta))=\bigvee_{\rho(\alpha)=a}\bigwedge_{\beta<\delta}f_\beta(\rho(\beta))$

$=\sum_{\rho\in\mathcal{A}^\delta}\bigwedge_{\beta<\delta}f_\beta(\rho(\beta))\cdot(\rho(\alpha))^*\ (a)$ となる。従って、

$f_\alpha=\sum_{\rho\in\mathcal{A}^\delta}\bigwedge_{\beta<\delta}f_\beta(\rho(\beta))\cdot\rho(\alpha)^*$ である。lemma 3 (ii) より

$$f=\sum_{\rho\in\mathcal{A}^\delta}\bigwedge_{\beta<\delta}f_\beta(\rho(\beta))\cdot(\bigvee_{\alpha<\delta}\rho(\alpha))^*$$
$$=\bigvee_{\alpha<\delta}\sum_{\rho\in\mathcal{A}^\delta}\bigwedge_{\beta<\delta}f_\beta(\rho(\beta))\cdot(\rho(\alpha))^*$$
$$=\bigvee_{\alpha<\delta}f_\alpha.$$

従って $\{f_\alpha \mid \alpha<\delta\}$ は最小上界 f を持つ。よって $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ は λ-完備である。$\dashv$

ブール代数値の集合論では $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ は次の様に定義できる。

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = (\check{\mathcal{A}})^{\wedge} = \{f \in V^{(\mathcal{B})} \mid [\![f \in \check{\mathcal{A}}]\!]^{V(\mathcal{B})} = \mathbb{1}\}.$$

Solovay-Tennenbaum [6] の中の lemma より $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ が完備 $\Longleftrightarrow$ $[\![\check{\mathcal{A}}$ が完備$]\!] = \mathbb{1}$ であることが言える。従って次の Corollary を得る。

Corollary 7 $\mathcal{A}$を完備とする。$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が κ-Mansfield pair ならば、$[\![\check{\mathcal{A}}$ は完備である$]\!] = \mathbb{1}$ となる。

§3 Iterated Boolean powers

ここでは $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 共に完備とする。

M の $\mathcal{A}$ による Boolean power $M^{(\mathcal{A})}$ は次の様に定義される。

$$M^{(\mathcal{A})} = \{f \in \mathcal{A}^M \mid \{f(m) \mid m \in M\} \in PART(\mathcal{A})\},$$

$$[\![\varphi(f_1, \cdots, f_k)]\!] = \bigvee \{f_1(m_1) \wedge \cdots \wedge f_k(m_k) \mid M \models \varphi(m_1, \cdots, m_k)\}.$$

又、$M^{(\mathcal{A})}$ の $\mathcal{B}$ による iterated Boolean power $(M^{(\mathcal{A})})^{(\mathcal{B})}$ は次の様に定義される。

$$(M^{(\mathcal{A})})^{(\mathcal{B})} = \{F \in \mathcal{B}^{M^{(\mathcal{A})}} \mid \{F(f) \mid f \in M^{(\mathcal{A})}\} \in PART(\mathcal{B})\},$$

$$\| \varphi(F_1, \cdots, F_k) \| = \textstyle\sum_{f_1, \cdots, f_k} (F_1(f_1) \wedge \cdots \wedge F_k(f_k)) \cdot [\![\varphi(f_1, \cdots, f_k)]\!]^*.$$

定理8 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ が完備ならば $(M^{(\mathcal{A})})^{(\mathcal{B})} \prec_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} M^{(\mathcal{B}(\mathcal{A}))}$ である。

proof) 関数 $e : (M^{(\mathcal{A})})^{(\mathcal{B})} \longrightarrow M^{(\mathcal{B}(\mathcal{A}))}$ を $e(F)(m) = \sum_{f \in M^{(\mathcal{A})}} F(f) \cdot f(m)^*$ ($F \in (M^{(\mathcal{A})})^{(\mathcal{B})}, m \in M$) により定義する。$m \neq n$ とすると、

$$e(F)(m) \wedge e(F)(n) = \textstyle\sum_f F(f) \cdot f(m)^* \wedge \sum_g F(g) \cdot g(n)^*$$

$$= \Sigma_{f,g} (F(f) \wedge F(g)) \cdot (f(m) \wedge g(n))^*$$
$$= \Sigma_f \ F(f) \cdot (f(m) \wedge f(n))^*$$
$$= \Sigma_f \ F(f) \cdot \mathbb{0}^*$$
$$= \mathbb{0}^*$$

更に $\bigvee_{m \in M} e(F)(m) = \bigvee_{m \in M} \Sigma_f F(f) \cdot (f(m))^* = \Sigma_f F(f) \cdot (\bigvee_{m \in M} f(m))^* = \Sigma_f F(f) \cdot \mathbb{1}^* = \mathbb{1}^*$

であるから，$e(F) \in M^{(\mathcal{B}(A))}$である。

又，$\|\varphi(F_1, \cdots, F_k)\| = \Sigma_{f_1, \cdots, f_k} (\bigwedge_{l=1}^k F_l(f_l)) \cdot [\![\varphi(f_1, \cdots, f_k)]\!]^*$

$$= \Sigma_{f_1, \cdots, f_k} (\bigwedge_{l=1}^k F_l(f_l)) \cdot (\bigvee_{M \models \varphi(m_1, \cdots, m_k)} \bigwedge_{l=1}^k f_l(m_l))^*$$
$$= \bigvee_{M \models \varphi(m_1, \cdots, m_k)} \Sigma_{f_1, \cdots, f_k} (\bigwedge_{l=1}^k F_l(f_l)) \cdot (\bigwedge_{l=1}^k f_l(m_l))^*$$
$$= \bigvee_{M \models \varphi(m_1, \cdots, m_k)} \bigwedge_{l=1}^k \Sigma_{f_l} F_l(f_l) \cdot (f_l(m_l))^*$$
$$= \bigvee_{M \models \varphi(m_1, \cdots, m_k)} \bigwedge_{l=1}^k e(F_l)(m_l)$$
$$= [\![\varphi(e(F_1), \cdots, e(F_k))]\!].$$

従って e は $\mathcal{B}(A)$-elementary embedding である。⊣

次に iterated Boolean ultrapowers についての Mansfield の定理と同様の定理を証明する。

定理 9　$(A, \mathcal{B})$ が k-Mansfield pair ならば

$$(M^{(A)})^{(\mathcal{B})} \simeq_{\mathcal{B}(A)} M^{(\mathcal{B}(A))}$$

proof)　$e : (M^{(A)})^{(\mathcal{B})} \longrightarrow M^{(\mathcal{B}(A))}$ を定理 8 の証明で構成した関数とする。定理 6 及び 8 より，e が surjection であることを示せば十分である。$p \in M^{(\mathcal{B}(A))}$ とする。$F_p \in (M^{(A)})^{(\mathcal{B})}$ を $F_p(f) = \bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m))$ により定義する。$f \neq g$ とすると，

$F_p(f) \wedge F_p(g) = \mathbb{0}$ である。$\{p(m) \mid m \in M\} \in PART(\mathcal{B}(A))$ であるから

定理6の証明より，$\bigvee_{f \in A^M} \bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = \mathbb{1}$ かつ

$p(m) = \sum_{f \in A^M} (\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m))) \cdot f(m)^*$ を得る。lemma 4 より，

$\{f(m) \mid m \in M\} \in PDF(A)$ ならば $\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = \mathbb{0}$ である。又，

$\bigvee_{m \in M} p(m) = \sum_f (\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m))) \cdot (\bigvee_{m \in M} f(m))^* = \mathbb{1}^*$ より，

$\{f(m) \mid m \in M\} \in PDF(A)$ だが $\{f(m) \mid m \in M\} \notin PART(A)$ ならば

$\bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = \mathbb{0}$ である。従って $\bigvee_{f \in M^{(A)}} \bigwedge_{m \in M} p(m)(f(m)) = \bigvee_{f \in M^{(A)}} F_p(f) = \mathbb{1}$

となるから，$F_p \in (M^{(A)})^{(\mathcal{B})}$ である。ところで

$e(F_p)(m) = \sum_{f \in M^{(A)}} F_p(f) \cdot f(m)^* = p(m)$ より $e(F_p) = p$.

よって e は surjection である ⊣

References

[1] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model theory, North Holland, 1973

[2] P. R. Halmos, Lectures on Boolean algebras, Van Nostrand, 1963

[3] B. Koppelberg and S. Koppelberg, A Boolean ultrapower which is not an ultrapower, J. Symb. Logic 41 (1976) pp 245-249

[4] R. Mansfield, The theory of Boolean ultrapowers, Ann. Math. Logic 2 (1971) pp 297-323

[5] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer Verlag 1964

[6] R. M. Solovay and S. Tennenbaum, Iterated Cohen extension and Souslin's problem, Ann. Math. 94 (1971) pp 201-245