数理解析研究所講究録
第441巻 1981年 93-115

直観論的理論とトポス

九大 理　上江洲 忠弘

高階直観論理とトポスとの関係は，M.P. Fourman (1977)，A. Boileau & A. Joyal (1981) 等によって明らかにされている．ここでは，彼らのように，高階直観論理の体系を考えることなく，Lawvere流の“理論”の観点から，直観論的理論とトポスとの関係を論ずる．

1．圏に於ける変数

この章で導入される記法や結果は，次章以下で断りなしに用いる．

Cを有限積を持つ圏とし，Vを変数の集まり，$^{\#}$を変数にCの対象を対応させる対応関係とする．変数xに対応するCの対象$x^{\#}$をxの変域と呼ぶ．

Vの各有限部分集合$\{x_1, \ldots, x_m\}$に対し，新しい対象

$\overline{\{x_1,\dots,x_n\}}$ を，$x_1^\#,\dots,x_m^\#$ の C に於ける積と同形になるように，C に添加する．このようにして得られる，圏 C の拡張 $\overline{C}$ を，V，$\#$ に関する C 上の変数系という．

変数 $x_1,\dots,x_m$ に対し，$x_1^\#,\dots,x_m^\#$ の C に於ける積を $x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#$ で表し，添加された対象 $\overline{\{x_1,\dots,x_m\}}$ から積 $x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#$ への同形射を $(x_1,\dots,x_m):\overline{\{x_1,\dots,x_m\}}\to x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#$ で表す．また，射影は $x_i:\overline{\{x_1,\dots,x_m\}}\longrightarrow x_i^\#$ で表す．更に逆射は $(x_1,\dots,x_m)^{\leftarrow}: x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\longrightarrow\overline{\{x_1,\dots,x_m\}}$ で表す．

X が V の有限部分集合，A が圏 C の対象のとき，変数系 $\overline{C}$ の射 $\mathfrak{f}:\overline{X}\longrightarrow A$ を C 上の $v\to$射と呼ぶ．$x\in X$ のとき x は $\mathfrak{f}$ に含まれるという．

X，Y が共に V の有限部分集合で，$X\subseteq Y$ のとき，$X:\overline{Y}\longrightarrow\overline{X}$ で次の図を可換にする $\overline{C}$ の射を表す．

$$\begin{tikzcd}
\overline{Y} \arrow[d, "X"'] \arrow[dr, "x"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(x\in X)"] & \\
\overline{X} \arrow[r, "x"'] & x^\#
\end{tikzcd}$$

$v\to$射 $\mathfrak{f}:\overline{X}\to A$，$\mathfrak{g}:\overline{Y}\to A$ に対し，$\mathfrak{f}\doteq\mathfrak{g}$ で次の図が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
\overline{X\cup Y} \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "X"'] & \overline{Y} \arrow[d, "\mathfrak{g}"] \\
\overline{X} \arrow[r, "\mathfrak{f}"'] & A
\end{tikzcd}$$

v→射　$g_1:\overline{Y_1}\to A_1, \dots, g_n:\overline{Y_n}\to A_n$ に対し，

$$(g_1,\dots,g_n):\overline{Y_1\cup\cdots\cup Y_n}\longrightarrow A_1\times\cdots\times A_n$$

で次の図を可換にする射を表す．

$$\begin{tikzcd}
\overline{Y_1\cup\cdots\cup Y_n} \arrow[r, "Y_i"] \arrow[d, "{(g_1,\dots,g_n)}"'] \arrow[dr, phantom, "{(i=1,\dots,n)}"] & \overline{Y_i} \arrow[d, "g_i"] \\
A_1\times\cdots\times A_n \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i
\end{tikzcd}$$

また，$y_1^\# = A_1, \dots, y_n^\# = A_n$ のとき

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix}$$

を<u>代入</u>といい，v→射

$$(x_1,\dots,x_m,y_{i_1},\dots,y_{i_k}):\overline{\{x_1,\dots,x_m,y_{i_1},\dots,y_{i_k}\}}\to x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\times y_{i_1}^\#\times\cdots\times y_{i_k}^\#$$

に対し，

$$(x_1,\dots,x_m,y_{i_1},\dots,y_{i_k})\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix}$$

は v→射

$$(x_1,\dots,x_m,g_{i_1},\dots,g_{i_k}):\overline{\{x_1,\dots,x_m\}\cup Y_{i_1}\cup\cdots\cup Y_{i_k}}\to x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\times y_{i_1}^\#\times\cdots\times y_{i_k}^\#$$

を表す．但し，$1\leqq i_1,\dots,i_k\leqq n$ で，$x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n$ は互に異なる．

互に異なる変数 $y_1,\dots,y_n$ と，C の対象 A に対し，冪 $A^{y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#}$ が C にあるとき，v→射 $f:\overline{X}\to A$ に対し

$$y_1\cdots y_n\mathbf{f} : \overline{X-\{y_1,\dots,y_n\}} \longrightarrow A^{y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#}$$

で，次の図を可換にするv→射を表す．

$$\begin{tikzcd}
\overline{\{y_1,\dots,y_n\}\cup X} \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "{(y_1,\dots,y_n,\, y_1\cdots y_n\mathbf{f})}"'] & \overline{X} \arrow[d, "\mathbf{f}"] \\
y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#\times A^{y_1^\#\times\cdots\times y_n^\#} \arrow[r, "ev"'] & A
\end{tikzcd}$$

このv→射 $y_1\cdots y_n\mathbf{f}$ を $\mathbf{f}$ からの $y_1,\dots,y_n$ に関する<u>アブストラクト</u>という．

v→射 $\mathbf{f}:\overline{X}\longrightarrow A$ と，変数の集合 $\{y_1,\dots,y_n\}$ に対し，$X\subseteq\{y_1,\dots,y_n\}$ のとき，$\lambda y_1\cdots y_n.\mathbf{f} : y_1^\#\times\cdots\times y_n^\# \longrightarrow A$ で次のような合成射を表す．

$$\begin{tikzcd}
y_1^\#\times\cdots\times y_n^\# \arrow[r, "\lambda y_1\cdots y_n.\mathbf{f}"] \arrow[d, "{(y_1,\dots,y_n)\times}"'] & A \\
\overline{\{y_1,\dots,y_n\}} \arrow[r, "\times"'] & \overline{X} \arrow[u, "\mathbf{f}"']
\end{tikzcd}$$

<u>命題</u>　(1)　v→射 $\mathbf{f}:\overline{\{x_1,\dots,x_m\}}\longrightarrow A$ に対し，$f(x_1,\dots,x_m)=\mathbf{f}$ なる射 $f: x_1^\#\times\cdots\times x_m^\#\longrightarrow A$ が一意に存在する．

(2)　$1,\dots,m$ の置換 $i_1,\dots,i_m$ と，射 $g: x_{i_1}^\#\times\cdots\times x_{i_m}^\#\longrightarrow A$ に対し，$f(x_1,\dots,x_m)=g(x_{i_1},\dots,x_{i_m})$ なる射が一意に存在する．

(3)　$\mathfrak{g}_1 \doteq \mathfrak{g}_1'$, …, $\mathfrak{g}_n \doteq \mathfrak{g}_n'$　ならば　$(\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n) \doteq (\mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_n')$.
特に，$(\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n)$ と $(\mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_n')$ との定義域が同じならば，
$(\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n) = (\mathfrak{g}_1', \dots, \mathfrak{g}_n')$.

(4)　$\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{g}_1 \doteq \mathfrak{g}_1'$, …, $\mathfrak{g}_n \doteq \mathfrak{g}_n'$　ならば，

$$\mathfrak{f}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_n \end{pmatrix} \doteq \mathfrak{f}'\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{g}_1' & & \mathfrak{g}_n' \end{pmatrix}.$$

(5)　$\{y_1, \dots, y_n\} - \{x_1, \dots, x_m\} = \{y_1, \dots, y_k\}$　ならば

$$\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{h}_1 & & \mathfrak{h}_n \end{pmatrix} = \mathfrak{f}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m & y_1 & \cdots & y_k \\ \mathfrak{g}_1\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{h}_1 & & \mathfrak{h}_n \end{pmatrix} & & \mathfrak{g}_m\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{h}_1 & & \mathfrak{h}_n \end{pmatrix} & \mathfrak{h}_1 & & \mathfrak{h}_k \end{pmatrix}.$$

(6)
$$y_1 \cdots y_n \, ev(y_1, \dots, y_n, x) = x .$$

(7)
$$ev(\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n, y_1 \cdots y_n \mathfrak{f}) \doteq \mathfrak{f}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_n \end{pmatrix}.$$

(8)
$$y_1 \cdots y_n \mathfrak{f} = z_1 \cdots z_n \left(\mathfrak{f}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ z_1 & & z_n \end{pmatrix}\right),$$

但し，$y_1^{\#} = z_1^{\#}$, …, $y_n^{\#} = z_n^{\#}$，また，$z_1, \dots, z_n$ は $y_1 \cdots y_n \mathfrak{f}$ に含まれない．

(9)　$x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ が互に異なり，$y_1, \dots, y_n$ が，$\mathfrak{g}_1$, …, $\mathfrak{g}_m$ のどれにも含まれないならば，

$$(y_1 \cdots y_n \mathfrak{f})\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_m \end{pmatrix} = y_1 \cdots y_n \left(\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \\ \mathfrak{g}_1 & & \mathfrak{g}_m \end{pmatrix}\right).$$

(10)　$\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{f}'$　ならば　$y_1 \cdots y_n \mathfrak{f} \doteq y_1 \cdots y_n \mathfrak{f}'$.

(11) g を射影 $X : \overline{X \cup \{y_1, \ldots, y_n\}} \longrightarrow \overline{X}$ と射 $f : \overline{X} \longrightarrow A$ との合成，g' を射影 $X' : \overline{X' \cup \{y_1, \ldots, y_n\}} \longrightarrow \overline{X'}$ と射 $f' : \overline{X'} \longrightarrow A$ との合成とするとき，$y_1 \cdots y_n f \doteq y_1 \cdots y_n f'$ ならば $g \doteq g'$.

定理 $F : C_1 \to C_2$ を関手，$\overline{C_1}$ を V_1，$^{\#}$ に関する C_1 上の変数系，$\overline{C_2}$ を V_2，$^{\#\#}$ に関する C_2 上の変数系とする．更に，$V_1 \subseteq V_2$，で V_1 の各変数 x に対し，$F(x^{\#}) = x^{\#\#}$ とする．このとき，F を，V_1 の各有限部分集合 X に対し，$F(\overline{X}) = \overline{X}$ となるように，$\overline{C_1}$ から $\overline{C_2}$ への関手に拡張すると，

(1)
$$F\left(f\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ g_1 & & g_n \end{pmatrix}\right) = F(f)\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ F(g_1) & & F(g_n) \end{pmatrix},$$

(2)
$$F(y_1 \cdots y_n f) = y_1 \cdots y_n F(f).$$

2．理論

クラス Σ に対し，Σ^* で Σ の元の有限列（空も含む）の全体を表し，$\Sigma \wr \Sigma^+$ で $\sigma^{\sigma_1 \cdots \sigma_n}$ （$\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$；$n = 1, 2, \cdots$）なる図形の全体を表す．

クラス Σ，及び $\Sigma \wr \Sigma^+$ の部分クラス Φ に対し，次の条件をみたす圏を（Σ，Φ）上の理論という：

(1) 対象のクラスは $(\Sigma\cup\Psi)^*$.

(2) $\Sigma\cup\Psi$ の元 $t_1,\ldots,t_n$ に対し，有限列 $t_1\cdots t_n$ は $t_1,\ldots,t_n$ の積である．射影は $\pi_i : t_1\cdots t_n \to t_i \quad (i=1,\ldots,n)$ で表す．

(3) Ψ の元 $\sigma^{\sigma_1\cdots\sigma_n}$ は σ を底，$\sigma_1\cdots\sigma_n$ を指数とする冪である．評価射は $ev : \sigma_1\cdots\sigma_n\sigma^{\sigma_1\cdots\sigma_n} \longrightarrow \sigma$ で表す．

Σ が唯1つの元だけからなり，Ψ が空集合のとき，(Σ,Ψ) 上の理論は，Lawvere の代数的理論である．

(Σ,Ψ) 上の理論Tに対し，Ψ から Σ への対応 $(\ ):\Psi\to\Sigma$ と，同形射 $CD:\psi\longrightarrow(\psi) \quad (\psi\in\Psi)$ があるとき，Tは $(\ ):\Psi\to\Sigma$ 及び $CD:\psi\to(\psi) \quad (\psi\in\Psi)$ に関して $\underline{\Psi\text{-閉}}$ であるという．$CD:\psi\to(\psi)$ の逆射を $DC:(\psi)\to\psi$ で表す．

<u>命題1</u>．$(\Sigma,\Sigma\wr\Sigma^+)$ 上の理論で，$\Sigma\wr\Sigma^+$-閉なるものは Cartesian-closed.

<u>命題2</u>．$(\ ):\Psi\to\Sigma$ 及び $CD:\psi\to(\psi) \quad (\psi\in\Psi)$ に関して Ψ-閉なる理論に於て，変数 $x_1,\ldots,x_m$ を含まない ひっ射 $\mathfrak{f},\mathfrak{g}$ に対し，$ev(x_1,\ldots,x_m,DC(\mathfrak{f})) \doteq ev(x_1,\ldots,x_m,DC(\mathfrak{g}))$

ならば $\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{g}$.

<u>証明</u>. $ev(\bar{x}, DC(\mathfrak{f})) \doteq ev(\bar{x}, DC(\mathfrak{g}))$ とする．§1 の命題の (6) と (10) より $DC(\mathfrak{f}) \doteq DC(\mathfrak{g})$．DC は同形射であるから $\mathfrak{f} \doteq \mathfrak{g}$.

<u>命題 3</u>. (Σ, Ψ) 上の理論T，対応 $(\ ) : \Psi \to \Sigma$，T の射 $CD : \sigma^{\bar{\sigma}} \longrightarrow (\sigma^{\bar{\sigma}})$，$Ap : \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \to \sigma$ $(\sigma^{\bar{\sigma}} \in \Psi)$ に対し，CD 及び Ap が次の条件をみたすとする：

(1) $Ap(\bar{x}, CD(\alpha)) = ev(\bar{x}, \alpha)$.

(2) $Ap(\bar{x}, \mathfrak{f}) = Ap(\bar{x}, \mathfrak{g})$ ならば $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$，但し $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ には $\bar{x}$ のどの変数も含まれない．

このとき，$CD : \sigma^{\bar{\sigma}} \longrightarrow (\sigma^{\bar{\sigma}})$ は同形射である．即ち，T は Ψ-閉である．

<u>証明</u>. $DC = \lambda u.\bar{x}Ap(\bar{x}, u)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
DC \circ CD(\alpha) &= \bar{x}Ap(\bar{x}, CD(\alpha)) \\
&= \bar{x}\,ev(\bar{x}, \alpha) \qquad (\because \text{条件 } (1)) \\
&= \alpha \qquad (\because \text{§1 命題 } (6)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ap(\bar{x}, CD \circ DC(u)) &= ev(\bar{x}, DC(u)) \qquad (\because \text{条件 } (1)) \\
&= Ap(\bar{x}, u) \qquad (\because \text{§1 命題 } (7)).
\end{aligned}
$$

従って，条件 (2) より $CD \circ DC(u) = u$.

(証明終)

命題3の条件(2)は，外延性公理に相当する．

3．Heyting理論と直観論的理論

Tを$(\Sigma, \Sigma\mathrm{I}\Sigma^{+})$上の理論とし，$\Omega$を$\Sigma$の元とする．更に，
$\equiv : \xi\xi \to \Omega \quad (\xi \in (\Sigma \cup \Sigma\mathrm{I}\Sigma^{+})^{*})$ をTの射とする．

以下，次のような記法を用いる：

1で$(\Sigma, \Sigma\mathrm{I}\Sigma^{+})^{*}$の空の元を表す．従って $11 = 1$．

$\mathrm{true} : 1 \to \Omega$ で $\equiv : 11 \to \Omega$ を表す．

$\Upsilon : \overline{\Phi} \to \Omega$ で $\mathrm{true}() : \overline{\Phi} \to \Omega$ を表す．ここに，$\overline{\Phi}$は，T上の変数系の，変数の空集合ϕに対して添加された対象である．

$f \equiv g$ で $\equiv(f, g)$ を表す．

射 $\wedge : \Omega\Omega \to \Omega$ を $\wedge = \lambda uv.(uv) \equiv (\Upsilon, \Upsilon)$ で定義する．

$\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}$ で $\wedge(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ を表す．

理論Tが次の条件をみたすとき，Tを<u>直観論的理論</u>という．

(I1)　Tの各対象Aに対し，

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\lambda a.(a,a)"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ AA \arrow[r, "\equiv"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

は pullback である.

(I2)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d, "{(true, true)}"'] & 1 \arrow[d, "true"] \\ \Omega\Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

は pullback である.

(I3)　2つの射 $P: A \to \Omega$ と $Q: A \to \Omega$ とに対し, もしも, どんな射 $f: B \to A$ に対しても $Pf = true_B$ と $Qf = true_B$ とが同値ならば, $P = Q$. 但し, $true_B: B \to \Omega$ は射 $B \to 1$ と射 $true: 1 \to \Omega$ との合成である.

条件 (I1), (I2), (I3) はそれぞれ次の条件と同等である:

(I1′)　2つの v→射 f, g に対して, $f \equiv g \doteq \curlyvee$ と $f \doteq g$ とは同値である.

(I2′)　2つの v→射 $\mathbb{P}: \overline{X} \to \Omega$ と $\mathbb{Q}: \overline{X} \to \Omega$ とに対して, $\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q} \doteq \curlyvee$ と $\mathbb{P} \doteq \curlyvee$ かつ $\mathbb{Q} \doteq \curlyvee$ とは同値である.

(I3′)　2つの v→射 $\mathbb{P}: \overline{X} \to \Omega$ と $\mathbb{Q}: \overline{X} \to \Omega$ とに対して, もしも, どんな代入 θ に対しても $\mathbb{P}\theta \doteq \curlyvee$ と $\mathbb{Q}\theta \doteq \curlyvee$ とが同値ならば, $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$, 但し $X \neq \phi$.

<u>命題1</u>．Tが直観的理論ならば，次のことが成り立つ．

(1)　$((f \equiv g) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{f}) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{g} = (f \equiv g) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{f}$．

(2)　$\mathbb{P} \wedge (f \equiv g) \doteq \mathbb{P}$　ならば　$\mathbb{P} \wedge (xf \equiv xg) \doteq \mathbb{P}$，但し，$x$は$\mathbb{P}$に含まれない．

(3)　$\mathbb{P} \wedge \mathbb{V} = \mathbb{P}$．

(4)　$(\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{R} = (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{R}) \wedge \mathbb{P}$．

(5)　$\mathbb{P} \wedge (\mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}) = \mathbb{P} \wedge (\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q} \equiv \mathbb{P} \wedge \mathbb{R})$．

命題1の証明のために，次の補題を用意する．

<u>補題</u>　一般の変数系に於いて，次の事が成り立つ．

(1)　x_0を変域が終対象である変数とするとき，$v\to$射 $f : \overline{\Phi} \to A$，$g : \overline{\Phi} \to A$，$h : \overline{\{x_0\}} \to A$ が $f \doteq h$ かつ $g \doteq h$ をみたせば $f = g$ である．

(2)　$f \doteq g$ で，f と g とが同じ定義域を持つ $v\to$射ならば $f = g$ である．

<u>命題1の(1)の証明</u>．x_0を変域が1の変数とし，f，g，$\mathbb{P}$の定義域をそれぞれ$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$とする．変数の集合Wを，$X \cup Y \cup (Z - \{x\}) = \phi$ のとき，$W = \{x_0\}$，そうでないとき，$W = X \cup Y \cup (Z - \{x\})$ と定める．$v\to$射 f'，g'，$\mathbb{P}'$を

それぞれ定義域が $\overline{W}$, $\overline{W}$, $\overline{W\cup Z}$ で，$\mathbb{f} \doteq \mathbb{f}'$，$\mathbb{g} \doteq \mathbb{g}'$，$\mathbb{P} \doteq \mathbb{P}'$ なるものとする．

θ を $\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \mathbb{k}_1 & \cdots & \mathbb{k}_n \end{pmatrix}$ なる代入とし，どの $y_1, \ldots, y_n$ も x とは異なるものとする．

今，$((\mathbb{f}' \equiv \mathbb{g}') \wedge \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'})\theta \doteq \mathbb{V}$ とする．条件（I 1′），（I 2′）より $\mathbb{f}'\theta = \mathbb{g}'\theta$ かつ $\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}\theta \doteq \mathbb{V}$．§1の命題の（5）と $\mathbb{f}'\theta = \mathbb{g}\theta'$ であることとから $\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}\theta = \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'}\theta$．従って，$\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}\theta \doteq \mathbb{V}$ より $\mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'}\theta \doteq \mathbb{V}$．故に，$(((\mathbb{f}' \equiv \mathbb{g}') \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}'})) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}'})\theta \doteq \mathbb{V}$.

従って，条件（I 3′）より，

$$((\mathbb{f}' \equiv \mathbb{g}') \wedge \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'})) \wedge \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'} = (\mathbb{f}' \equiv \mathbb{g}') \wedge \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}.$$

ところで，$\mathbb{f} \doteq \mathbb{f}'$，$\mathbb{g} \doteq \mathbb{g}'$，$\mathbb{P} \doteq \mathbb{P}'$ より

$$((\mathbb{f} \equiv \mathbb{g}) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}})) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}} \doteq ((\mathbb{f}' \equiv \mathbb{g}') \wedge \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'})) \wedge \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{g}'},$$

$$(\mathbb{f} \equiv \mathbb{g}) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}} \doteq (\mathbb{f}' \equiv \mathbb{g}') \wedge \mathbb{P}'\binom{x}{\mathbb{f}'}.$$

従って，$X \cup Y \cup (Z - \{x\}) = \phi$ のときは，補題の（1）より，そうでないときは，補題の（2）より，

$$((\mathbb{f} \equiv \mathbb{g}) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}})) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}} = (\mathbb{f} \equiv \mathbb{g}) \wedge \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}}.$$

（証明終）

命題1の（2）〜（5）は（1）の場合と同様にして証明できる．

理論Tが条件（I 1）及び命題1の（1）〜（5）をみたすとき，

$\mathbb{T}$を<u>Heyting理論</u>という.

<u>命題2</u>. $\mathbb{T}$がHeyting理論ならば, 次の事が成り立つ.

(1) $\mathbb{P}\wedge\mathbb{Q}=\mathbb{Q}\wedge\mathbb{P}$.

(2) $(\mathbb{P}\wedge\mathbb{Q})\wedge\mathbb{R}=\mathbb{P}\wedge(\mathbb{Q}\wedge\mathbb{R})$.

(3) $\mathbb{P}\wedge\mathbb{P}=\mathbb{P}$.

(4) 条件(I3).

値域がΩである射 $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n,\mathbb{Q}$ に対し, $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n\rightarrow\mathbb{Q}$ で $\mathbb{P}_1\wedge\cdots\wedge\mathbb{P}_n\doteqdot\mathbb{P}_1\wedge\cdots\wedge\mathbb{P}_n\wedge\mathbb{Q}$ なることを示す. また, $\models\mathbb{Q}$ で $\mathbb{Q}\doteqdot\mathbb{V}$ なることを示す.

「$\Gamma_1\rightarrow\mathbb{Q}_1$, ..., $\Gamma_n\rightarrow\mathbb{Q}_n$ ならば $\Gamma\rightarrow\mathbb{Q}$」ということを

$$\frac{\Gamma_1\rightarrow\mathbb{Q}_1\qquad\cdots\qquad\Gamma_n\rightarrow\mathbb{Q}_n}{\Gamma\rightarrow\mathbb{Q}}$$

で表す.

<u>命題3</u>. $\mathbb{T}$がHeyting理論ならば, 次の事が成り立つ.

(1) $\models\mathbb{f}\equiv\mathbb{f}$.

(2) $\mathbb{f}\equiv\mathbb{g},\ \mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}}\rightarrow\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{g}}$.

(3)
$$\frac{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n \to \mathbb{Q}}{\mathbb{P}_1\theta, \ldots, \mathbb{P}_n\theta \to \mathbb{Q}\theta},$$

但し，θは任意の代入である．

(4)
$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q}}{\Gamma' \to \mathbb{Q}'},$$

但し，$\mathbb{Q} \doteq \mathbb{Q}'$であり，また，$\Gamma$の各ひ射$\mathbb{P}$に対し，$\mathbb{P} \doteq \mathbb{P}'$となるひ射$\mathbb{P}'$が$\Gamma'$にある．更に，$\Gamma$や$\mathbb{Q}$に含まれる変数は，$\Gamma'$または$\mathbb{Q}'$に含まれる．

(5)
$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}{\Gamma \to \mathbb{R}},$$

但し，$\mathbb{Q}$に含まれる変数はΓまたは$\mathbb{R}$に含まれる．

(6)
$$\frac{\Gamma \to \mathbb{P} \qquad \Gamma \to \mathbb{Q}}{\Gamma \to \mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}}.$$

(7)
$$\frac{\mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{R}}{\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}, \qquad \frac{\mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}{\mathbb{P} \wedge \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{R}}.$$

(8)
$$\frac{\mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}, \Gamma \to \mathbb{P}}{\Gamma \to \mathbb{P} \equiv \mathbb{Q}}.$$

(9)
$$\frac{\Gamma \to f \equiv g}{\Gamma \to xf \equiv xg},$$

但し，xはΓに含まれない．

命題4. T は Heyting 理論であるとする.

(1) 次のような射 $\forall : \Omega^A \to \Omega$ が一意に存在する:

$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q}}{\Gamma \to \forall x \mathbb{Q}},$$

但し, $x^\# = A$ で, x は Γ に含まれない.

$$\frac{\mathbb{P}\binom{x}{\mathbb{f}}, \Gamma \to \mathbb{Q}}{\forall x \mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q}},$$

但し, $\mathbb{f}$ に含まれる変数は, $\forall x \mathbb{P}, \Gamma$ 又は $\mathbb{Q}$ に含まれる. また, $x^\# = A$.

(2) 次のような射 $\exists : \Omega^A \to \Omega$ が一意に存在する.

$$\frac{\Gamma \to \mathbb{Q}\binom{x}{\mathbb{f}}}{\Gamma \to \exists x \mathbb{Q}},$$

但し, $\mathbb{f}$ に含まれる変数は, Γ 又は $\exists x \mathbb{Q}$ に含まれる. また, $x^\# = A$.

$$\frac{\mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q}}{\exists x \mathbb{P}, \Gamma \to \mathbb{Q}},$$

但し, $x^\# = A$ で, x は $\Gamma, \mathbb{Q}$ に含まれない.

証明. (1) $\forall : \Omega^A \to \Omega$ を $\forall = \lambda\alpha.(\alpha \equiv x\Upsilon)$ で定義すればよい.

(2) $\supset : \Omega \times \Omega \to \Omega$ を $\supset = \lambda uv.(u \wedge v \equiv u)$ とし, $\exists : \Omega^A \to \Omega$ を $\exists = \lambda\alpha. \forall w(\forall x(ev(x, \alpha) \supset w) \supset w)$ で定義すればよい.

射 $!:\Omega^B \to \Omega^B$ を次のように定義する：

$$! = \lambda\beta.\, b\forall x(ev(x,\beta) \equiv (b \equiv x)).$$

<u>命題5</u>．Tは直観論的理論であるとする．次の図を考える．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & 1 \arrow[d, "true"] \\ A \arrow[r, "P"'] & \Omega \end{tikzcd},$$

但し，$B \in \Sigma^* - \{1\}$，AはTの任意の対象である．

(1)　図(i)がpullbackならば　$P = \lambda a.\exists b(h(b) \equiv a)$．

(2)　次の2つの条件は同等である．

(a)　$\models \exists! b\, Q(c,b)$ なる射 $Q: C\times B \to \Omega$ に対し，$\models Q(c, g(c))$ なる射 $g: C \to B$ が一意に存在する．

(b)　任意の単射 $h: B \to A$ に対し，(i)をpullbackとする射 $P: A \to \Omega$ が一意に存在する．

<u>証明</u>　(2)の(b)⇒(a)のみを示す．

射 $h: B \to \Omega^B$ を $h = \lambda x.y(y \equiv x)$ と定義する．hは単射であるから，条件(b)より，(i)をpullbackとする射 $P: \Omega^B \to \Omega$ が存在する．(1)より，$P = \lambda a.\exists b(h(b) \equiv \beta)$．$h(b) \equiv \beta = y(y\equiv b) \equiv y\, ev(y,\beta)$．命題3の(1)，(2)より，$y(y\equiv b) \equiv y\, ev(y,\beta) \to (y \equiv b) \equiv ev(y,\beta)$．従って，$\forall$の定義より，$y(y\equiv b)\equiv y\, ev(y,\beta) \to \forall y((y\equiv b) \equiv ev(y,\beta))$．また，$\forall$の

定義と，命題3の(9)より　$\forall y((y\equiv b)\equiv ev(y,\beta))\to y(y\equiv b)\equiv y\,ev(y,\beta)$.
従って，　$y(y\equiv b)\equiv y\,ev(y,\beta) = \forall y((y\equiv b)\equiv ev(y,\beta))$．故に，
$h(b)\equiv\beta = \forall y(ev(y,\beta)\equiv(b\equiv y))$．即ち，$P=\exists!$．

さて，$\models \exists! b\, Q(c,b)$ とする．可換な図

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\lambda c.bQ(c,b)"'] & & \\
& B \arrow[r] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & 1 \arrow[d, "true"] \\
& \Omega^{B} \arrow[r, "\exists!"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

より，$h(g(c)) = bQ(c,b)$ なる射 $g: C\to B$ が存在し，
$h(g(c)) = bQ(c,b)$ ならば，$(g(c)\equiv b) = Q(c,b)$ 故 $\models Q(c,g(c))$.
従って，$\models Q(c,g(c))$ なる射 $g: C\to B$ が一意に存在する．

命題6．Tは Heyting 理論であるとする．射 $P: A\to\Omega$ に対し，$P=\lambda a.\exists b(h(b)\equiv a)$ なる射 $h: B\to A$ が存在するならば，Tは直観論的理論である．

証明．条件(I3)が成り立つことを示せばよい．今，$P=\lambda a.\exists b(h(b)\equiv a)$，$Q=\lambda a.\exists c(k(c)\equiv a)$ で，任意の射 $g: D\to A$ に対し，$Pg = true_D$ と $Qg = true_D$ が同値であるとする．$Ph = true_B$ であるから $Qh = true_B$，即ち $\models\exists c(k(c)\equiv h(b))$．従って，$\exists b(h(b)\equiv a)\to\exists c(k(c)\equiv a)$．同様に，$\exists c(k(c)\equiv a)\to\exists b(h(b)\equiv a)$．従って $P=Q$.

4. 高階直観論的理論とトポス

T が Heyting（又は直観論的）理論で，対応 $(\ )\colon \Sigma\wr\Sigma^{+}\to\Sigma$ と射 $Ap\colon\bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}})\to\sigma$ $(\sigma^{\bar{\sigma}}\in\Sigma\wr\Sigma^{+})$ が条件

(C) $\quad \forall\bar{x}\,\exists!y\ ev(\bar{x},y,\alpha)\to\exists!u\,\forall\bar{x}\ ev(\bar{x},Ap(\bar{x},u),\alpha)$

をみたすとき，T を適用射 $Ap\colon\bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}})\to\sigma$ $(\sigma^{\bar{\sigma}}\in\Sigma\wr\Sigma^{+})$ をもつ高階 Heyting（又は 直観論的）理論という．

条件 (C) は次のスキーマと同等である：

$$\forall\bar{x}\,\exists!y\,\mathbb{P}\to\exists!u\,\forall\bar{x}\left(\mathbb{P}\binom{y}{Ap(\bar{x},u)}\right),$$

但し，u は $\mathbb{P}$ に含まれない．

定理 1. トポス $\mathbb{E}$ に対し，$\widetilde{\mathbb{E}}$ を次のような圏とする．

(1) $\widetilde{\mathbb{E}}$ の対象全体は $(E\cup E\wr E^{+})^{*}$，但し，E は $\mathbb{E}$ の対象全体のなすクラスである．

(2) $\mathbb{E}$ の対象 $A_1,\ldots,A_n$ に対し，列 $A_1\cdots A_n$ は $\widetilde{\mathbb{E}}$ に於て $A_1,\ldots,A_n$ の積である．但し，$n=0,1,2,\ldots$．

(3) $\mathbb{E}$ の対象 $A,A_1,\ldots,A_n$ に対し，$A^{A_1\cdots A_n}$ は $\widetilde{\mathbb{E}}$ に於て，A を底，$A_1\cdots A_n$ を指数とする冪である．$(n=1,2,\ldots)$

(4) $\mathbb{E}$ は $\widetilde{\mathbb{E}}$ の充満部分圏である．

このとき，$\widetilde{\mathbb{E}}$ は $\mathbb{E}$ と同等であり，また，$(E, E\wr E^{+})$ 上の高階直観論的理論である．かかる $\widetilde{\mathbb{E}}$ は $\mathbb{E}$ に対して一意に存在す

る.

<u>証明</u>. 明らか.

<u>定理2</u>. Tが高階Heyting理論で,

(1) $\models \exists! b\, Q(c,b)$ なる射 $Q : C \times B \to \Omega$ に対し, $\models Q(c, g(c))$ なる射 $g : C \to B$ が一意に存在し,

(2) 各射 $P : A \to \Omega$ に対し, $P = \lambda a. \exists b (h(b) \equiv a)$ なる単射 $h : B \to A$ が存在する

ならば, Tはトポスである.

<u>証明</u>. $Ap : \bar{\tau}(\sigma^{\bar{\tau}}) \to \sigma$ $(\sigma^{\bar{\tau}} \in \Sigma \wr \Sigma^{+})$ をTの適用射とする. 条件(C)より $\models \exists! u \forall \bar{x} (Ap(\bar{x}, u) \equiv ev(\bar{x}, \alpha))$. 従って, 条件(1)より, $\models \forall \bar{x} (Ap(\bar{x}, CD(\alpha)) \equiv ev(\bar{x}, \alpha))$ なる射 $CD : \sigma^{\bar{\tau}} \to (\sigma^{\bar{\tau}})$ $(\sigma^{\bar{\tau}} \in \Sigma \wr \Sigma^{+})$ が存在する. また, 条件(C)より, $\forall \bar{x} (Ap(\bar{x}, u) \equiv Ap(\bar{x}, v)) \to u \equiv v$. 従って, §2 命題1, 命題3より, Tは Cartesian-closed.

条件(2)より, §3 命題6から, Tは直観論的理論である. また, 条件(1)と§3 命題5(2)とから, 各単射 $h : B \to A$ $(B \in \Sigma^{+})$ に対し, 図(i)が pullback となるような射 $P : A \to \Omega$ が一意に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & 1 \arrow[d, "true"] \\
A \arrow[r, "P"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

条件(1),(2)より，各射 $P:A\to\Omega$ に対し，図(i)を pullback とする単射 $h:B\to A$ が存在する．

従って，true$:1\to\Omega$ は subobject classifier である．

故に，T はトポスである．

(証明終)

T が高階 Heyting 理論のとき，

$$(\exists x_1\cdots x_n)\mathbb{P} \quad で \quad v\to射 \quad \exists z_1\cdots z_n\mathbb{P}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ z_1^* & & z_n^* \end{pmatrix},$$

$$(\exists! x_1\cdots x_n)\mathbb{P} \quad で \quad v\to射 \quad \exists! z_1\cdots z_n\mathbb{P}\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ z_1^* & & z_n^* \end{pmatrix}$$

を表す．ここに，$x_1,\ldots,x_n, z_1,\ldots,z_n$ は互に異なる変数で，$z_1,\ldots,z_n$ はいずれも $\mathbb{P}$ に含まれない．また，z_i^* は，x_i の変域が Σ の元のときは z_i 自身，x_i の変域が $\Sigma L\Sigma^+$ の元の時は $\bar{u}Ap(\bar{u}, z_i)$ なるアブストラクトである．

値域が Ω の射 P, Q, G, G' に対し，

$$P(\bar{x}),\ Q(\bar{y}) \to G(\bar{x},\bar{y}) \equiv G'(\bar{x},\bar{y})$$

のとき，$G \underset{P,Q}{\frown} G'$ とする．$\underset{P,Q}{\frown}$ は同値関係である．

G を含む $\underset{P,Q}{\frown}$ に関する同値類を $\overline{G}:P\to Q$ で表す．

<u>定理3</u>. T は高階 Heyting 理論とする．$\overline{T}$ を次のような圏とする．

(1) 対象は，値域を Ω とする T の射．

(2) PからQへの射は

$$P(\bar{x}) \to (\exists!\bar{y})(G(\bar{x},\bar{y}) \wedge Q(\bar{y}))$$

なるGを含む $\widehat{P,Q}$ に関する同値類 $\overline{G}: P \to Q$.

(3) 射 $\overline{G}: P \to Q$ と射 $\overline{H}: Q \to R$ の合成は

$$\lambda\bar{x}\bar{y}.(\exists\bar{y})(G(\bar{x},\bar{y}) \wedge Q(\bar{y}) \wedge H(\bar{y},\bar{z}))$$

を含む $\widehat{P,R}$ に関する同値類.

このとき，$\overline{T}$はトポスである.

<u>証明</u>. $\overline{T}$は，定理2の条件(1)，(2)が成り立つように，Tを拡張したものであるから，明らか.

Tが高階Heyting理論で，$J: T \to \mathbb{E}$ は次の条件をみたす関手とする．但し，$\mathbb{E}$はトポスである.

(1) $\Sigma\cup\Sigma 1\Sigma^{+}$ の元 $t_1,\ldots,t_n$ に対し，$J(t_1\cdots t_n)$ は $J(t_1)$, $\ldots$, $J(t_n)$ の積で，射影 $\pi_i: t_1\cdots t_n \to t_i$ に対し，$J(\pi_i): J(t_1\cdots t_n) \to J(t_i)$ は射影である.

(2) $J(\sigma^{\sigma_1\cdots\sigma_n})$ は底$J(\sigma)$，指数 $J(\sigma_1\cdots\sigma_n)$ の冪で，評価射 $ev: \sigma_1\cdots\sigma_n\sigma^{\sigma_1\cdots\sigma_n} \to \sigma$ に対し，$J(ev): J(\sigma_1\cdots\sigma_n\sigma^{\sigma_1\cdots\sigma_n}) \to J(\sigma)$ は評価射である.

(3) $J(true): J(1) \to J(\Omega)$ は subobject classifier.

(4) 適用射 $Ap: \bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}}) \to \sigma$ に対し，$J(Ap): J(\bar{\sigma}(\sigma^{\bar{\sigma}})) \to J(\sigma)$ は評価射である.

(5)　$J(\equiv) : J(モモ) \to J(\Omega)$ は同等射である．即ち，

$$
\begin{tikzcd}
J(モ) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
J(モモ) \arrow[r, "J(\equiv)"'] & J(\Omega)
\end{tikzcd}
$$

は pullback である．

このとき，J を T の論理モデルという．

定理4．T は高階 Heyting 理論，$\overline{T}$ は定理3で定義されたトポスとする．$I : T \to \overline{T}$　を次のような関手とする．

(1)　T の各対象 A に対し，$I(A) = \mathrm{true}_A$．

(2)　T の各射　$f : A \to B$　に対し，　$I(f) = \overline{\lambda xy.\, f(x) \equiv y} : \mathrm{true}_A \to \mathrm{true}_B$.

このとき，I は T の論理モデルである．

また，T の各論理モデル　$J : T \to \mathbb{E}$　に対し，$K \circ I = J$ なる論理関手　$K : \overline{T} \to \mathbb{E}$　が，同形に関して，一意に存在する．

証明．明らか．

T_1，T_2　をそれぞれ，$(\Sigma_1, \Sigma_1 \subset \Sigma_1^+)$，$(\Sigma_2, \Sigma_2 \subset \Sigma_2^+)$ 上の高階 Heyting 理論とする．関手　$F : T_1 \to T_2$　が次の条件をみたすとき，F は H-関手であるという．

(1)　$\sigma \in \Sigma_1$　ならば　$F(\sigma) \in \Sigma_2$．

(2) $\sigma^{\bar\sigma} \in \Sigma_1 \llcorner \Sigma_1^+$ ならば $F(\sigma^{\bar\sigma}) = F(\sigma)^{F(\bar\sigma)}$.

(3) $t_1, \ldots, t_n \in \Sigma_1 \cup \Sigma_1 \llcorner \Sigma_1^+$ ならば $F(t_1 \cdots t_n) = F(t_1) \cdots F(t_n)$.

(4) $F(\equiv : \tau\tau \to \Omega) = \equiv : F(\tau\tau) \to \Omega$.

(5) $F(A_p : \bar\sigma(\sigma^{\bar\sigma}) \to \sigma) = A_p : F(\bar\sigma)(F(\sigma)^{F(\bar\sigma)}) \to F(\sigma)$.

対象を small な高階 Heyting 理論とし，射を H-関手の同形に関する同値類とする圏を HH で表す．

対象を small なトポスとし，射を論理関手の同形に関する同値類とする圏を TT で表す．

<u>定理5</u>. 定理1で定義した $\sim$ を，関手 $\sim : TT \longrightarrow HH$ に拡張し，定理3で定義した $\bar{\ }$ を，関手 $\bar{\ } : HH \to TT$ に拡張すると，$\bar{\ }$ は $\sim$ の左随伴関手である．

<u>証明</u>. 定理4より明らか．