数理解析研究所講究録
第 441 巻 1981 年 116-121

Complete Heyting Algebra の Separation Axioms

筑波大 数学系　江田勝哉

Complete Heyting Algebra (cHa) H による universe V の拡張 $V^{(H)}$ の中の cHa についての研究は Fourman - Scott, Takeuti 等によってなされている。ここでは主に V から $V^{(H)}$ へのうめ込みに関連して作られる Ha の completion についての結果を述べ、その記述のために必要な基礎概念に関係した、Ha の Separation axioms (位相空間の性質から導入したもの) についても言及する。

定義 1. L が bounded distributive lattice (BDL) とは、L が distributive lattice で最大元 $\mathbb{1}$ と最小元 $\mathbb{0}$ をもつこと。

A が Heyting algebra (Ha) とは A が BDL で $a \Rightarrow b$ がすべての a, b について存在すること。但し、$(a \Rightarrow b) \wedge a \leq b$ で $\forall x\,(a \wedge x \leq b \rightarrow x \leq a \Rightarrow b)$ が成立する。A が complete Heyting algebra (cHa) とは A が Ha で lattice として complete なこと。又 Boolean algebra を Ba, complete Boolean algebra を cBa と書く。//

定義2. L, L'をBDLとするとき. $\varphi : L \longrightarrow L'$が$\mathbb{0}, \mathbb{1}$-morphismであるとは. φが$\mathbb{0}, \mathbb{1}, \vee, \wedge$を保つ関数であること。//

<BDL's, $\mathbb{0}$-$\mathbb{1}$-morphisms>はequational categoryであるからco-productをもつ。BDL's $L_\alpha\ (\alpha \in \Lambda)$についてそれを$\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$とする。

定理1. $L_\alpha\ (\alpha \in \Lambda)$がHaならば$\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$はHa。

$L_\alpha\ (\alpha \in \Lambda)$がBaならば$\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$もBa。//

$L_\alpha\ (\alpha \in \Lambda)$がBaの場合は、Boolean Algebraのカテゴリーでのco-productと一致している事は知られている。

定義3. AがHaのとき$\overline{A}$がAのcanonical completionとはあるinjectiveな$\mathbb{0}, \mathbb{1}$-morphism $i : A \to \overline{A}$が存在して.

$\forall a \in \overline{A}\ (a = \bigvee \{ i(x) ; i(x) \leq a \ \&\ x \in A \})$

$\forall X \subseteq A\ \forall a \in A\ (a = \bigvee X \longrightarrow i(a) = \bigvee i''X)$であること。//

次のFunayamaの定理は直観主義論理の中での証明ができる。直観主義論理の中で証明できるものは. $V^{(H)}$の中で成立する。

定理2. (Funayama) AがHaのときcanonical completion $\overline{A}$は一意的に存在する。//

定理1によって、B, B'がBaなら$\overline{B \otimes B'}$はcBaであることはすぐわかる。ところで. 位相空間Xの開集合全体のなす

cHaをopen algebraと呼び、$\mathcal{O}(X)$とかく。Open algebra については次の事が成立する。

定理3. $\mathcal{O}(X\times Y)$ は $\overline{\mathcal{O}(X)\otimes\mathcal{O}(Y)}$ と同型。//

この事実に関連して、Haのseparation axiom を考察するわけであるが、それはHeyting extension に関連した事柄の後に述べる。

Heyting valued model $V^{(H)}$を Boolean extensionと同様に定義し、$[\![\ = \ ]\!]^{(H)}=\mathbb{1}$ で割ったものとする。そして、Boolean extension と同じように、$\check{x}=\{\langle \mathbb{1}\,\check{y}\rangle;\ y\in x\}$, $\hat{x}=\{y;\ [\![y\in x]\!]=\mathbb{1}\}$ とする。

定理4. HがcHa, ΩがHaとするとき$V^{(H)}$に関して、$\hat{\check{\Omega}}$は、$\overline{R(H)\otimes\Omega}$ と同型である。但し、R(H)はHのregularな元全体のなすcBa。//

系(Kunen-Scott) B, CをcBaとするとき$V^{(B)}$に関して、$\hat{\check{C}}$ は $\overline{B\otimes C}$と同型である。//

BDL Lのidealの全体$\mathcal{I}L$はcHaとなるが、このidealの全体をとる操作は、canonical completion とは異なるが一つのcompletion である。これに関して次のことが成立する。

定理5. L, L′をBDLとし、$H=\mathcal{I}L$とする。$V^{(H)}$に関して、$\widehat{\mathcal{I}\check{L}'}$は、$\mathcal{I}(L\otimes L')$及び$\overline{H\otimes\mathcal{I}L'}$ と同型である。//

位相空間Xについて、$\check{X}$に$\mathcal{O}(X)$によって位相を入れて考え

その開集合の全体を $\mathcal{O}(\check{X})$ で表わす。これは $V^{(H)}$ の中での $\widecheck{\mathcal{O}(X)}$ の一つの completion と考えられるが、これについて次が成立する。

定理6. $\widehat{\mathcal{O}(\check{X})}$ は $\overline{H\otimes \mathcal{O}(X)}$ と同型である。//

系. $H=\mathcal{O}(T)$ ならば、$\widehat{\mathcal{O}(\check{X})}$ は $\mathcal{O}(T\times X)$ と同型である。//

ところで、よく研究されている位相空間 X, T に対する X_T について $\widehat{\mathcal{O}(X_T)}$ が $\mathcal{O}(T\times X)$ に同型であることが知られている。Fourman-Scott の内化の定理によって次が成立する。

定理7. $H=\mathcal{O}(T)$ のとき、$[\![\ \mathcal{O}(X_T)$ と $\mathcal{O}(\check{X})$ が同型 $]\!]=\mathbb{1}$。//

実数全体を R、$V^{(H)}$ での実数全体を $R^{(H)}$ とすれば、$H=\mathcal{O}(T)$ のとき、$[\![\ R^{(H)}=R_T\ ]\!]=\mathbb{1}$ であるから、定理7により、$[\![\ \mathcal{O}(R^{(H)})$ と $\mathcal{O}(\check{R})$ は同型 $]\!]=\mathbb{1}$。しかし、cBa B について、$[\![\ R^{(B)}\neq\check{R}\ ]\!]=\mathbb{1}$ であれば $[\![\ \mathcal{O}(R^{(B)})$ と $\mathcal{O}(\check{R})$ は同型でない $]\!]=\mathbb{1}$ である。定理7は open algebra と cBa が $\mathcal{O}(\check{R})$ について、対照的な性質をもっていることを示している。

又、定理5の H についての条件は少し強すぎるようにも思えるが、cBa B に対しては、同様の議論により、成立しないことがわかる。

次に Ha A, A' の co-product と canonical completion について、cHa の <cHa, cH-morph.> の category での co-product

との比較をしてみる。cHa A, A' について、この意味の co-product を $A \sqcup A'$ で表わす。これについては Dowker, Strauss, Isbell Simmons 等の研究がある。今 B を atomless な cBa とすると $B \sqcup B^{\bullet}$ は Ba でない。又、一般には、$\mathcal{O}(X) \sqcup \mathcal{O}(Y)$ と $\mathcal{O}(X \times Y)$ は同型ではない。よって $A \sqcup A'$ と $\overline{A \otimes A'}$ は一般に同型でない。

彼等は、位相空間の性質を cHa に導入し、種々の研究をしている。ここでは、それを $A \otimes A'$ 及び $\overline{A}$ に適用した結果を述べる。種々の性質を lattice の性質に書き換える必要があるが、それは参考文献 [1], [2], [6], [7] 参照の事。

	$\to -$	$- \to$	$\to \otimes$	$\otimes \to$
i) normal	×		○	○
ii) Boolean generated	○	×	○	○
iii) regular	○	○	○	○
iv) fit		○		○
v) fit*		○	○	○
vi) S_2'	○	○	○	×
vii) T (T_1', conjunctive)	○	○	○	○
viii) cover regular	○	○		○
ix) compact	○	○	○	○
x) paracompact	○		×	

前頁の表は、Aが性質Pを満たすとき、$\bar{A}$もPを満たせば、→ーのところに○がついており、反例があるときは×がついている。ー→，→⊗，⊗→も同様に解釈する。但し、A⊗A'はAが元を一つしかもたない場合、元が1つのcHaとなるため、A, A'が二つ以上の元をもつHaに限って考える。

表の中で○も×も書いていないところは、まだわかっていないところであるが、とくにpara-compactnessの部分は、興味深い問題である。

参考文献

[1] Dowker-Strauss : Separation axioms for frames
In Topics in Topology (Hungary) 1972

[2] Dowker-Strauss : Sums in the category of frames
Houston J. of M. Vol. 3 No. 1 1977

[3] Fourman-Scott : Sheaves and logic
In L.N. of M. Vol. 753 Springer 1979

[4] Grayson : Heyting-valued model for intuitionistic set theory. In L.N. of M. Vol. 753 Springer

[5] Funayama : Imbedding p.o. sets into i.d.c lattice. 1956

[6] Isbell : Atomless parts of spaces. Math. Scad. 31 1972

[7] Simmons : A Frame work for Topology : In Logic Coll. '77
North-Holland P.c. 1978