数理解析研究所講究録
第 442 巻 1981 年 82-97

Graph knots の Dehn surgery

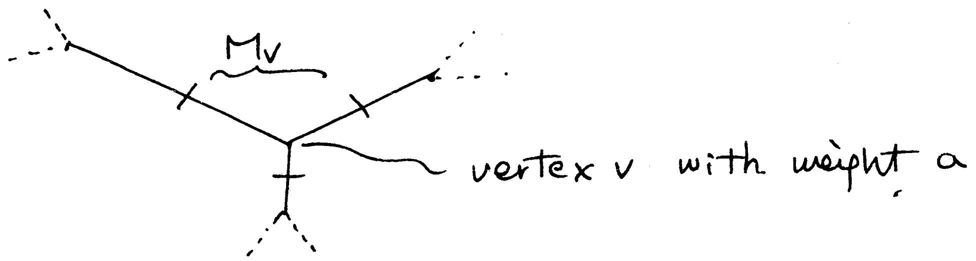
東大 理　上 正明

complement X が graph manifold (X, T) であるような knot を graph knot と呼ぶ。この時 $X-T$ の各 component は punctured S^2 上の S^1-bundle になる (cf.[3].) ので、plumbed diagram でかけることがわかる。(§2)。そこで逆に plumbed diagram で表わされる 3-manifold を、特に Seifert fibered space になる場合を中心に考えることにする。

§1. Reduced plumbed diagram

Γ: を整係数の weight をもつ graph (edge 上の weight は ± 1) とする。このとき、Γ には 4-manifold of plumbing type P_Γ が対応する。即ち weight a の vertex v には euler number a の S^2 上の D^2-bundle が、vertex v, v' を結ぶ edge e (weight of $e = \varepsilon = \pm 1$)

には、対応する2つのS^2上のD^2-bundleの(自然な向きによる) intersection number $= \varepsilon$ なる plumbing が対応する。
$M_\Gamma = \partial P_\Gamma$ とおくと、M_Γは自然に graph manifold になる。その graph structure を(M_Γ, T)とおくと、$M_\Gamma - T$の各 component の closure は punctured S^2 上の S^1-bundle であるが、その boundary component 上に次のような座標 (peripheral system) を定めておく。



vertex v with weight a に対応する piece M_v は上図の部分に相当し、その構成は次の通り。

vの valency (vから出る edge の数) を r, B_r を r-punctured S^2とする。$B_r \times S^1$のi番目の boundary component $\partial_i B_r \times S^1$ に $q_i = \partial_i B_r \times *$, $h = * \times S^1$ なる2つの loop によって座標を入れる。一方 B_rの内点の近傍 D_0^2 をとり、$\partial D_0^2 \times S^1$ の座標を、$q_0 = \partial D_0^2 \times *$ と h によって定める。(但、q_iに、$\sum_{i=0}^{r} q_i \sim 0$ in $B_r - \mathrm{int}\, B_0$ なるように向

きを入れる。その他の向きはすべて自然な向きとする。)
このとき，

$M_v \cong (B_r - \mathrm{int}\, D_0^2) \times S^1 \cup_f D^2 \times S^1$, $f: \partial D_0^2 \times S^1 \to \partial D^2 \times S^1$

は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ で表わされる homeo.（但．ここで $\partial D_0^2 \times S^1$ には $\{-q_0, h\}$ によって向きを入れる。)

また．vertices v, v' が weight ε の edge e で結ばれているときは M_v と $M_{v'}$ は $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ なる homeo $\partial_1 M_v \to \partial_1 M_{v'}$ で attach される。（ここで edge e が M_v, $M_{v'}$ のそれぞれの1番目の boundary component に対応するとした。)

以下 boundary のある graph も考え．各 boundary は ⊢— の形で表わし．対応する M_Γ の boundary component には上記の通り "canonical coordinate" $\{g, h\}$ を固定しておく。

Proposition 1. 次の(i), (ii) は同値。

(i): M^3 は．$M - T$ の各 component の closure が punctured S^2 上の S^1-bundle なる graph manifold (M, T) の構造をもつ。

(ii). ある plumbed diagram (integrally weighted graph) Γ が存在して，$M^3 \cong M_\Gamma$

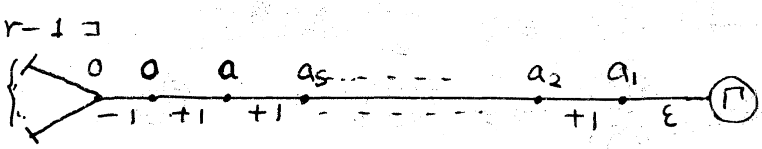
(ii)　(ii) ⇒ (i) は明らか。

(i) ⇒ (ii) は 次の事実による。

M_Γ を —Γ に対応する graph manifold.（左端の boundary は $\partial_1 M_\Gamma$ に対応するとする。）. このとき

$M = M_\Gamma \cup_g B_r\times S^1$; $g = \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} : \partial_1 B_r\times S^1 \to \partial_1 M_\Gamma$

（s, t, u, v は $sv - tu = 1$ なる整数） は次の graph で表わされる。



$$\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_2 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

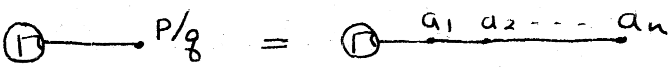
$$u/v = a_1 - 1/a_2 - 1/\cdots - 1/a_s = [a_1, a_2, \cdots, a_s].$$

$$\varepsilon = \pm 1.$$

（但. $B_r\times S^1$ が M_Γ の一部に組みこまれている場合は cycle をもつ graph として上と同様にかける。）

M_Γ は Γ の vertex の weight が有理数でも定義される。

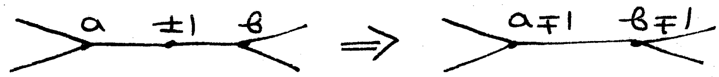
よく知られている様に,

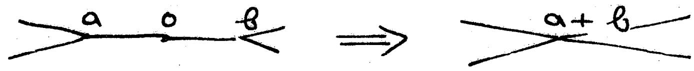


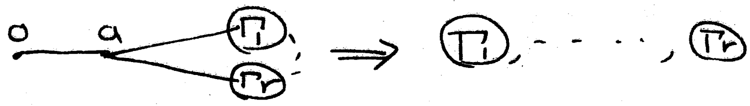
$$p/q = [a_1, a_2, \cdots, a_s]$$

そこで上記のcaseのみ簡単の為有理数のweightで表わすことにする。また特に断わりない限りgraphはtreeとする。(この時はedgeのweightによらない。)

定義. (integrally weighted) graph Γが <u>reduced</u> とは、次の3つのreduction processがこれ以上適用できないgraphをいう。

I. 

II. 

III 

上記のI〜IIIは対応するM_Γのhomeo typeをかえない。

<u>Theorem 1</u>. Γを connected reduced weighted treeとする。このとき次の2つは同値

(i). $M_\Gamma \approx$ Seifert manifold of type O_1.

(即ち、orientable Seifert manifold with an orientable orbit space.)

(ii). Γのmultiple vertex (即ちvalency $\geqq 3$ のvertex)の数は高々1。

∵ (ii)⇒(i) は明らか。(Γ reduced であることに注意)。(i)⇒(ii) は次の Lemma から従う。

Lemma. Γ: connected reduced weighted tree とする。もし、Γ の multiple vertex の数 ≧ 2 ならば、M_Γ は incompressible torus をもち、$\pi_1 M_\Gamma$ は rank 2 の free abelian group を proper subgroup にもつ。さらに $\pi_1 M_\Gamma$ は centerless。

Lemma の証明は次のように M_Γ に対する初等的考察を積み重ねて行なわれる。

1° Γ : connected reduced graph で $\partial M_\Gamma \neq \emptyset$ とする。このとき、M_Γ は irreducible.

2° Γ: 1° と同じ。さらに、$M_\Gamma \cong B^2 \times S^1$ とする。このとき、Γ は linear. (即ち multiple vertex なし。)

3° Γ: 1° と同じ。このとき、M_Γ の各 boundary component は incompressible になるか、又は M_Γ は solid torus になる。

1°, 2° は ともに Γ の multiple vertex の数に関する induction で示される。multiple vertex の数 ≦ 1 のとき

は．Seifert manifold with boundary が irreducible なること，fibered solid torus の exceptional fiber が高々 1 コなることから従う．$3°$ は $1°$, $2°$ の Corollary.

同時に次のこともわかる。

$4°$ Γ: (not necessarily reduced) connected graph

もし．M_Γ が not irreducible なら次のいずれかが成立。

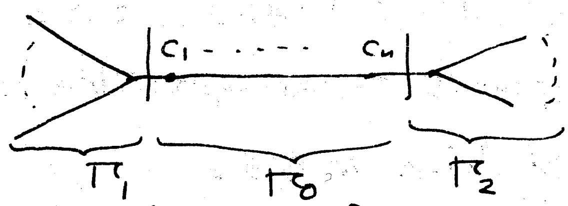
1) M_Γ は non-prime で，Γ は disconnected graph に reduce される。

2). $M_\Gamma = S^2 \times S^1$ で Γ は $\cdot^0$ に reduce される。

($4°$ は $\partial M_\Gamma = \phi$ でも $\partial M_\Gamma \neq \phi$ でもよい)

<u>Lemma の証明の outline.</u> # multiple vertices of $\Gamma = 2$ のとき示す．(一般の場合は inductive に示される。)

Γ を次のように分割。



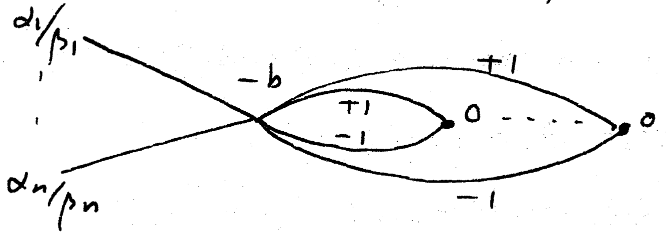
このとき．M_{Γ_1}, M_{Γ_2} は Seifert manifold with boundary. ∂M_{Γ_i} の canonical coordinate を $\{g_i, h_i\}$ とする。$(i=1, 2)$．$M_{\Gamma_0} \simeq T^2 \times I$

1°〜3°により．（Γ_1, Γ_2 に multiple vertex があるので）
$\pi_1(\partial M_{\Gamma_j}) \longrightarrow \pi_1(M_{\Gamma_j})$ は injective. しかも not onto な
$(j=1.2)$
ることが容易に示される。このとき．$\pi_1 M_\Gamma = \pi_1 M_{\Gamma_1} \underset{\mathbb{Z}^2}{*} \pi_1 M_{\Gamma_2}$．ここで amalgamated subgroup $\mathbb{Z}^2$ は $M_{\Gamma_0} \approx T^2 \times I$ に対応する homeo. $\varphi: \partial M_{\Gamma_1} \xrightarrow{\approx} \partial M_{\Gamma_2}$ と上記の inclusion から引き起こされる写像により amalgamate される。
一方 combinatorial group theory の初等的事実により．
center$(\pi_1 M_\Gamma) \cong$ center$\pi_1 M_{\Gamma_1} \cap$ center$\pi_1 M_{\Gamma_2} \cap \mathbb{Z}^2$.
（ここで $\mathbb{Z}^2$, $\pi_1 M_{\Gamma_2}$ は自然に $\pi_1 M_\Gamma$ の部分群とみなす.）.
center$(\pi_1 M_j) = \langle h_j \rangle \approx \mathbb{Z}$ $(j=1.\ 2)$ だから．center $\pi_1 M_\Gamma \neq \phi$ ならば φ は h_1 を $\pm h_2$ に写さねばならない。この時容易にわかるように．$[c_1, \cdots, c_n] = 0$. このとき Γ_0 の部分は I, II により reduce されねばならない。

Remark.1 M_Γ が lens space（$S^2 \times S^1$, S^3 を含む）のとき reduced graph が linear なることは．von Randow Wagreich, Scharf. [5]. により考察されている。但．この方法は $\pi_1 M_\Gamma$ が solvable なる Γ を決めるもので．上記の場合以外の Seifert manifold には適用できない。上記のことは

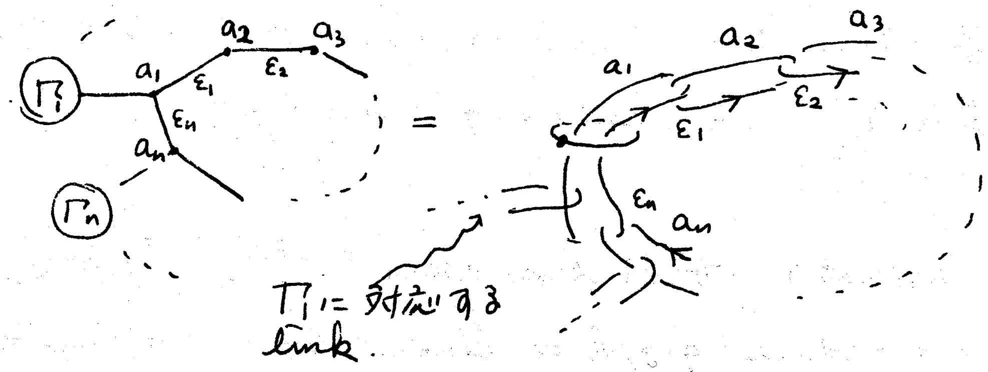
Lemmaから自然により証明される。

Remark 2. M_Γ が Seifert of type O_1 のとき、その type は orbit surface の genus $=0$ のものに限る。しかし cycle をもつ graph の場合はその限りではない。例えば $\{b, (O_1, g); (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\}$ なる Seifert manifold は次の graph でかける。



cycle は g コ.

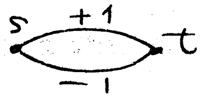
この様な cycle をもつ graph は次の process で framed link に書き直すことができる。



ε_i は、右図では linking number を表わす。

この observation により次の proposition が示される。

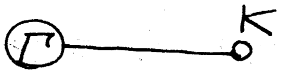
・Proposition 2. Borromean rings 上の各 component 上 $r, s, t \in \mathbb{Q}$ で Dehn surgery して得られる manifold を $B(r, s, t)$ とおく。このとき、$B(0, s, t)$ は graph manifold. $B(0, 0, t)$ は Seifert manifold で "orbit space $\approx T^2$"、exceptional fiber は高々1コ。

(∵) $B(0, s, t) =$ 

M_Γ が Seifert manifold of type n_2 (= orientable Seifert manifold with an nonorientable orbit space) の構造をもつ場合の reduced tree Γ も決定される。(weight は限らずしも一意的ではない)。これは Waldhausen の定理 [6] による。即ち、M_Γ の自然な graph structure と Seifert of type n_2 の自然な graph structure に "Waldhausen の意味の" reduction process を適用して structure を比較する。若干の例外的 case は Theorem 1 によって Γ は決定される。(詳細は略す)。

§2. graph knot の representation

Proposition 1 により graph knot $K \subset S^3$ は次のような plumbed diagram でかける。(cf. [3])



(i) Γ は tree

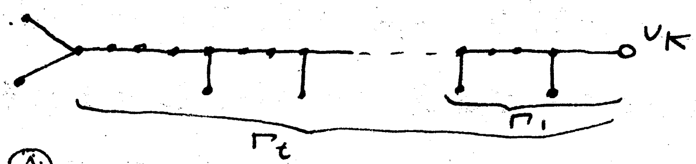
(ii) $M_\Gamma \cong S^3$。

Γ は tree だから Γ の edge の weight にはよらない。一方 K の orientation は、Γ と $\circ^K$ を結ぶ edge に weight ± 1 を与えることによって示される。

<u>Proposition 3.</u> Γ: connected graph. $M_\Gamma \cong S^3$ ならば Γ の multiple vertex に対して reduce されない linear な枝の数は高々 2 個。(cf. [3])

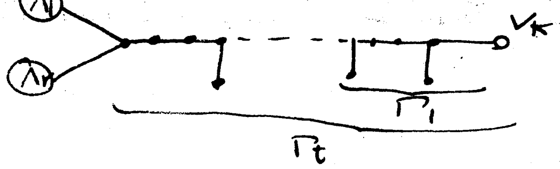
これを使って Γ—$\circ^K$ は次の様に reduce される。

(A)

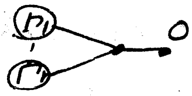


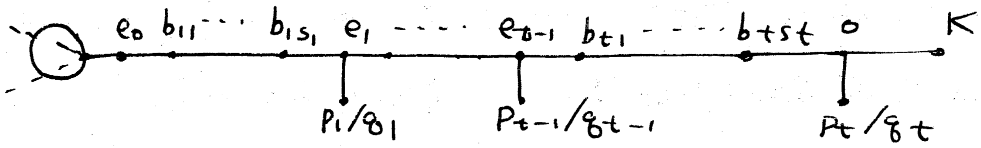
又は

(B)



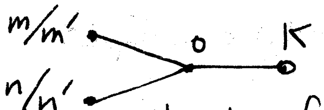
(A), (B) ともに、Γ_t は $\circ^K$ を無視すれば linear graph に reduced。(A)の場合 $\circ^K$ を無視すれば Γ は

に reduce され. (B)の場合は  に reduce される。よって特に $M_{\tilde{\Gamma}} = S^3$ (reduction III)。さらに適当な graph の変形(Kirby-Rolfsen twist に相当する)で weight を変換すると. (A), (B) ともに

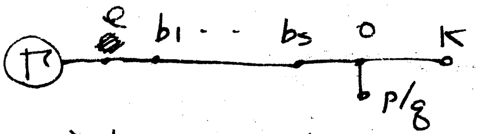


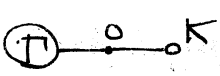
$$[b_{k1}, \cdots, b_{ks_k}, 0, p_k/q_k] = 1/e_{k-1} \quad (\forall k)$$

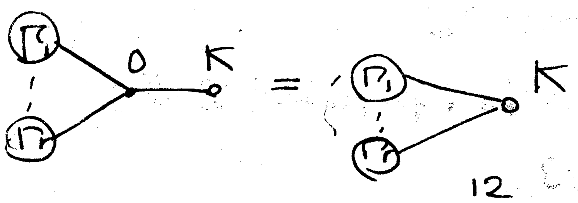
となる。次のことに注意する。(cf. [1])



$mn'+nm'=\varepsilon=\pm1$ は: Torus knot of type $(m, \varepsilon n)$



は  なる Knot の winding number $= p$. linking number $= \delta x + p\psi$ の cable knot を表わす。(但. $[b_s, \cdots b_1] = x/x'$, $xq + px' = \delta = \pm 1$. ψ は: K の真の longitude とみかけの longitude との linking number.) 勝手な cable がこの形に書けることは容易に示される。



は

knots $(T_i)\!-\!\circ^{K_i}$ の connected sum。

最後の表示は一応 edges の weight (即ち K_i の orientation) によっているが、次の事から それらは 不要であることがわかる。

次の事が知られている。(cf. [3])

★: graph knot は torus knots から出発して cabling, connected sum を有限回くり返すことによってえられる。

★は上記の様に plumbing から出発して構成的に示すこともできる。特に induction により、graph knot は invertible. 従って上の3番目の表示は edge の weight によらない。

§3. graph knot の Dehn surgery

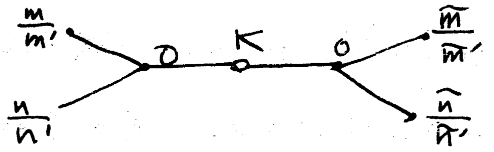
graph knot K を§2のような plumbed diagram で表わし、(1つの表示を fix). $\circ^K$ に対して適当な有理数を与えれば、K の Dehn surgery によって得られる3 manifold になる。(みかけの係数と真の surgery coefficient には§2の φ に対応してずれがある。φ は§2における standard な表示に対しては容易に計算される。)

$(\Gamma)\!-\!\!-^{p/q} = \Gamma(p/q)$ と表わす。(graph knot $(\Gamma)\!-\!\circ^K$)

Theorem 1 によって $\Gamma(p/q)$ の reduction process を調べればいつ Seifert manifold (of type Θ_1) になるかが決定される。定性的には次の事がいえる。

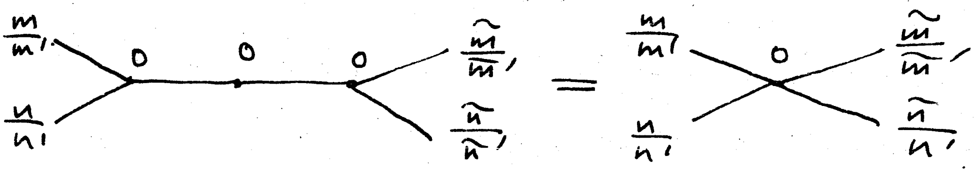
<u>Theorem. 2</u>. graph knot K 上の Dehn surgery で Seifert manifold が得られるならば、K は高々2回の iterated cable of a torus knot 又は2つの torus knot の connected sum。

より詳しく knot type surgery coefficient, 得られる Seifert manifold の type も決定可能。C. Gordon [2] により異なる方法で似た結果が得られている。iterated torus knot については簡単な計算で [2] と同じ結果が得られる。(詳しい値は [2] に譲る。) 一方、それ以外の graph knot については、Dehn surgery すると incompressible torus をもつ graph manifold が得られることが [2] で示されているが、この中で、Seifert manifold になる case が唯一種類のみ存在することが Theorem 1 を使うここでの方法でわかる。それは 2つの torus knot の connected sum の case で、得られるのは丁度4つの exceptional fiber をもつ Seifert manifold である。その graph は次の通り.



$= T(m, \varepsilon n) \# T(\tilde{m}, \tilde{\varepsilon}\tilde{n})$

得られる Seifert manifold は



Remark. Theorem 2 は Seifert manifold of type n_2 についても有効。

Remark. Fintushel と Stern による iterated torus knot の Dehn surgery で lens space が得られる場合は自然に上記の結果に含まれる。(cf.[1]) ここでの方法は[1]の方法の拡張であり，計算方法は基本的に同一である。(本質的には Theorem 1 が要なるところである。)

また同様な計算と Lemma の証明中考察した事実により，次の定理も導かれる。

Theorem 3. graph knot 上の Dehn surgery で non-prime manifold $M_1 \# \cdots \# M_r$ (M_i は $\neq S^3$ なる prime component) が得られるとする。このとき，$r \leq 2$. さらに少なくとも1つの component は lens space.

References

[1] R. Fintushel and R. J. Stern; Constructing lens spaces by surgery on knots, Math. Z 175 (1980) 33–51.

[2] C. McA. Gordon. Dehn surgery and satellite knots preprint.

[3] M. Kato. A note on graph link. (数理研講究録)

[4] L. Moser. Elementary surgery along a torus knot. Pacific. J. Math. 38 (1971) 737–745

[5] A. Scharf. Faserungen von Graphenmannigfaltigkeiten. Bonn. Math. Schriften, No. 73. (1974)

[6] F. Waldhausen, Eine klasse, von 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten I, II, Inv. Math. 3 (1967) 308-333 4. (1967) 87–117.

[7] M. Ue. Some remarks on Dehn surgery along graph knots. preprint.