数理解析研究所講究録
第 442 巻 1981 年 136-161

Surgeries and simple loops on a solid torus of genus g

筑波大数学系　金戸 武司

1. 序

この報告は，S^3 の Heegaard diagrams による基本群の表示に関する筆者の一連の仕事 [5], [6], [7], [8] の最初の動機となった問題「S^3 の genus 2 Heegaard diagrams による基本群の表示は，cyclic reduction と substitution によって，自明なもの $\langle a_1, a_2 ; a_1, a_2 \rangle$ に変形できるか？」の肯定的解決を与える。その証明は，surgery の手法と "fake Heegaard diagram の概念" に基づく。この idea の応用として，与えられた Heegaard diagram (of genus g for a 3-manifold) を pseudominimal なものに変形する algorithm の存在定理 ([15], [3]) の簡単な別証を与える。

idea の本質が明らかになるよう，以下では，実際に

得られた順序とは逆の順序で述べることにする。

2. 結果

T を genus g の solid torus (i.e. 3-ball with g 1-handles), ∂T をその境界とする。$\mathcal{M}=\{m_1,\cdots,m_g\}$ を oriented meridian disks of T の complete system (i.e. T を $\mathcal{M}$ で切り開くと 3-ball, 又 "system" は mutually disjoint set の意.) とする。∂T 上の simple loop l が normal to $\mathcal{M}$ とは，交わり $l\cap\mathcal{M}(=l\cap(m_1\cup\cdots\cup m_g))$ は transversal で，∂T の isotopy で除けるものを含まないことをいう。各 $m_i\in\mathcal{M}$ $(i=1,\cdots,g)$ に文字 a_i によるラベルを付け，l に沿って交点 $l\cap\mathcal{M}$ を読みとることによって得られる cyclic word を $W(l,\mathcal{M})$ で表わす。cyclic permutation と inversion の違いを無視すれば，$W(l,\mathcal{M})$ は一意的である。以後，cyclic word W_1, W_2 が これらの違いを無視して等しいとき，$W_1\equiv W_2$ と表わすことにする。cyclic word が cyclic に cancell する部分 $a_ia_i^{-1}$ or $a_i^{-1}a_i$ (or $a_i\cdots a_i^{-1}$, $a_i^{-1}\cdots a_i$) を含むとき，これを除く操作を cyclic reduction

という。もはや，cyclic reductionが適用できないとき，cyclically reducedという。

定理 1.（Geometric reduction）
simple loop l は normal to $\mathcal{M}$ とする。
$W(l, \mathcal{M})$ が not cyclically reduced ならば，oriented proper disks of T の system $\widehat{\mathcal{M}} = \{\hat{m}_1, \cdots, \hat{m}_k\}$ $(k \geq g)$ で次の性質(＊)をもつものを見つける algorithm が存在する：

(＊)　0) l は normal to $\widehat{\mathcal{M}}$，

1) どの $\hat{m}_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ も文字 $a_1, \cdots, a_g$ のいずれか一つによりラベルがつけられている，

2) $\widehat{\mathcal{M}}$ はその sub-system として meridian disks of T の complete system $\mathcal{M}_0 = \{\hat{m}_{i_1}, \cdots, \hat{m}_{i_g}\}$ で，各 $\hat{m}_{i_j}$ が文字 a_j $(j = 1, \cdots, g)$ をラベルにもつものを含む，

3) $W(l, \widehat{\mathcal{M}}) \equiv \widetilde{W}(l, \mathcal{M})$，ここに，$\sim$ は cyclically reduced form の意．

注．2-disk $m\ (\subset T)$ が proper とは $m \cap \partial T = \partial m$ の意．$T - m$ が connected ならば，meridian disk である．

Zieschang [15] は，Whitehead [14] の結果を用いて，次の定理を示した。これは与えられた Heegaard diagram を pseudominimal (cf. [3]) なものに変形する algorithm の存在定理を含む。定理1により，自然でより簡単な別証をうる．

系1．(Whitehead - Zieschang)
∂T 上の simple loops の任意の system $\mathcal{L} = \{l_1, \cdots, l_n\}$ に対し，meridian disks of T の complete system $\mathcal{M}$ で $\mathcal{L}$ との総交点数が最小となるものを見つける algorithm が存在する。

以下，S^3 の genus 2 Heegaard diagrams による基本群の表示について考察する．

定義．(substitution) 群表示 $\langle a_1, a_2 ; r_1, r_2 \rangle$ において，一方の relator が他方の relator に subwordとして（cyclicallyに）含まれるとき，そのsub-wordを除くことにより，relatorsの長さがより短かい表示 $\langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$ が得られる。この変形をsubstitutionといい，「$\searrow$」と書く。即ち，

$\{r_1, r_2\} \equiv \{r_1' r_2', r_2'\}$ のとき，$\langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle \searrow \langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$ 。

定理2．Dを任意の S^3 のgenus 2 Heegaard diagram，$\pi(D) = \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ をDによる基本群の表示とする。今，cyclically reduced form $\hat{\pi}(D) = \langle a_1, a_2; \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \rangle$ がnon trivial (i.e. $\neq \langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$）ならば，substitution $\hat{\pi}(D) \searrow \langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$ でそのcyclically reduced form $\langle a_1, a_2; \tilde{r}_1', \tilde{r}_2' \rangle$ が再びある S^3 のgenus 2 Heegaard diagram D′によるcyclically reducedな表示 $\hat{\pi}(D')$ になっているものが存在する。

この系として，序で述べた問題（cf. [5], [7]）の肯定的解決をうる。

系2．S^3 の任意のgenus 2 Heegaard diagram

による基本群の表示は cyclic reduction と substitution により trivial な表示 $\langle a_1, a_2 ; a_1, a_2 \rangle$ に変形できる。

注. Thurston 達によって, genus 2 Poincaré conjecture が肯定的に解決されたので, 上の系は次のような決定問題の純代数的な解決を含む:

i) 与えられた 3-manifold with genus 2 Heegaard splitting の基本群が trivial か否かの判定,

ii) 同じく上の 3-manifold が S^3 と同相か否かの判定,

iii) 与えられた 3-bridge 表現をもつ knot が trivial か否かの判定.

3. 証明

1) 定理 1 の証明

α を l の sub-arc で $W(l, m)$ の一つの cyclically cancellable part $a_i a_i^{-1}$ or $a_i^{-1} a_i$ に対応するものとする。∂m_i を α に沿って surgery すると, 二本の oriented simple loops で,

それぞれ T の proper disks m_i', m_i'' を bound するものが得られる。$\mathcal{M}$ において，m_i に代えて，m_i' と m_i'' を加えて，新しい system $\hat{\mathcal{M}}_1$ をうる。m_i' と m_i'' に同じ文字 a_i をラベルに付けると，$\mathcal{M}_1$ は条件 1)，2) を満たす。もし，$W(\ell, \mathcal{M}_1)$ が not cyclically reduced ならば，同様の手法で新しい system $\hat{\mathcal{M}}_2$ をうる。この場合，surgery によって二枚の proper disks m_i', m_i'' が一枚の proper disk m_i''' $(= m_i' \#_\alpha m_i''$，$\#_\alpha$: band sum along α) になることもあり得るが，$\mathcal{M}_2$ も又，1)，2) を満たす。（ 2) について。surgery によって生ずる simple loop(s) は一つ手前の complete system $\mathcal{M}_0$ で T を切り開いて考えると，3-ball の境界上にあるから，T での proper disk(s) を bound する。又，$\partial \mathcal{M}_2$ の各 simple loops を $H_1(\partial T)$ の元とみたとき，surgery は homology class を変えないから，同じ文字 a_i $(i=1, \cdots, g)$ をラベルにもつ loops の総和は ∂m_i と同じ homology class $[\partial m_i]$ を表わし，$\{[\partial m_1], \cdots, [\partial m_g]\}$ は $H_1(\partial T)$ で一次独立だから，$\mathbb{Z}$-加群の基

底変換の議論により，$\partial\mathcal{M}_2$ の sub-system $\partial\mathcal{M}_0$ で各文字を一度ずつラベルにもつ g 個の loops からなり，それらが $H_1(\partial T)$ で一次独立となるものが存在する。よって，$\mathcal{M}_0$ が求める T の meridian disks の complete system である。）以下，このprocessを（p回）繰り返し，$W(l, \mathcal{M}_p)$ が cyclically reduced になるまで行えば，$\mathcal{M}_p$ が求める $\widehat{\mathcal{M}}$ である。

2）系1の証明

Whitehead algorithm [14]（cf [3],[15]）により，oriented meridian disks of T の complete system $\mathcal{M}'$ で，

(a) $\mathcal{L}$ は normal to $\mathcal{M}'$，

(b) cyclically reduced words $\widetilde{W}(l_1, \mathcal{M}')$，…，$\widetilde{W}(l_n, \mathcal{M}')$ の長さの総和が最小，すなわち，任意の complete system $\mathcal{M}''$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{n} L(\widetilde{W}(l_i, \mathcal{M}')) \leq \sum_{i=1}^{n} L(\widetilde{W}(l_i, \mathcal{M}''))，$$

を満たすものを見つけ出せる。定理1を l_1 と $\mathcal{M}'$ に適用して，oriented proper disks of T の system $\widehat{\mathcal{M}}_1$ で，1)，2) 及び $\widetilde{W}(l_1, \mathcal{M}') \equiv W(l_1, \widehat{\mathcal{M}}_1)$ かつ

$W(l_i, \mathfrak{M}') = W(l_i, \widehat{\mathfrak{M}}_1)$ $(i=2, \cdots, n)$ を満たすものをうる。ここで，定理1は $\mathfrak{M}$ をこの $\widehat{\mathfrak{M}}_1$ に代えても成り立つ（実際，$H_1(\partial T)$ の元として，同じ文字 a_i $(i=1, \cdots g)$ の $\partial\mathfrak{M}$ の loops の総和が1次独立であれば良い。）ことに注意すれば，l_2 と $\widehat{\mathfrak{M}}_1$ に対しても同様に適用でき，system $\widehat{\mathfrak{M}}_2$ で，1)，2) 及び $\widehat{W}(l_1, \mathfrak{M}') \equiv W(l_1, \widehat{\mathfrak{M}}_2)$，$\widehat{W}(l_2, \mathfrak{M}') \equiv W(l_2, \widehat{\mathfrak{M}}_2)$ かつ $W(l_i, \mathfrak{M}') = W(l_i, \widehat{\mathfrak{M}}_2)$ $(i=3, \cdots, n)$ を満たすものをうる。以下，同様にこの process を合計 n 回繰り返して，system $\widehat{\mathfrak{M}}_n$ で，1)，2) 及び $\widehat{W}(l_i, \mathfrak{M}') \equiv W(l_i, \widehat{\mathfrak{M}}_n)$ $(i=1, \cdots, n)$ を満たすものをうる。ここで，性質2)による $\widehat{\mathfrak{M}}_n$ の complete subsystem を $\mathfrak{M}_0$ とすると，

$$\sum_{i=1}^{n} L(\widehat{W}(l_i, \mathfrak{M}')) \left(= \sum_{i=1}^{n} L(W(l_i, \widehat{\mathfrak{M}}_n))\right)$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{n} L(W(l_i, \mathfrak{M}_0))$$

が成り立つが，$\mathfrak{M}'$ は性質(b)を満たすことから，$\widehat{W}(l_i, \mathfrak{M}')$ $(= W(l_i, \widehat{\mathfrak{M}}_n)) = W(l_i, \mathfrak{M}_0)$ でなければならない。すなわち，この $\mathfrak{M}_0$ が求める $\mathfrak{M}$ である。

3） 定理2の証明

［1］. 準備的補題及び命題

cyclically reduced な表示 $\hat{\pi}(D)=\langle a_1, a_2; \hat{r}_1, \hat{r}_2\rangle$ を幾何的に実現するため，"fake Heegaard diagram" の概念を次のように定義する：

定義． $\mathbb{C}$ を ∂T（of genus 2）上の simple loops の complete system，$\mathbb{E}$ を2つの文字 a_1, a_2 のいずれかをそれぞれラベルにもつ ∂T 上の oriented simple loops の system（必ずしも complete ではない．）とする。このとき，$(\partial T; \mathbb{E}, \mathbb{C})$ を（oriented）fake Heegaard diagram（略して，F-diagram）といい，$F=(\partial T; \mathbb{E}, \mathbb{C})$（略して，$\mathbb{F}$ 又は $(\partial T; \mathbb{E}, \mathbb{C})$）と書く。

以下，F-diagram F として normal なもののみを考えることにする。F に対して，Heegaard diagram の場合と同様にして，群表示 $\pi(F)=\langle a_1, a_2; r_1, r_2\rangle$ をうる。その cyclically reduced form を同じく，$\hat{\pi}(F)$ $(=\langle a_1, a_2; \hat{r}_1, \hat{r}_2\rangle)$ と書くことにする。

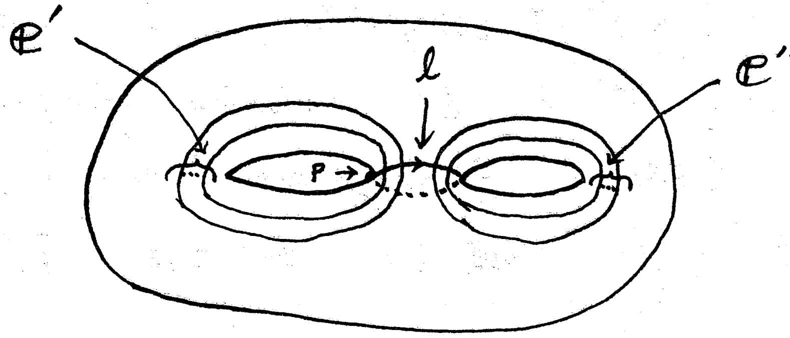
補題． F-diagram $F=(\partial T; \mathbb{E}, \mathbb{C})$ は次（＊）を満たすものとする：

(*) (1) $\pi(F) = \langle a_1, a_2 ; r_1, r_2 \rangle$ は not cyclically reduced,

(2) $\pi(F)$ のアーベル化群 は 0 ,

(3) $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ ($\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = \phi$) は次を満たす:

a) $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ はそれぞれ parallel な simple loops からなり、下図のようである。



∂T

Fig. 1

b) P を基点とする ∂T 上の oriented simple loop l を上図のようにとるとき、

$W(l, \mathcal{C}) = W_1 W_2$ (ここに、$W_1 = W(l, \mathcal{C}')$, $W_2 = W(l, \mathcal{C}'')$) は、

i) $W_1 = A$, $W_2 = AB$, ここに A, B は words,

ii) AB, A, B はそれぞれ cyclically reduced,

を満たす。

このとき，$\mathfrak{C}$ のある loop c の sub-arcs α_i ($i=1,\cdots,k$，$\alpha_1\subset\alpha_2\subset\cdots\subset\alpha_k$) で次を満たすものが存在する：

α_i に沿った surgeries $S(\alpha_i)$：$\mathfrak{C}\xrightarrow{S(\alpha_1)}\mathfrak{C}_1\xrightarrow{S(\alpha_2)}\cdots\xrightarrow{S(\alpha_k)}\mathfrak{C}_k$ において，$\mathfrak{C}_k$ は次を満たす：ある向きを保つ homeomorphism $f:\partial T\to\partial T$ に対し，

(A) $f\mathfrak{C}_k=\mathfrak{C}_k'\cup\mathfrak{C}_k''$ ($\mathfrak{C}_k'\cap\mathfrak{C}_k''=\phi$) は前条件 (3) の a) を満たす，

(B) $W(\ell,f\mathfrak{C}_k)=W_1W_2$ (ここに，$W_1=W(\ell,\mathfrak{C}_k')$，$W_2=W(\ell,\mathfrak{C}_k'')$) は，

Type I：$W_1=A$ かつ $W_2=B$，

又は，

Type II：(i) $W_1=A$ かつ $W_2=A(AB)$，

又は，(ii) $W_1=B^{-1}A^{-1}$ かつ $W_2=(B^{-1}A^{-1})A^{-1}$，

を満たす。

証明．∂T を standard longitudes l_1,l_2 (cf. 下図) に沿って切り開くと，下図のように 4-punctured 2-sphere をうる。

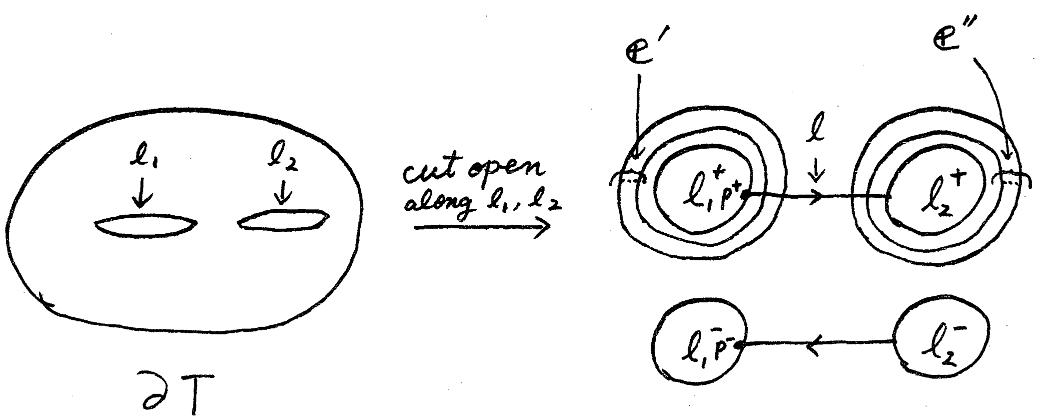


Fig. 2

条件(1)より, r_1 又は r_2 は cyclically reduced part をもつ。以下, これに対応する $\mathfrak{C}$ の loop の sub-arc の在り方を手掛りに場合に分けて考える。

(I) Fig. 2 において, $\mathfrak{C}$ のある loop C の sub-arc α で, l_1^- と l_2^+ を結ぶものが存在する場合。α を C に沿って l_1^+ の方に延長して, sub-arc $\tilde{\alpha}$ (cf. 下図) で, $W(\tilde{\alpha}, \mathfrak{C}) \equiv A^{-1}AB$ とできる。

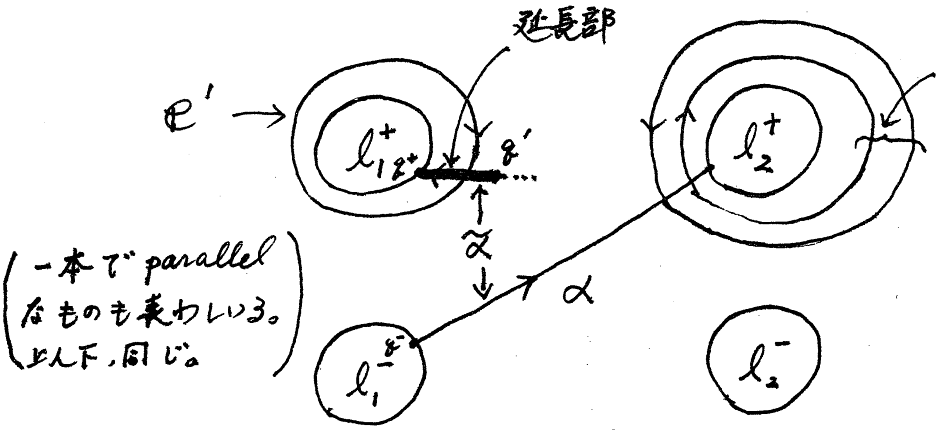
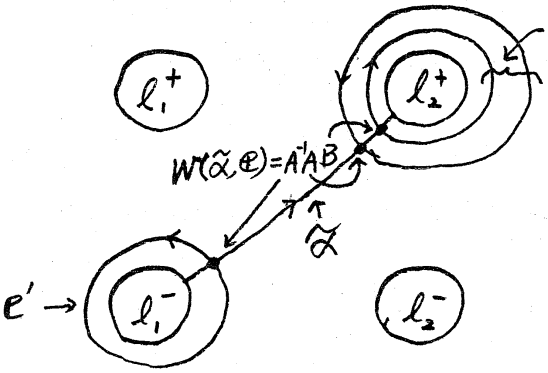
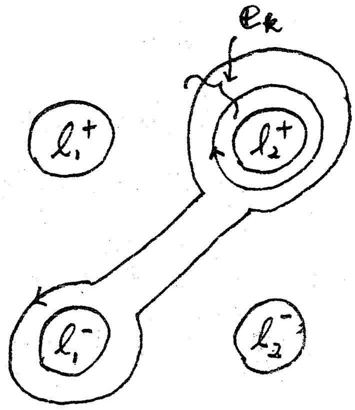


Fig. 3

この $A^{-1}A$ の cancells を $\tilde{\alpha}$ の sub-arcs $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \cdots \subset \alpha_k$ に沿った surgeries で実現すれば，(A)，(B) Type I を満たすことは容易にわかる。(cf. F図)



$\xrightarrow{S(\alpha_1)\cdots S(\alpha_k)}$



isotopic to Fig. 3

Fig. 3′ Fig. 4

$\xrightarrow{\exists f : \partial T \to \partial T}$

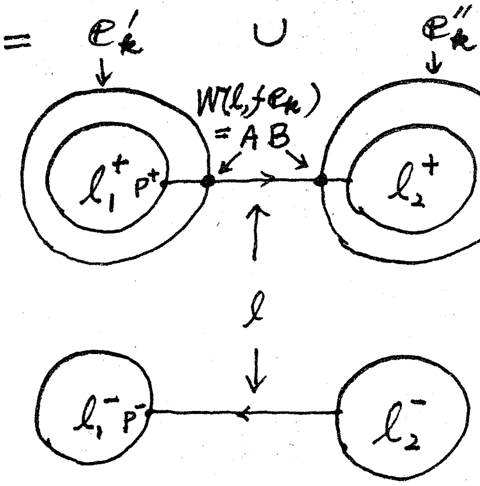
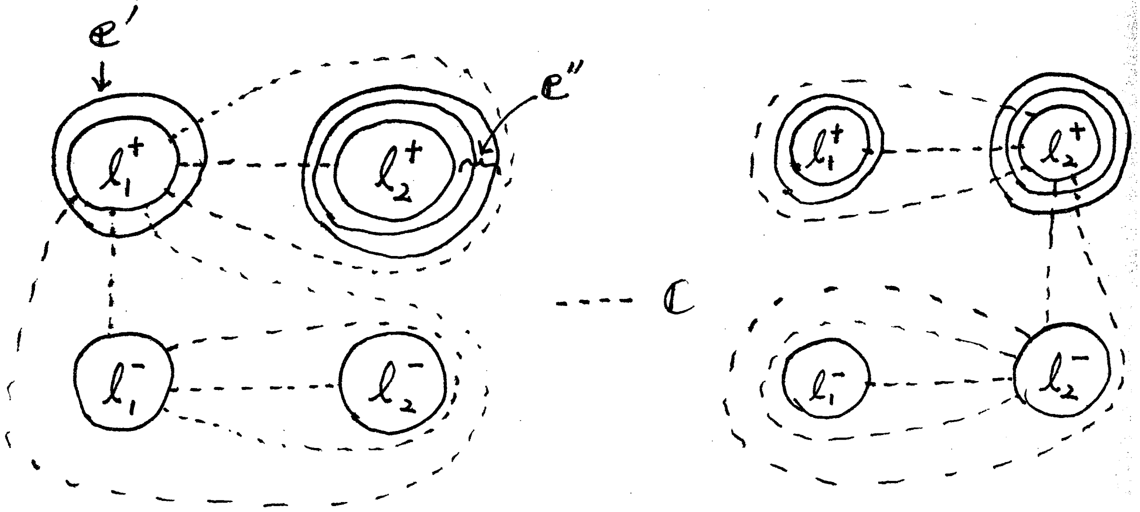


Fig. 4′

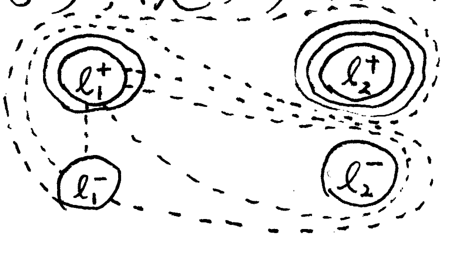
(II) (I)ような l_1^- と l_2^+ を結ぶ $\mathbb{C}$ の sub-arc が存在しない場合。genus 2 Heegaard diagram (この場合は，$(\partial T; \{l_1, l_2\}, \mathbb{C})$) の 2-symmetry 性 (cf. [2], [12]) より，l_1^+ と l_2^- を結ぶ $\mathbb{C}$ の sub-arc も存在しない。4-punctured 2-sphere 上の graph の分類結果 (cf. [4], [12]) より，$l_1 \cup l_2$ を fixed する ∂T 上の向きを保つ homeomorphism の違いを無視すれば，F は下図のタイプになる。



(1) or (2)

Fig. 5

(条件(2)より，次のタイプは生じない。)



このとき，l_1^+ (or l_2^+) 上に両端点をもつ $\mathfrak{C}$ の loop c の sub-arc α について，$W(\alpha, \mathfrak{C}) \equiv AA^{-1}$ or AB $(B^{-1}A^{-1})$ であるから，これらの cancell に対応する α の sub-arcs $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \cdots \subset \alpha_k$ に沿った surgeries により，得られた $\mathfrak{C}_k$ は，(A)，(B) Type II を満たすことは，(I) と同様に確かめられる。

この補題から，少し一般的な次の命題が導かれる。

命題．$D = (\partial T; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ を homology sphere の oriented genus 2 Heegaard diagram とする。このとき，$\mathfrak{C}_2$ の loops の sub-arcs に沿った $\mathfrak{C}_1$ の surgeries によって，得られた F-diagram $F = (\partial T; \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_2)$ による表示 $\pi(F)$ が cyclically reduced であるようにできる。更に，surgeries を適当に選べば，ある向きを保つ homeomorphism $f : \partial T \to \partial T$ に対し，

i) $hF = (\partial T; h\mathfrak{C}, h\mathfrak{C}_2)$ が前補題の条件 (2)，(3) を満たすか，又は

ii) $hF = (\partial T; \{l_1, l_2\}, h\mathbb{C}_2)$ であるようにできる。

証明. $\mathbb{C}_1$ は それぞれ, l_1, l_2 に isotopic な二本の oriented loops からなるとしてよい。(必要なら, D に代えて, fD を考えればよい。ここに, f は向きを保つ ∂T 上の homeomorphism で, $f\mathbb{C}_1 = \{l_1, l_2\}$) もし, $\pi(D)$ が cyclically reduced なら, 何もしなくても, ii) が成り立つ。$\pi(D)$ が not cyclically reduced な場合について考える。このとき, $\mathbb{C}_1$ に 補題 の Type II の surgery を行うことができる。実際, up to orientation preserving homeomorphism on ∂T で, D は下図のタイプである。(Fig. 5 の (2) に相当するものも同様に扱えるので省いた。)

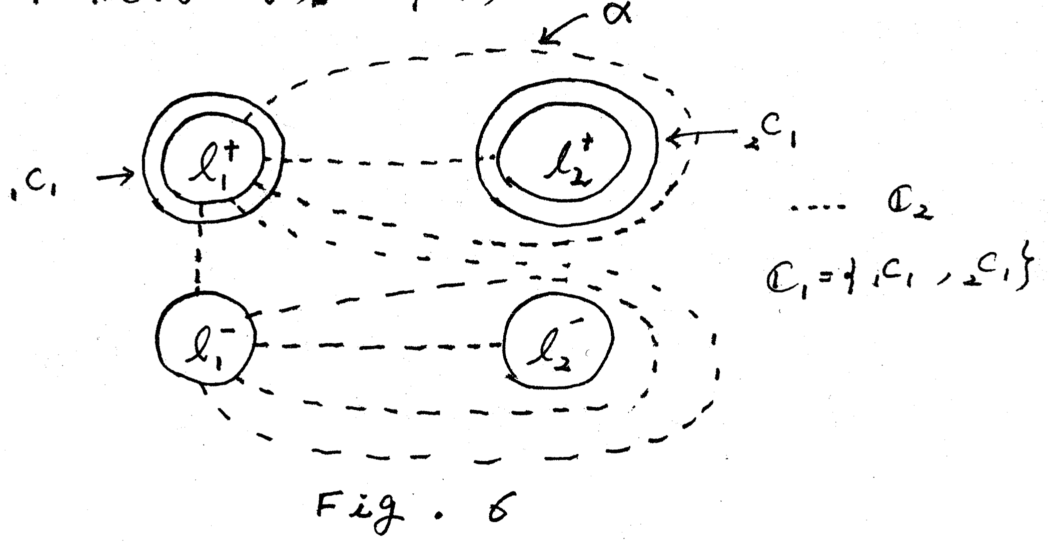


Fig. 6

従って，ℓ_1^+ に両端点をもつ $\mathbb{C}_2$ の loop の sub-arc α に沿った surgery で，$\mathbb{C}_1$ は $\mathbb{E}_1$ に変形され，向きを保つ homeomorphism $h_1 : \partial T \longrightarrow \partial T$ により下図のようになる。

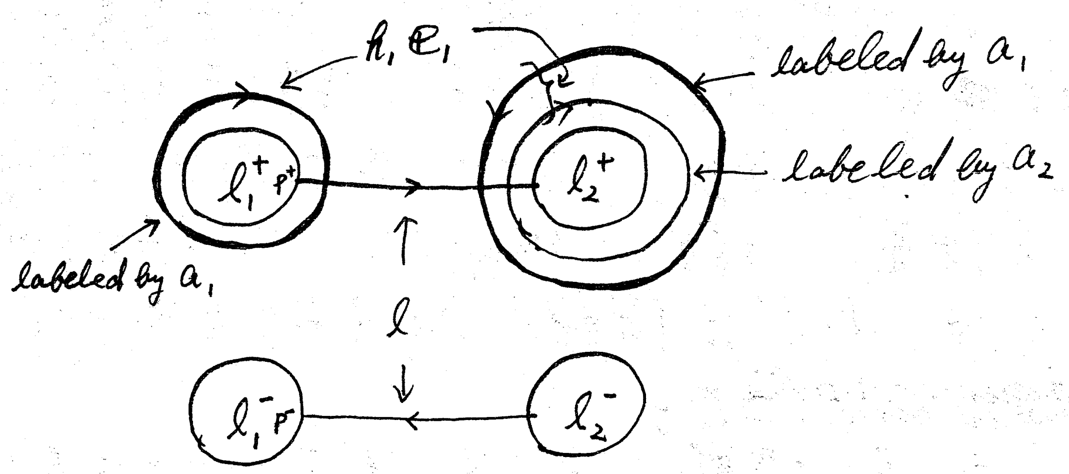


Fig. 7

このとき，$W(\ell, h_1\mathbb{E}_1) = W_1 W_2$ において，$W_1 = a_1$，$W_2 = a_1 a_2$ で，oriented F-diagram $h_1 F_1 = (\partial T ; h_1\mathbb{E}_1, h_1\mathbb{C}_2)$ は補題の条件(2),(3)を満たす。もし，$\pi(F_1)\ (\equiv \pi(h_1 F_1))$ が cyclically reduced ならば，この F_1 が求める F である。$\pi(F_1)$ は not cyclically reduced とする。これは，補題の条件(1)だから，$h_1 F_1$ に補題が適用できる。ここで，補題に関して次の二点に注意しておこう。

i) Type II の場合，新しく得られた F-diagram $(\partial T; f\mathfrak{C}_k, f\mathfrak{C})$ は，再び条件(2)，(3)を満たす．（従って，更に，条件(1)を満たせば，補題が，又，適用できる．）

ii) Type II に引き続いて Type I を適用される場合，$W(\ell)$ を変えない．すなわち，$W(\ell, \mathfrak{C}) \equiv W(\ell, f'f\mathfrak{C}_{k'})$，ここに，$\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}_1 \to \cdots \to \mathfrak{C}_k$ (Type II)，$f\mathfrak{C}_k \to f\mathfrak{C}_{k+1} \to \cdots \to f\mathfrak{C}_{k'}$ (Type I)，又，f, f' は補題における向きを保つ ∂T の homeomorphism。

よって，補題を繰り返し適用することにより，求める F をうる。

[2]．定理2の証明

D を S^3 の (oriented) genus 2 Heegaard diagram で，$\widehat{\pi}(D) \neq \langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ とする。前命題より，oriented F-diagram $F = (\partial T; \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_2)$ で次を満たすものをうる：

1) $\pi(F)$ は cyclically reduced

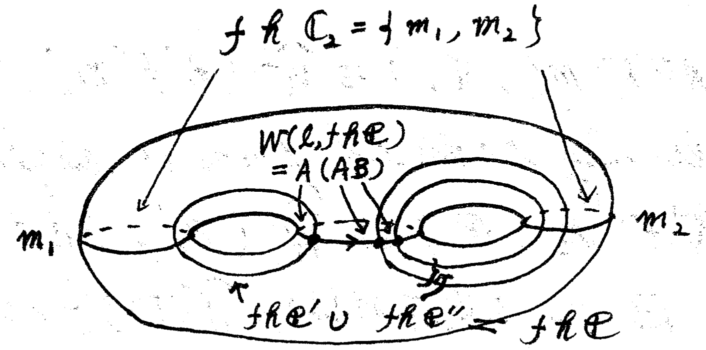
2) ある ∂T 上の向きを保つ homeomorphism h に対し，

i) hF は補題の条件(2),(3)を満たすか,

又は, ii) $hF = (\partial T ; \{l_1, l_2\}, h\mathbb{C}_2)$

である。又, $\widehat{\pi}(D) \equiv \pi(F)$ である。今, hF に associated な Heegaard diagram $D_1 = (\partial T ; \alpha, h\mathbb{C}_2)$ (ここに, $\alpha = \{l_1, l_2\}$)を考える。

Case 1. D_1 が trivial, (i.e. $c(D_1) = |\alpha \cap h\mathbb{C}_2| = 2$) のとき。 $\pi(D) \neq \langle a_1, a_2 ; a_1, a_2 \rangle$ より, 2) の ii) (上記) の場合は生じない。従って, 2) の i) の場合である。よって, ある向きを保つ ∂T 上の homeomorphism f により, fhF は下図のようになる。

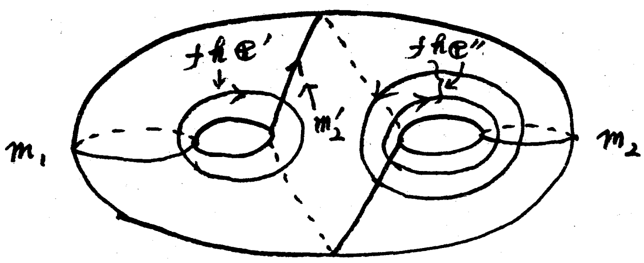


∂T

Fig. 8

従って, $\widehat{\pi}(D) = \langle a_1, a_2 ; \hat{r}_1, \hat{r}_2 \rangle$ は $\{\hat{r}_1, \hat{r}_2\} \equiv \{A, AB\}$ の形である。よって, 定理2の

求める Heegaard diagram D' として，$D=(\partial T;\ \mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2)$ における $\mathbb{C}_2=(fh)^{-1}fh\,\mathbb{C}_2=\{h^{-1}f^{-1}m_1,\ h^{-1}f^{-1}m_2\}$ の loop $h^{-1}f^{-1}m_2$ を下図の m_2' により $h^{-1}f^{-1}m_2'$ に取り変えたもの $(\partial T;\ \mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2')$（ここに，$\mathbb{C}_2'=\{h^{-1}f^{-1}m_1,\ h^{-1}f^{-1}m_2'\}$）をとればよい。



∂T

Fig. 9

実際，$\widehat{W}(h^{-1}f^{-1}m_2',\ \mathbb{C}_1)\equiv\widehat{W}(h^{-1}f^{-1}m_2',\ \mathbb{C})$（なぜなら，cyclically reduced form は surgery 不変），又，$\widetilde{W}(h^{-1}f^{-1}m_2',\ \mathbb{C})\equiv\widehat{W}(m_2',\ fh\mathbb{C})\equiv\widehat{AB^{-1}A^{-1}}\equiv B$ に注意すれば，$\widetilde{\pi}(D)=\langle a_1,a_2;\ A,\ AB\rangle \searrow \langle a_1,a_2;\ A,\ B\rangle\equiv\widetilde{\pi}((\partial T;\ \mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2'))$ である。

Case 2. D_1 が not trivial の場合。

Wave Theorem [4] により，D_1 は wave α をもつ。（wave の定義は，[13] 参照。）以下，α

のタイプにより二つの場合に分けて考える。

a) α が $h\mathbb{C}_2$ に対する wave のとき。

ある向きを保つ ∂T 上の homeomorphism f に対して、fhF は下図のようになる。

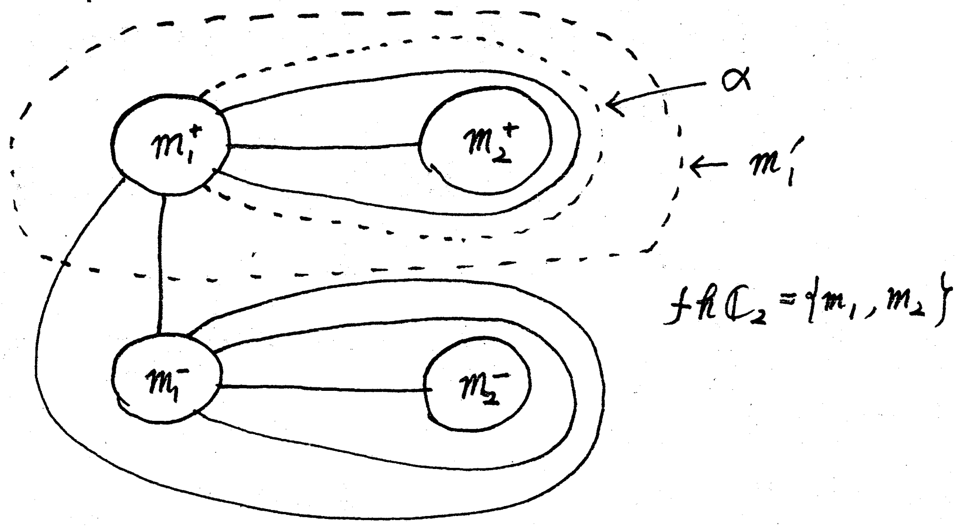


Fig. 10

$fh\mathbb{C}_2 \ni m_1$（上図）を α に沿って surgery して得られる二本の loops のうちの一本 m_1'（上図）は、m_2 に沿った読みによる word を m_1 に沿った読みによる word への substitution を幾何的に実現していることが、上図より容易にわかる。従って、$\pi(F) \equiv \hat{\pi}(D)$ より、定理2が示された。

b) α が $\mathbb{C}$ に対する wave のとき。このとき、この α を用いて、$h\mathbb{C}$ の surgeries が補題の

Type II と同様に行えることに注意すると，このsurgeriesにより，新しい oriented F-diagram $F_1 = (\partial T ; \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ で，次を満たすものをうる：

1)′ $\pi(F_1)$ は cyclically reduced，

2)′ ある向きを保つ ∂T 上の homeomorphism h_1 に対し，

i) $h_1 F_1$ は補題の(2)，(3)を満たすか，又は，

ii) $h_1 F_1 = (\partial T ; \mathcal{A}, h_1 \mathcal{C}_2)$ である．

従って，$h_1 F_1$ に associated な Heegaard diagram $D_2 = (\partial T ; \mathcal{A}, h_1 \mathcal{C}_2)$ を用いて，これまで F に対して行った議論を F_1 に同じように適用できる。ここで，$C(D_2) < C(D_1)$ （ここに，$C(\ )$ は Heegaard diagram の complexity, i.e. 総交点数）であることに注意すれば，このやり方を（多くても $C(D_2)$ 回）繰り返すことにより，Case 2 の b) は Case 1，又は Case 2 の a) に帰着される。よって，定理2が証明された。

References

[1] J. S. Birman, Heegaard splittings, diagrams and sewings for closed, orientable 3-manifolds, Lecture notes for CBMS conference at Blacksburg, Va., Oct. 8-12, 1977.

[2] ———— and H. M. Hilden, Heegaard splittings of branched coverings of S^3, Trans. A. M. S. 213 (1975), 315-352.

[3] ———— and J. M. Montesinos, On minimal Heegaard splittings, Michigan Math. 27 (1980), 49-57.

[4] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahashi, An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, Osaka J. Math. 17 (1980), 625-648.

[5] T. Kaneto, S^3 の Heegaard 分解による π_1 の表示について, 数理研講究録 297 (1977), 69-84

[6] ————, S^3 の種数 2 の Heegaard

diagrams に対応する基本群の表示について, 数理研講究録 369 (1979), 144-163.

[7] ———, On presentations of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 147-158.

[8] ———, On Heegaard diagrams of S^3, 数理研講究録 417 (1981), 9-27.

[9] ———, On genus 2 Heegaard diagrams for the 3-sphere, preprint.

[10] ———, On simple loops on a solid torus of general genus, preprint.

[11] E.S. Rapaport, On free groups and their automorphisms, Acta Math. 99 (1958), 139-163.

[12] M. Takahashi, An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem, Tsukuba J. Math. 2 (1978), 27-34.

[13] I.A. Volodin, V.E. Kuznetsov and A.T. Fomenko, The problem of discriminating algorithmically the standard

three-dimensional sphere, Russian Math. Survey 29:5 (1974), 71-172.

[14] J.H.C. Whitehead, On certain sets of elements in a free group, Proc. London Math. Soc. 41 (1936), 48-56.

[15] H. Zieschang, On simple systems of paths on complete pretzels, A.M.S. Transl. (2) 92 (1970), 127-137.