

Link Cobordism

神戸大 理 中西 康剛

この稿で、絡み輪は 3-球面に埋められた有向単純閉曲線の順序付集合を意味する。

素な絡み輪の concordance と Alexander 不変量との関連を考える。河内 [6] と中川 [11] は、concordant な n 成分の絡み輪の Alexander 多項式は $F(t_1, \dots, t_n) \cdot F(t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1})$ 因子だけ異なることを示した。ここで、 $F(t_1, \dots, t_n)$ は、 $|F(1, \dots, 1)| = 1$ となる n 変数 Laurent 多項式である。2つの Laurent 多項式が、この関係にある時、これらは、concordant であるという。

Kirby-Lickorish [8] の tangle 論法の改良型 と、絡み輪の手術的描写により、「任意の絡み輪は 同型の Alexander 不変量を有する ある素な絡み輪に concordant である。」ことを示す。次いで、中川 [11] の実現定理と合わせて、「Concordant な多項式は 素な絡み輪で実現されうる。」ことを示す。

述語 tangle は 3-球体に埋められた 2本の弧と 0本以上の輪の集合を意味する。

3-球体 B 内の tangle t が、次の性質を満足する時、素であるという。

(1) (局所単純) t と 2点で交わるような B 内の 2-球面は、 t との交わりが単純弧であるような 3-球体を張る。

(2) (不分離性) t の弧・輪は、 B に埋められた 2-円板では分離されない。

図 1 において (甲) は 素ではなく、(乙)、(丙) は 素である。

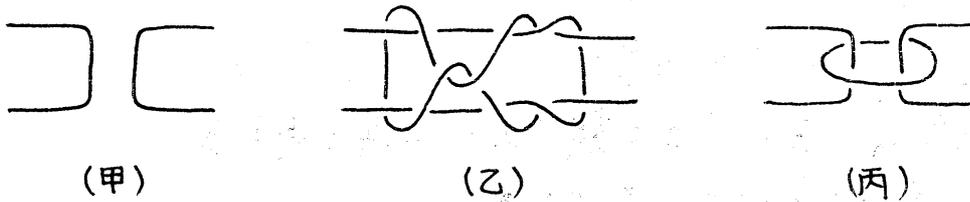


図 1.

絡み輪 \mathcal{L} が 次の性質を満足する時、素であるという。

(1) (局所単純) \mathcal{L} と 2点で交わるような 3-球面内の 2-球面は、 \mathcal{L} との交わりが単純弧であるような 3-球体を張る。

(2) (不分離性) \mathcal{L} は 2-球面では分離されない。

(1) であって (2) を満足しない絡み輪は $\bigcirc \bigcirc$ だけである。

定理 1. 絡み輪 \mathcal{L} と 4 点で交わる 2-球面が、3-球面を、
2 つの 3-球体に分離している。この時、 \mathcal{L} と各 3-球面の交
わりが、素な tangle であるならば、 \mathcal{L} は 素な絡み輪である。

Lickorish [9] と同様にして証明される。

補助定理 2. (C, ν) を tangle. D を C 内の 2-円板で (C, ν)
を 2 つの tangles $(A, \iota), (B, u)$ に分離するとしよう。更に
 (B, u) が素である時、

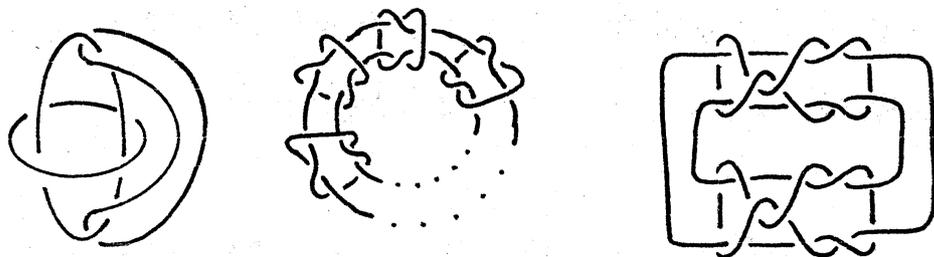
(I) (A, ι) が素である、又は

(II) (A, ι) が局所単純かつ ι が 2 本の弧のみより成り、か
つ D が A で ι を分離する 2-円板を張れない、

ならば、 (C, ν) は 素である。

切貼り論法により証明されるが、ここでは略する。

応用例. 次の絡み輪は 素 (非単純) である。



補助定理 3. 絡み輪 \mathcal{L} の各成分 \mathcal{L}_i の絡み数が 0 となるような単純な結び目が \mathcal{L} と交わらない。リボン円板を張るとする。この結び目に沿っての手術で \mathcal{L} より得られる新しい絡み輪は \mathcal{L} と同型な Alexander 不変量を有する [12]。

補助定理 4. 絡み輪の投影図において、図 1 の (甲) (乙) の描き替えは Alexander 不変量を変えない。

証明. 図 1 (乙) は 図 2 (伊) のように手術描写され、これは (呂) のように移型できる。これにより、補助定理 3 を満足することが見てとれる。

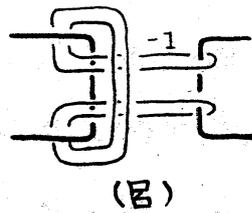
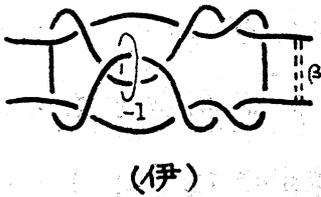


図 2

また (伊) において β に沿っての裂開が (甲) と (乙) の concordance を示していることに注意する。

補助定理 5. 絡み輪 \mathcal{L} に対して、これと 4 点で交わり、次のような 2 つの 3-球体に 3-球面を分離する 2-球面がある。

- (1) 一方の 3-球体と \mathcal{L} の交わりは、素である。
- (2) 他方の 3-球体と \mathcal{L} の交わりは、図 1 (甲) と位相同型である。

証明. 絡み輪の成分数が 1 の時は Bleiler [2] や Lickorish [9] により示されている。また、この時、局所単純な絡み輪への分割を考え、補助定理 2 を適用したわけであるが、これは成分数が 2 以上でも有効である。何故なら絡み輪は、局所単純な絡み輪へ必ず分割される。但し、分割の方法は唯一とは限らない。(参照 橋爪 [4])

成分数が 2 の時。(1) $\bigcirc \bigcirc$ は図 3 のようにとる。

これ以外は局所単純なら素である。(2) 少なくとも一方の成分が非単純の時、両成分の部分弧により、(2) となる 3-球体を構成する。すると、残りの 3-球体は (1) を満足する。何故なら、絡み輪が素より、局所単純は明らか。また、分離できれば、局所単純に反する。(3) 両成分ともに単純の時、図 4 のように取りかえれば、補助定理 2 より求める分離が得られる。

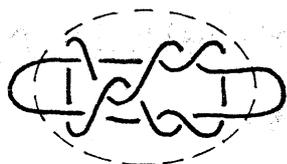


図 3

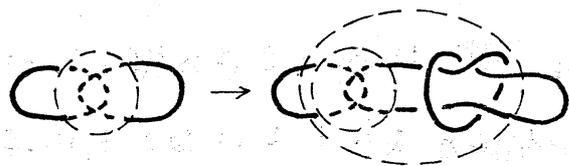


図 4

成分数が 3 以上の時。上述 (2) と同様に異なる成分の部分弧により (2) となる 3-球体を構成する。すると残りの 3-球体は、(1) を満足する。何故なら、絡み輪が素より、局所単純は明らか。また分離できれば、絡み輪が素に反する。

定理 6. n 成分の絡み輪は 同型の Alexander 不変量を有する 素な絡み輪に concordant である。更に、 $n \geq 2$ の時、成分の結び目型を変えないで実現できる。

証明. 補助定理 5 において、(2) の tangle を補助定理 4 より描き替える。定理 1 より、これが、求める絡み輪である。 $n \geq 2$ の時、(甲) の弧は単純より、各成分の結び目型を変えないことは明らか。

中川[11] の議論より、次の実現定理が成立する。

定理 7. n 成分の絡み輪 L 及び $|F(1, \dots, 1)| = 1$ となる n 変数 Laurent 多項式 $F(t_1, \dots, t_n)$ に対し、Alexander 多項式が $F(t_1, \dots, t_n)F(t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1})$ だけ L と異なる n 成分の絡み輪が存在する。

定理 6.7 を結合して、次を得る。

定理 8. n 成分の絡み輪 L 及び $|F(1, \dots, 1)| = 1$ となる n 変数 Laurent 多項式 $F(t_1, \dots, t_n)$ に対し、Alexander 多項式が $F(t_1, \dots, t_n)F(t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1})$ だけ L と異なる 素な n 成分の絡み輪が存在する。

特異点集合が、全てリボン型であるような、種数0の有向曲面の3-球面への挿入像の境界となる絡み輪を 弱意のリボン という。

定理9. 任意の2以上の自然数 n 及び、任意の偶数次の対称多項式 $f(t)$ に対して、 ∇ -多項式が $f(t)$ となるような弱意のリボン絡み輪が存在する。

証明. 細川[5]は、 ∇ -多項式を定義し、特徴づけをしたが、その構成において、 a_{2i} と a_{2j}^+ の絡み数が0より ($1 \leq i, j \leq n$) これらが、単純な絡み輪である様にすれば、求める絡み輪が得られる。何故なら、 $B_{2k+1}, \dots, B_{2k+n-1}$ に沿っての融合、そして、 $B_1, \dots, B_{2i-1}, \dots, B_{2k-1}$ に沿っての裂開により、単純な絡み輪が得られるからである。

付記. 弱意のリボン絡み輪 \mathcal{L} に対し、その成分数 n との間、 $|\sigma(\mathcal{L})| \leq n-1$ が成り立つことが、村杉[13]により知られている。

定理10. 素なりボン結び目に対して、これを赤道とする様な4-球面に埋められた2-結び目は、唯一とは限らない。

証明は略する。

References

- [1] J.W. Alexander: Topological invariants of knots and links, *Trans. AMS.* 30 (1928), 275-306.
- [2] S.A. Bleiler: Realizing concordant polynomials with prime knots, *preprint.*
- [3] J.H. Conway: An enimeration of knots and links, and some of their algebraic properties, 'Computational Problems in Abstract Algebra', Pergamon Press, Oxford, 1969, 329-358.
- [4] Y. Hashizume: On the uniqueness of the decomposition of a link, *Osaka Math. J.* 10 & 11 (1958,59).
- [5] F. Hosokawa: On ∇ -polynomials of links, *Osaka Math. J.* 10 (1958), 273-282.
- [6] A. Kawachi: On the Alexander polynomials of concordant links, *Osaka J. Math.* 15 (1978), 151-159.
- [7] S. Kinoshita and H. Terasaka: On unions of knots, *Osaka Math. J.* 9 (1957), 131-153.
- [8] R.C. Kirby and W.B.R. Lickorish: Prime knots and concordance, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 86 (1979), 437-441.
- [9] W.B.R. Lickorish: Prime knots and tangles, *Trans. AMS.* (to appear).
- [10] C. Livingston: Homology cobordisms of 3-manifolds, knot concordances, and prime knots, *Pacific J. Math.* 94 (1981), 193-206.
- [11] Y. Nakagawa: On the Alexander polynomials of slice links, *Osaka J. Math.* 15 (1978), 161-182.
- [12] Y. Nakanishi: Prime links, concordances and Alexander invariants, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 8 (1980), 561-568.
- [13] K. Murasugi: On a certain numerical invariants of link types, *Trans. AMS.* 117 (1965), 387-422.

//