数理解析研究所講究録
第443巻 1981年 128-135

Chaos に到る 異常分岐列

京大，理，物理 津田一郎

§1. はじめに

カオスに到る分岐には現在まで数種類知られている。このうち周期倍現象が最もよく研究されており，臨界現象との類似で，ファイゲンバウムが，理論をつくった[1]。その後，数学者や数理物理学者がこの理論を厳密にし，問題になっていたconjectureを証明したりした。しかし，それらの仕事には，ファイゲンバウム程の独創性は感じられない。（もっとも，数学者と物理学者では独創性の現われ方は異なるのだろうか。）周期倍分岐が存在し，かつ無限につづくという仮定のもとに理論を作るとすれば，もはや，ファイゲンバウム以上の事は出てこないだろう。ファイゲンバウム以上ではないが，その後のコレたちの仕事より独創性のある仕事として，大同氏の，きれいな仕事がある[2]。（本号，大同寛明氏の報告を見よ。）彼の仕事によって，ファイゲンバウム理論は，すっきりした。

しかし筆者が，ここで興味をもつのは，もっと異常な分岐である．B-Z反応の我々の模型から，次の異常分岐がみつかった．

1. 2^n分岐が存在しても，有限で切れ，他の種類の周期解や，カオスへ転移する．[3]
2. カントール的な分岐構造[3]．
3. Self-similarなクラスターを作る分岐構造[4]．
4. フィボナッチ分岐[3]
5. 外部ノイズによって誘起された間欠性カオス[5]．

ここでは主として，1，4について述べる．

§2．フィボナッチ分岐の臨界現象

我々がみつけたフィボナッチ分岐は不完全で，無限の分岐がおきない。しかし，ここでは，無限まで分岐するとして，局所理論を展開する．この局所理論は，ファイゲンバウムの局所理論（2^n）の精神を越えてはいない．

フィボナッチ数をF_nとする．

次のself-similarityを使う．

$$g^{(F_{n+1})} = g^{(F_n)} \circ g^{(F_{n-1})} \qquad (F_{n+1} = F_n + F_{n-1}) \cdots ①$$

次の Hypothesis をおく。

$$\begin{cases} g^{(\bar{\lambda}_n)}(x,\lambda) = \alpha^{-n} G^{(\bar{\lambda}_n)}(y_n, \varepsilon_n) + d_n \quad (x\to d_n) \cdots ② \\ n\to\infty \text{ のとき } \ G^{(\bar{\lambda}_n)}(y_n,\varepsilon_n)\to G(y,\varepsilon) \text{ : 適当な条件の下で } g \text{ によらない。} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_n &= (x-d_n)\,\alpha^n \\ \varepsilon_n &= A(\lambda-\lambda_\infty)\,k^n \end{aligned} \quad \cdots ③$$

とすると smoothing ができる。

② を ① に代入して、

$$\alpha^{-(n+1)} G^{(\bar{\lambda}_{n+1})}(y_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) + d_{n+1}$$

$$= \alpha^{-n} \quad G^{(\bar{\lambda}_n)}\left((g^{(\bar{\lambda}_{n+1})} - d_n)\,\alpha^n, \varepsilon_n \right) + d_n$$

$n \gg 1$ として、

$$\alpha^{-1} G^{(\bar{\lambda}_{n+1})}(\alpha y_n, k\varepsilon_n) = G^{(\bar{\lambda}_n)}\left(\alpha\, G^{(\bar{\lambda}_{n+1})}(\alpha^{-1} y_n, k^{-1}\varepsilon_n), \varepsilon_n\right)$$

これを次のようにしてしまう。

$$\alpha^{-1} G(\alpha y_n, k\varepsilon_n) = G\left(\alpha\, G(\alpha^{-1} y_n, k^{-1}\varepsilon_n), \varepsilon_n\right)$$

固定点の存在を仮定したことになる。

さらに、n を落とす。すると次の関数方程式が得られる。

$$G^*(\alpha y) = \alpha\, G^*(\alpha\, G^*(\alpha^{-1} y))$$

$$G(0) \equiv 1.$$

解を求める。 $G^*(y)=1-a|y|^n$ としよう。

すると、

$$\alpha^{2n}+n\alpha-n\sim 0$$

$n=1$ なら、 $\alpha^2+\alpha-1=0 \longrightarrow \alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\equiv\tau$
or $-\tau^{-1}$

$\alpha=-\tau^{-1}$ が物理的な解。この時 $a=1$

∴ $g(y)=1-|y|$ は universal function である。

これは極めて reasonable. 何故なら、このmap は2周期解がべターと存在し、しかも、それらが全て marginal stability を、持っているからである。フィボナッチは α^n が部分的に縮退したものであるという知見と合致する。

次に fixed function からの deviation を考える。つまり安定性の議論。

$$G^{(\bar{n})}(y_n,\varepsilon_n)=G^*(y_n)+\psi_n(y_n,\varepsilon_n) \quad \text{とおく。}$$

すると、

$$\alpha^{-1}\psi_{n+1}(y_{n+1},\varepsilon_{n+1})\sim G^{*\prime}(\alpha G^*(\alpha^{-1}y_n))\cdot\alpha\,\psi_{n-1}(\alpha^{-1}y_n,k^{-1}\varepsilon_n)$$
$$+\psi_n(\alpha G^*(y_{n-1}),\varepsilon_n)$$

が得られる。ここに

$$G^{*\prime}(\alpha G^*(\alpha^{-1}y))=\frac{G^{*\prime}(\alpha y)}{G^{*\prime}(\alpha^{-1}y)}=\alpha^2 \quad \text{である。}$$

$$\mathcal{L}[\psi(y)] \equiv \alpha\left[G^{*\prime}(\alpha G^{*}(\alpha^{-1}y))\,\alpha\,\psi(\alpha^{-1}y) + \psi(\alpha G^{*}(\alpha^{-1}y))\right]$$

で operator $\mathcal{L}$ を定義する．

$$\begin{cases} \delta_j\,\varphi_j(y) = \mathcal{L}\,\varphi_j(y) \\ \psi_n(y) = \sum b_j(n)\,\varphi_j(y) \end{cases}$$

なる固有値問題に帰着される．

$$\delta\varphi(y) = \alpha\left(\alpha^{3}\delta^{-1}\varphi(\alpha^{-1}y) + \varphi(\alpha G^{*}(\alpha^{-1}y))\right)$$

$y=0$，$y=\alpha$，$y=1$ として δ を求めると，δ は

$$\tau^{5}\delta^{3} - (\tau + \tau^{3})\delta + 1 = 0$$

の根となる。物理的な解は $\delta = \tau^{-1}$.

また，$\lim_{n\to\infty} T(\lambda_n) \sim \lim_{n\to\infty} |\lambda_c - \lambda_n|^{-\nu}$ で臨界指数 ν を定義すると，（ただし $T(\lambda_n)$ は $\lambda=\lambda_n$ の時の周期）

$$\nu = 1$$

が得られる．

以上をまとめると，フィボナッチ分岐の臨界現象は，次のようになる．

$$
\begin{cases}
\text{Functional Equation} : & G(-\alpha y) = -\alpha G(-\alpha G(-\alpha^{-1} y)) \\
\text{Fixed Function} : & G^*(y) \sim 1 - |y| \\
\text{Scaling Factor} : & \alpha = \tau^{-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\cdots \quad \text{(golden mean)} \\
\text{Bifurcation Velocity} : & \delta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\cdots \quad \text{(golden mean)} \\
\text{Critical exponent} : & \nu = 1
\end{cases}
$$

しかしながら，筆者には，これらの結果だけでは，まだ不満足なのである．フィボナッチ分岐の機構を理解するためには，このような局所理論ではダメで，大局的な理論が，必要だからである．

§3. 異常 2^n 分岐

2^n分岐が，おこっても有限で切れてしまう場合がある．これは，どのように理解したらよいか？．

$$x_{m+1} = f(x_m ; \lambda)$$

を考える．ここで 2^n 周期解が出たとする．これは，$f^{(2^{n-1})}$ でみれば，2周期解である．$g \equiv f^{(2^{n-1})}$ とすると．g で2周期が出た直後を摂動計算でみてみよう．$\lambda = \lambda_c$ が2周期解のonsetとする．$\lambda - \lambda_c = \varepsilon$，$x_n - x^* = \Delta x$ とすると．

$$\Delta x_{m+1} = g(\Delta x_m + x^*, \varepsilon + \lambda_c) - g(x^*, \lambda_c)$$

展開すると

$$\Delta x_{m+1} = (-1-\varepsilon k)\Delta x_m + \gamma(\Delta x_m)^2$$

ただし $-k = \delta + \alpha\gamma$

$$\alpha = g_\lambda(x^*, \lambda_c), \quad \beta = \frac{1}{2} g_{\lambda\lambda}(x^*, \lambda_c)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} g_{xx}(x^*, \lambda_c), \quad \delta = g_{x\lambda}(x^*, \lambda_c)$$

$\Delta x_m = 0$ は不安定固定点である.

gに対して安定な2周期解をみつけるために,

$$x_{m+2} = g \cdot g(x_m, \lambda)$$

を考える. 同様な展開をすれば,

$$\Delta x_{m+2} = (1+2k\varepsilon)\Delta x_m - 2\gamma^* \Delta x_m^3$$

$$\gamma^* = \gamma^2 + \sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{6} g_{xxx}(x^*, \lambda_c)$$

実は, $\gamma^* > 0$ は gに対するシュワルツ条件になっている. 従って もし シュワルツ条件が破れれば, 上記の摂動計算は無意味となる. シュワルツ条件が破れるということは, 任意のnに対し, $f^{(n)}$ の単調な区間に, 変曲点が一つ以上存在する可能性があるということである. 変曲点が, たくさん, (2つで十分だが,) でてくると, $f^{(n)}$のグラフから, 2^nが集積する前に, 軌道が局所正方形から飛び出してしまう. これが2^nが有限で切れる理由である.

参考文献

1) M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19 (1978), 25; 21 (1978), 669

2) H. Daido, Phys. Lett. 83A, (1981) 246

3) I. Tsuda, Prog. Theor. Phys. 66 (1981) No. 6

4) I. Tsuda, Phys. Lett. 85A (1981) 4

5) I. Tsuda, in preparation. "Noise-induced Intermittency"