

## 非線形常微分方程式にみられる分岐集合の計算

徳島大・工・電子 川上 博  
勝田 祐司  
松尾 次郎

1. はじめに  $\lambda$ パラメータ  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  を含んだ常微分方程式:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad (1.2)$$

を考える。  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  は各引数については必要な限り微分可能。また (1.2) では  $t$  について周期的:  $f(t+2\pi, x, \lambda) = f(t, x, \lambda)$  とする。

(1.1) あるいは (1.2) において  $\lambda$ パラメータ  $\lambda$  を変化させたときある  $\lambda$ パラメータ値  $\lambda = \lambda_0$  で相空間図 (phase portrait) の位相的性質が急に変化する現象は一般に分岐現象と呼ばれ,  $\lambda_0$  は分岐の値,  $\lambda_0$  からなる  $\lambda$ パラメータ空間  $\mathbb{R}^m$  の集合は分岐集合と呼ばれている。

この報告では次にあげるような応用上問題となる分岐集合を数値的に計算する方法について考察し, 幾つかの具体的な方程式にみられる分岐集合の計算結果を紹介する。

分岐に関して興味ある問題としては

I. 分岐集合の計算法:

(I-a) 平衡点, 周期解など局所的と考えられる運動に関する分岐集合,  
 (I-b) saddle connection, homoclinic 点の発生など解の大域的性質  
 に基づき運動に関する分岐集合, の計算;

## II. $\mathbb{R}^m$ 空間における分岐集合の性質

(II-a) 分岐集合の局所的性質

(II-b) 分岐集合の大域的性質

(II-c) 分岐集合の安定性

などが考えられる。ここで用いた分岐集合の計算法は平衡点, 周期解, homoclinic 点の発生など系の状態を与える方程式と各種分岐の条件式を状態  $x$  とパラメータ  $\lambda$  を未知数として連立して解く方法による。このため用いる方程式系は分岐の各パラメータで閉数的に独立となる条件(横断性の条件)を持つことが望ましい。この条件を考慮して方程式系を構成すれば数値計算は Newton 法による shooting 法を用いることができる。以下代表例について計算法を略述する。

## 2. 分岐集合の計算法

(I-a) の例として (1.2) の周期解の分岐集合, (I-b) の例として homoclinic 点の発生に関する分岐集合の計算法を述べる。なおパラメータ  $\lambda$  は 2 次元 ( $m=2$ ) の場合を考える。

### 2.1 不動点の分岐集合

式 (1.2) の  $t=0$  で初期値  $x_0$  をとる解を  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  とし,  $\varphi$  を用い

で Poincaré 写像  $T_\lambda$  を

$$T_\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x_0 \mapsto x_1 = T_\lambda(x_0) = \varphi(2\pi, x_0, \lambda) \quad (2.1)$$

で定義する。

[補題 1]  $T_\lambda$  の点  $(x_0, \lambda)$  における  $x_0$  および  $\lambda$  に関する微分:

$$DT_\lambda(x_0) = \frac{\partial T_\lambda}{\partial x_0} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ \lambda=\lambda}}, \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial x_0 \partial \lambda}, \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial \lambda^2}, \dots$$

などは (1.2) の初期値および  $\lambda$  の  $x$ - $t$  に関する変分方程式の解を用いて表わすことができる。

この補題は以下 Newton 法を用いて方程式を解く際 Jacobi 行列を計算する場合に繰返し使用する。

さて  $T_\lambda$  の不動点を与える方程式は次式で与えられる。

$$f(x, \lambda) \triangleq T_\lambda(x) - x = 0 \quad (2.2)$$

また不動点  $x$  における特性方程式は

$$g(x, \lambda, \mu) \triangleq \det(DT_\lambda(x) - \mu I) = 0 \quad (2.3)$$

である。 $T_\lambda$  の不動点の分岐は (2.3) の根  $\mu = 1$  が  $\mu_0$  附近の条件を満たす場合に生じる。

[分岐の基本形]

- (i)  $\mu_0 = 1$  とする分岐: 不動点対の発生あるいは消滅, D-型 branching.
- (ii)  $\mu_0 = -1$  とする分岐: I-型 branching.
- (iii)  $\mu_0 \neq 1, -1$  かつ  $|\mu_0| = 1$ : Hopf 分岐

[ (ii), (iii) の分岐集合の計算 ]

(2.2) を相空間  $\mathbb{R}^n$  と  $\lambda$  の  $x$ - $t$  空間  $\mathbb{R}^2$  の直積  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^2$  の写像

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  の零点を定める方程式と考えると (ii), (iii) の分岐に対して

$$\text{は} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = D T_\lambda(x) - I$$

は正則となるので陰関数の定理から、不動点  $x$  の近傍で  $f$  の零点集合、すなわち  $T_\lambda$  の不動点は

$$x = f(\lambda) \quad (2.4)$$

と表わされる曲面となる。従って (ii), (iii) の分岐集合は (2.4) の曲面上で  $\mu_0 = -1$ ,  $|\mu_0| = 1$  を満足する曲線を求め、これを  $\mathbb{R}^3$  の  $x$ - $\lambda$  平面に射影してできる集合として計算できる。

[命題 1]  $(x_0, \lambda_0, \mu_0)$  を (2.2), (2.3) を満足する点とし、 $\mu_0 \neq 1$  とする。

まず (2.3) は  $(x_0, \lambda_0)$  を固定し、 $\mu$  について  $\mu = 1$  を根として持たないものと仮定し、かつ  $\mu_0$  は (2.3) の単根とする。このとき  $\partial \mu_0 / \partial \lambda_1 |_{\lambda = \lambda_0} \neq 0$  あるいは  $\partial \mu_0 / \partial \lambda_2 |_{\lambda = \lambda_0} \neq 0$  ならば

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \Big|_{x=x_0, \lambda=\lambda_0, \mu=\mu_0} = n+1 \quad (2.5)$$

である。

従って具体的に分岐曲線を求めるには (2.2) および  $g(x, \lambda, \mu_0) = 0$  を未知数  $(x, \lambda_1)$  あるいは  $(x, \lambda_2)$  について Newton 法を用いて解けばよい。このとき Jacobi 行列は補題 1 を用いて計算する。

[ (i) の分岐集合の計算 ]

分岐集合の計算の問題となるのはこの場合である。以下  $\mu_0 = 1$  が (2.3) の単根となる場合:  $\text{rank} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_0, \lambda=\lambda_0} = n-1$  の場合を

とりあげ、更に

$$\text{rank} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right]_{x=x_0, \lambda=\lambda_0} = n \quad (2.6)$$

が成り立つ系を考える。

$$J(x, \lambda) \triangleq g(x, \lambda, 1) \quad (2.7)$$

と置く。

[命題2] (2.6)が成り立つとする。このとき(2.2), (2.7)を満足する点  $p =$

$(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$  において

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = n+1 \quad (2.8)$$

が成立する。すなわち  $J=0$  は(2.2)を満足する曲面に横断的であり、交わりの集合は曲線となる。

$$\text{今 } \pi_\lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, \lambda) \mapsto \pi_\lambda(x, \lambda) = \lambda \quad (2.9)$$

を  $\mathbb{R}^0 \rightarrow X$ - $\lambda$  平面への射影と見做し、

$$M = \{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \mid f(x, \lambda) = 0 \}$$

$$\Sigma = \{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \mid f(x, \lambda) = 0, J(x, \lambda) = 0 \}$$

と置き、この  $\Sigma$  を  $\pi_\lambda$  の不動点集合、一般横断的折れ目形集合と呼ぶことにする。また  $\pi_\lambda(\Sigma)$  を  $\pi_\lambda$  の分岐集合と呼ぶ。以下  $\pi_\lambda(\Sigma)$  を具体的に計算した。い。

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2; s \mapsto \phi(s) \text{ を } \Sigma \text{ の } C^2 \text{ 級 } \mathbb{R}^0 \rightarrow X \text{-} \lambda \text{ 付け"あると、} p$$

$\in \Sigma$  で  $p = \phi(0)$  となつてゐるものとする。

[定義1]  $\Sigma$  上の点  $p = (x, \lambda)$  は

- (i)  $\frac{d}{ds}(\pi_\lambda \circ \phi)(0) \neq 0$  ならば  $\pi_\lambda$  の折れ目形点 (fold point),  
 (ii)  $\frac{d}{ds}(\pi_\lambda \circ \phi)(0) = 0$  ならば  $\frac{d^2}{ds^2}(\pi_\lambda \circ \phi)(0) \neq 0$  ならば  $\pi_\lambda$  のくさ  
 び形点 (cusp point) と呼ぶ。

この定義を  $\Sigma$  の接ベクトル  $W$  でおおわち

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = W(\phi(s)) \quad (2.10)$$

を満足するベクトル場  $W$  と  $\pi_\lambda$  の  $W$  方向への Lie 微分:

$$L_W \pi_\lambda(p) = D\pi_\lambda \cdot W(p) = \frac{d}{ds}(\pi_\lambda \circ \phi)(0)$$

を用いて書き直すと

[定義 2] 点  $p \in \Sigma$  は

- (i)  $L_W \pi_\lambda(p) \neq 0$  ならば折れ目形点,  
 (ii)  $L_W \pi_\lambda(p) = 0$  ならば  $L_W L_W \pi_\lambda(p) \neq 0$  ならばくさび形点である。

そこで点  $p \in \Sigma$  が折れ目形点, くさび形点かどうかは, 非正交  
 の点を具体的に計算するためベクトル場  $W$  を (2.2), (2.7) を用いて定  
 めよう。今  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n, w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2})$  とし

$$A(x_i) = (-1)^{i-1} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \overset{\wedge}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_n} & \frac{\partial J}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial J}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

とおく。ここに  $\wedge$  はその列をとり除くことを意味する。式(2.2), (2.8)より

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial x} dx + \frac{\partial J}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

$W$  は  $(dx, d\lambda)$  方向のベクトルであるから

$$\frac{w_1}{A(x_1)} = \dots = \frac{w_i}{A(x_i)} = \dots = \frac{w_{\lambda_1}}{A(\lambda_1)} = \frac{w_{\lambda_2}}{A(\lambda_2)} \quad (2.12)$$

そこで  $W$  の 1 例として各成分を

$$w_1 = A(x_1), \dots, w_n = A(x_n), w_{\lambda_1} = A(\lambda_1), w_{\lambda_2} = A(\lambda_2) \quad (2.13)$$

と選ぶと

$$L_W \pi_\lambda(p) = (w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2})$$

$$L_W L_W \pi_\lambda(p) = \left( \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_2}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \right)$$

となる。従って

[命題 3]  $p = (x, \lambda) \in \Sigma$  とする。

(i)  $p$  が折り目形点ならば  $w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}$  の両者が同時に零と成ることはない。

(ii)  $p$  が  $C^1$  形点ならば

(a)  $w_{\lambda_1} = 0$  かつ  $w_{\lambda_2} = 0$  ではない。

(b)  $\sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i}, \sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i}$  の両者が同時に零と成ることはない。

[命題 3 の証明の計算法]

(i) 折り目形点: (2.2), (2.7) を  $(x, \lambda_1)$  あるいは  $(x, \lambda_2)$  について解く。

(ii)  $C^1$  形点: (2.2), (2.7) および  $w_{\lambda_1} = 0$  (あるいは  $w_{\lambda_2} = 0$ ) を

$(x, \lambda)$  について解く。

命題 3 はこれらの方程式系の Jacobi 行列式が零と成らないことをいっている。

従って Newton 法により折り目形点,  $C^1$  形点を求めることができる。

(2.2) homoclinic 点の発生に関する分岐集合 (2次元非自律系の例)

Poincaré 写像  $T_\lambda$  (2次元) が正不安定不動点  $D$  ( $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$ ) を持つとし, 点  $D$  の  $\alpha$  枝,  $\omega$  枝が接して homoclinic 点が発生する  $\lambda$  の値  $\lambda = \lambda_0$  を計算する。

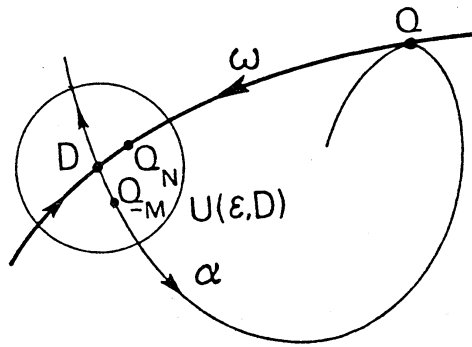
点  $D \in \mathbb{R}^2$  を正不安定不動点とする:

$$T_\lambda(D) - D = 0 \quad (2.14)$$

$D$  の  $\varepsilon$  近傍  $U(\varepsilon, D)$  とし,  $U$  の内部で  $\alpha$  枝,  $\omega$  枝の局所表現を計算する:

$$\alpha \text{ 枝: } g_\alpha(x - D) = 0 \quad (2.15)$$

$$\omega \text{ 枝: } g_\omega(x - D) = 0$$



これらの枝を  $T_\lambda$  で  $\mathbb{R}^2$  内にのばし点  $Q$  で両枝が接して homoclinic 点が生じたとき (上図参照)。適当な正の整数  $M, N$  をとれば

$$Q_{-M} \equiv T_\lambda^{-M}(Q) \in U, \quad Q_N \equiv T_\lambda^N(Q) \in U$$

とできる。すなわち

$$g_\alpha(Q_{-M} - D) = 0, \quad g_\omega(Q_N - D) = 0, \quad Q = T_\lambda^M(Q_{-M}) = T_\lambda^{-N}(Q_N)$$

次に点  $Q$  で両枝の接ベクトルの方向が一致する条件を求める。まず  $U$

内で  $\alpha$  枝の  $\lambda$  付け, すなわち  $\alpha$  枝を曲線  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; s \mapsto \phi(s)$  で表わす。ここに  $\phi(0) = D, \phi(s_\alpha) = Q_{-M}$  とする。今  $\mathbb{R}^2$  の  $\lambda$  付け場  $\mathbb{R}^2$  で曲線

$$\phi \text{ について } \frac{d\phi}{ds}(s) = W(\phi(s))$$

を考えると, 点  $Q$  における  $\alpha$  枝の接ベクトルは

$$\frac{d(T_\lambda^M \circ \phi)}{ds} \Big|_{s=s_\alpha} = DT_\lambda^M(\phi(s_\alpha)) \frac{d\phi}{ds}(s_\alpha) = DT_\lambda^M(Q_{-M}) W\alpha$$



とする。ここに  $W(\phi(s_\omega)) = W_\alpha$  とおいた。  $W_\alpha$  は  $f_\alpha$  を使って計算できる。  
 同様に  $\omega$  枝を曲線  $\psi(s)$  で表わし  $d\psi/ds(s) = V(\psi(s))$  とおくと

点  $Q$  における  $\omega$  枝の接ベクトルは

$$\frac{d(T_\lambda^{-N} \circ \psi)}{ds} \Big|_{s=s_\omega} = DT_\lambda^{-N}(Q_N) V_\omega$$

で与えられる。ここに  $\psi(s_\omega) = Q_N$ ,  $V(\psi(s_\omega)) = V_\omega$  とおいた。従って点  $Q$  における接ベクトルが同じ方向を向く条件として次式を得る

$$\det [ DT_\lambda^M(Q_M) W_\alpha \ ; \ DT_\lambda^{-N}(Q_N) V_\omega ] = 0 \quad (2.16)$$

以上のことから

[分岐点  $\lambda^0$  ランク-1 の計算]

$$T_\lambda(D) - D = 0 \quad (2.17)$$

$$T_\lambda^M(Q_M) - T_\lambda^N(Q_N) = 0 \quad (2.18)$$

$$f_\alpha(Q_M - D) = 0, \quad f_\omega(Q_N - D) = 0 \quad (2.19)$$

式(2.16) ~ (2.19) を未知数: 点  $D$ ,  $Q_M$ ,  $Q_N$  の座標および  $\lambda^0$  ランク-1  $\lambda$  (この場合は  $\lambda$  をスカラーとする) について解けばよい。整数  $M, N$  はあらかじめ決めておく。

### 3. 分岐集合の計算例

電気回路のモデルとしてよく知られた Duffing 方程式:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos t + B_0 \quad (3.1)$$

および Duffing-van der Pol 方程式 (DVP 方程式):

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + x^3 = B \cos \nu t \quad (3.2)$$

と例にとり, 不変点, homoclinic 点の分岐集合を計算した結果を以下図示した。(3.1), (3.2) を  $\dot{x} = y, \dot{y} = f(x, y, t)$  と書き直し,  $T_\lambda$  [(3.1) については周期  $2\pi$ , (3.2) については周期  $2\pi/\lambda$ ] を定義した。

## 文献

- 1) 川上, 小林: 周期的外力を加えた非線形回路にみられる同期振動とその分岐  
電子通信学会論文誌 A, Vol. J-63-A, No. 11, 1980.
- 2) 川上, 小林: 非線形方程式に現われる分岐集合の計算, *ibid.* J-64-A, No. 1, 1981.
- 3) 川上: 非線形回路にみられる分岐集合の大域的性質, *ibid.* J-64-A, No. 9, 1981
- 4) 川上, 勝田: C型平衡点のセパトリクス閉路の計算, *ibid.* J-64-A, No. 10, 1981
- 5) " : 3階ダフニング方程式のホップ分岐とカオス, *ibid.* J-64-A, No. 11, 1981
- 6) 川上, 松尾: I型分岐により生じる同期運動の安定性基準, *ibid.* J-64-A, No. 11, 1981
- 7) 川上, 松尾: ダフニング方程式にみられる同期解の分岐集合, *ibid.* J-64-A, No. 12, 1981
- 8) " : 重漸近運動の一計算法, *ibid.* J-64-A, No. 12, 1981
- 9) " : 非線形系にみられる重漸近運動の分岐, *ibid.* 投稿中
- 10) 川上, 勝田: 同期化問題に関連した2次元自律系の動的性質, *ibid.* 投稿中.

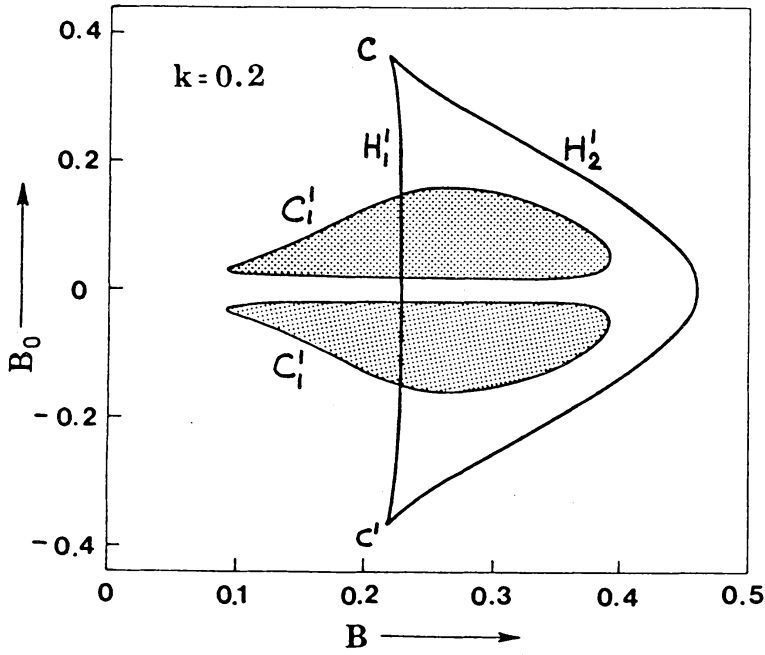


図1. Duffing方程式(3.1)の分岐集合

$H'_1, H'_2$ : 折れ目形集合

$C, C'$ : C型分岐

$C'_1$ : I型branching.

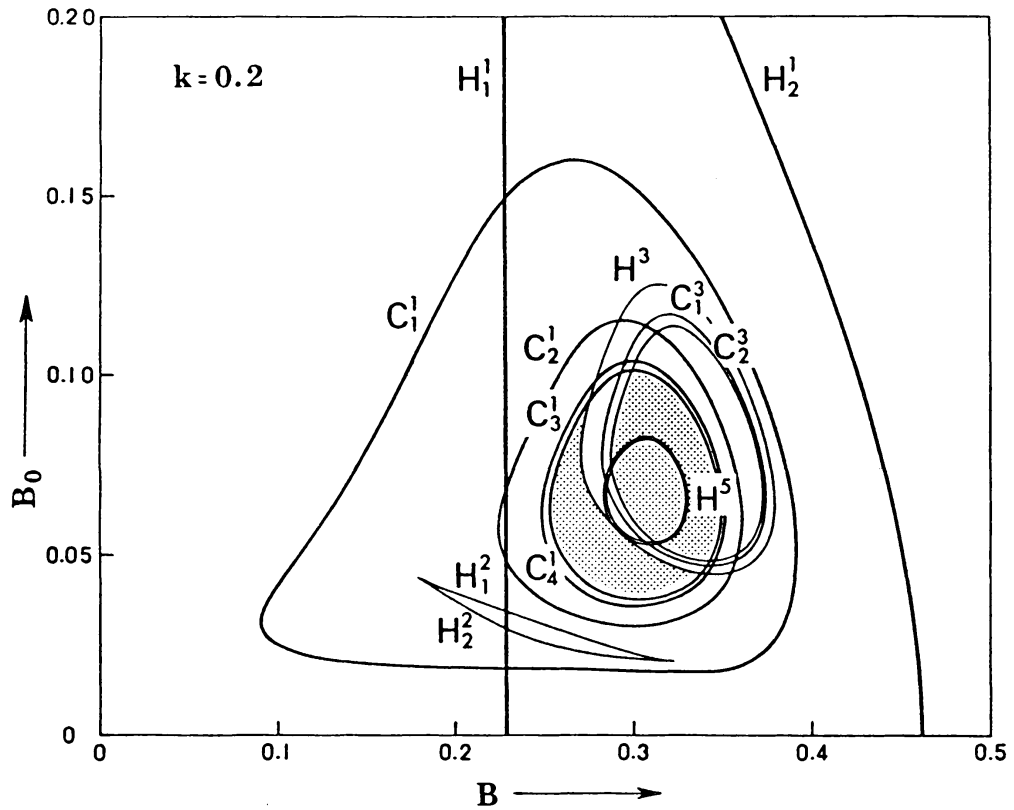


図2. Duffing方程式の分岐集合.  $H^i$ :  $i$ -周期点の折れ目形集合.

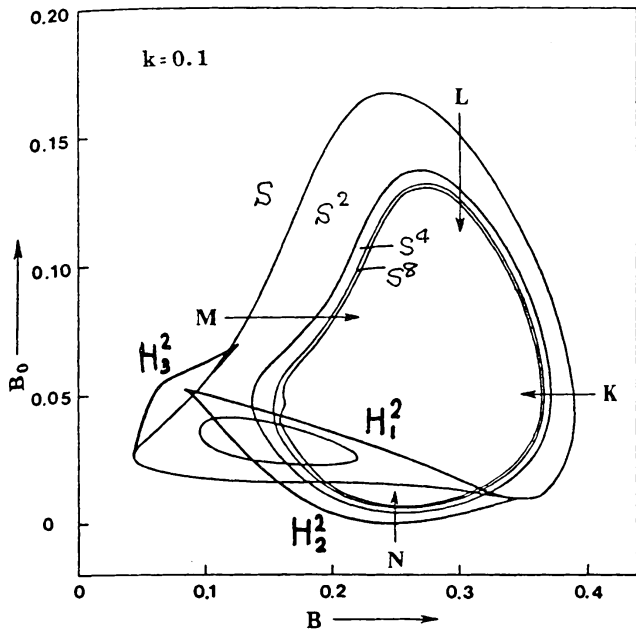


図3. Duffing 方程式の分岐集合.

I-型 branching.

直線  $K, L, M, N$  に沿って  
 $B$  を変化するときに  
 安定な  $2^m$ -周期点の存在  
 範囲  $\Delta \lambda_m$  を実験的に  
 決定した図4.

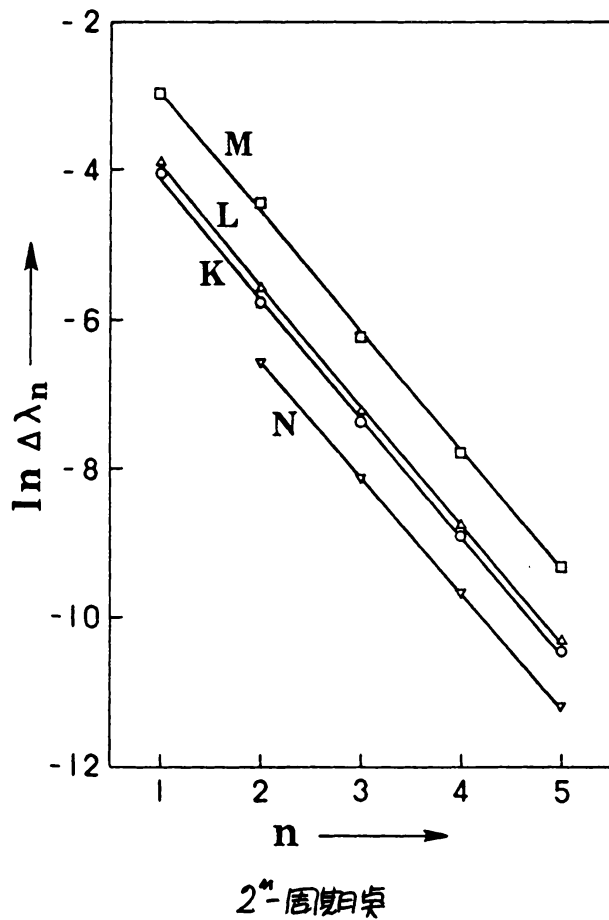


図4. I型 branching の進展.

$\Delta \lambda_m$ :  $2^m$ -周期点の安定に  
 存在する  $B$  の範囲

$$\Delta \lambda_{n+1} = e^{-1.55} \Delta \lambda_n \text{ (実験式)}$$

が成り立つ。したがってこの例では  
 $B$  の有限範囲  $n \rightarrow \infty$  まで  
 I型 branching が進展していると  
 考えられる。

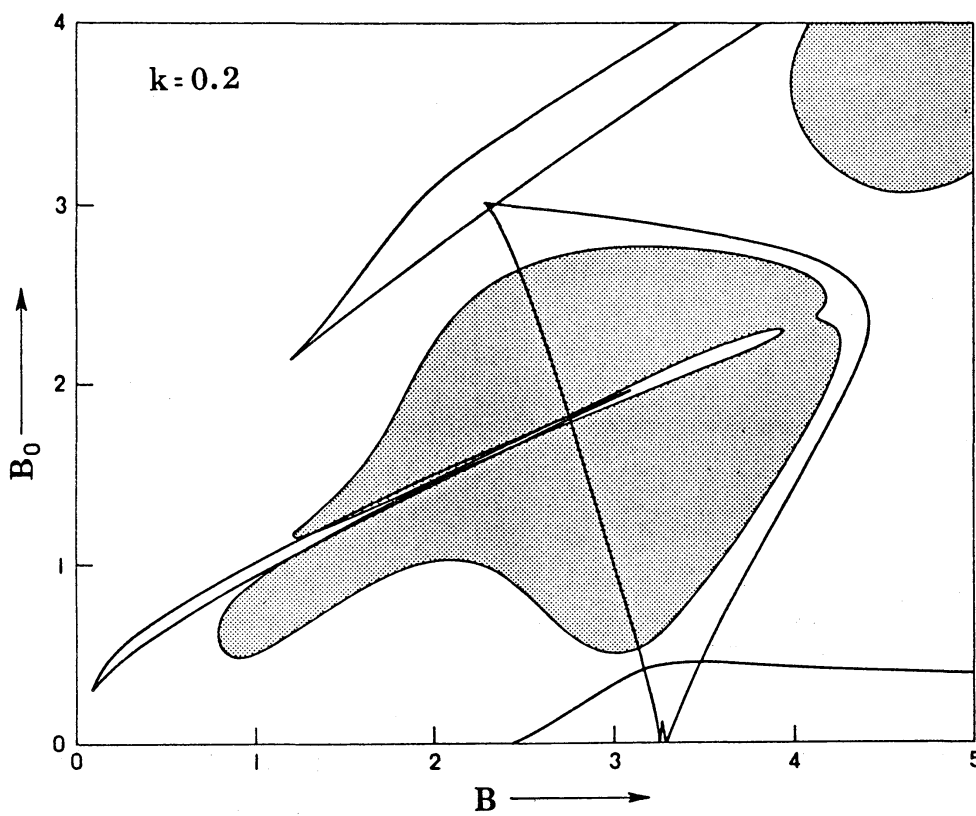


図5(a)

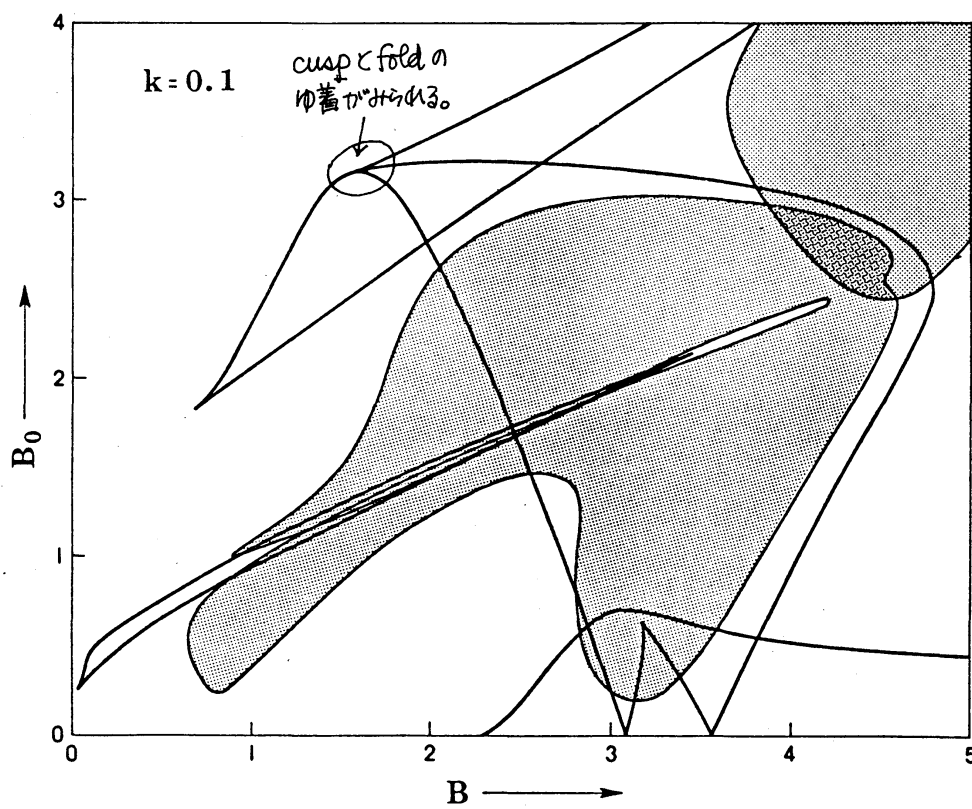


図5(b)

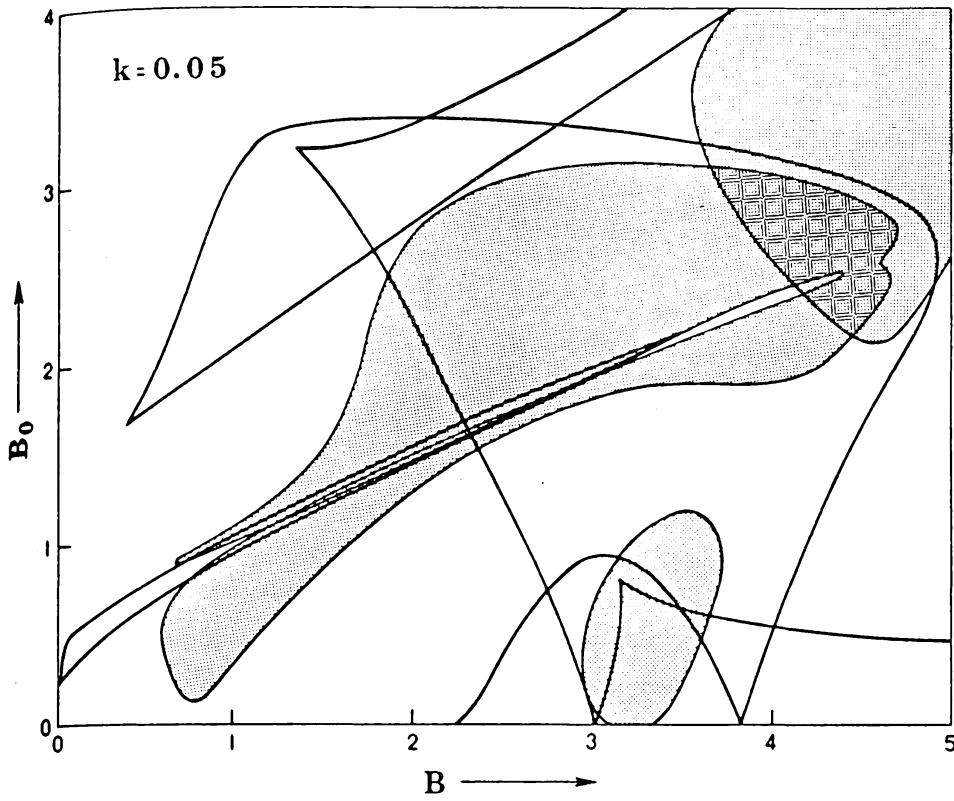


図5(c)

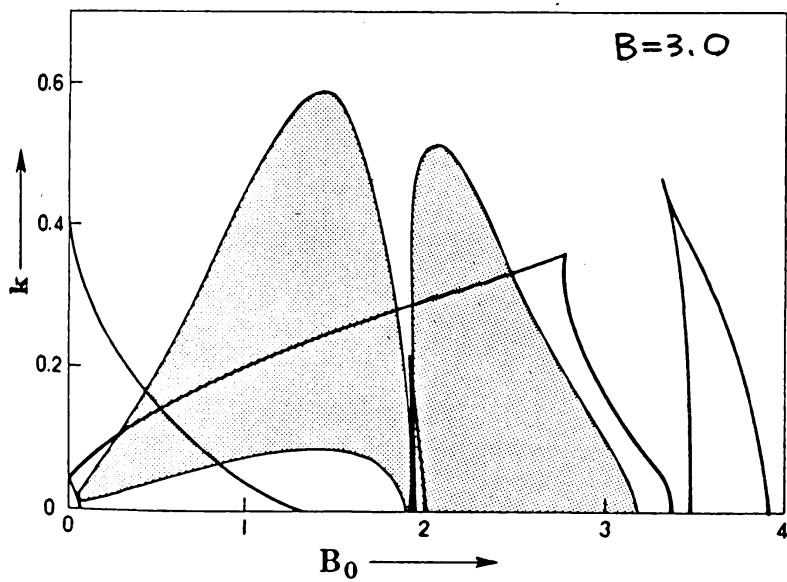


図5(d)

図5 Duffing 方程式の分岐集合.  $110^5$  x- $\mu$  系と変えた場合の分岐集合の変化 (a)~(c); 実線: 折れ目型集合, 網目領域の境界: I型branching.

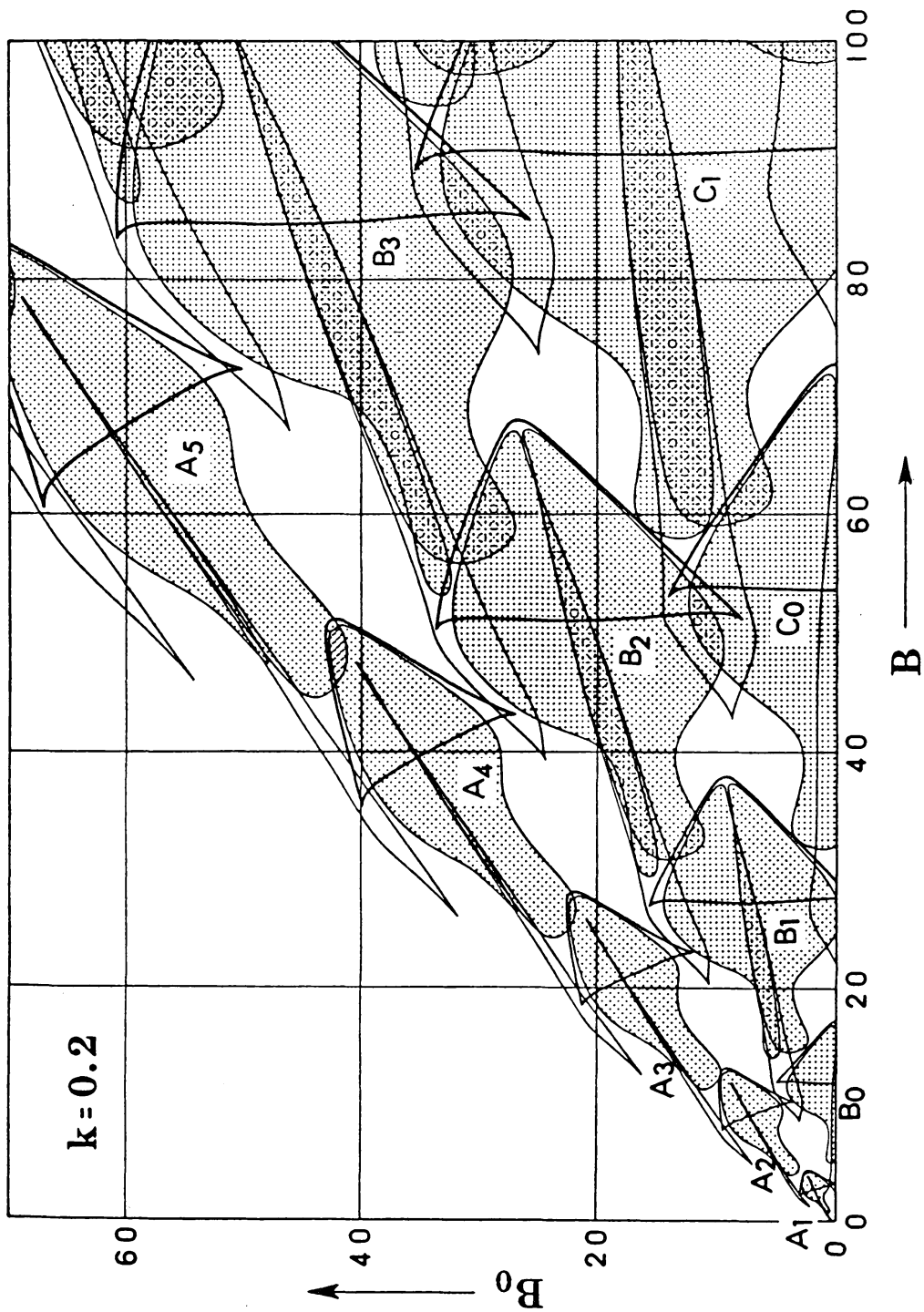


图6. Duffing 方程式の折れ目形線分, 工型-branching.

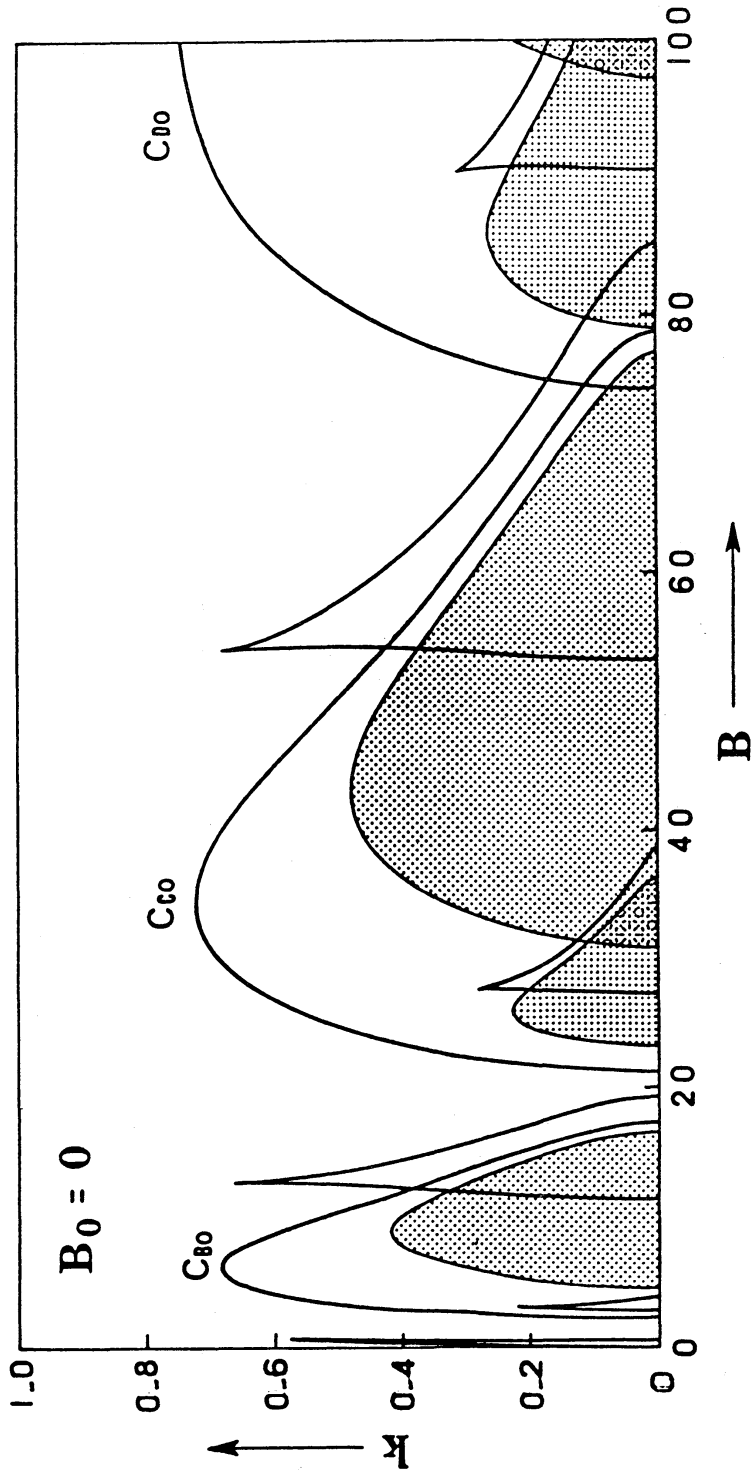


图6 (b) 前图 $\varepsilon B_0 = 0$ 时的图.  $C_{Bo}, C_{Co}, C_{Bo}$ ; cup pointの集合.



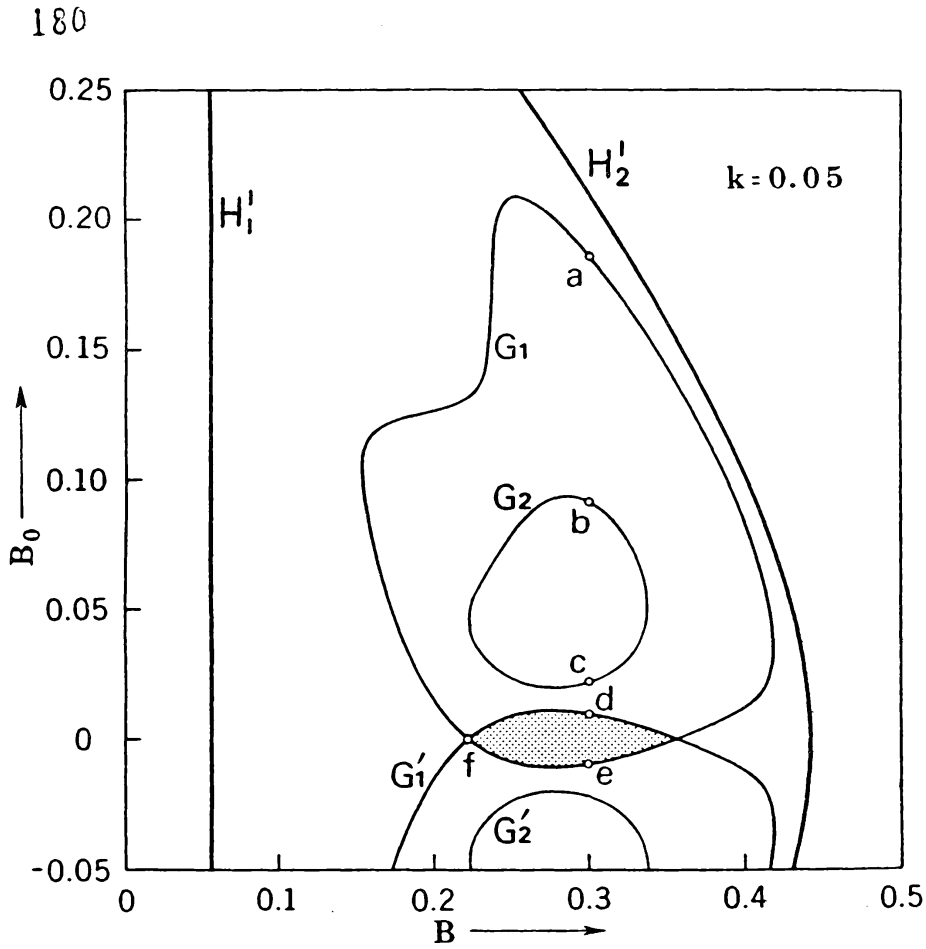


図7. Duffing方程式  
 木の川ニツク桌の発生  
 に関与する集合  
 $G_1, G_1', G_2$ .  
 点(a)~(f)の $\mathcal{T}_\lambda$ に  
 対応する phase portraits  
 は図9.

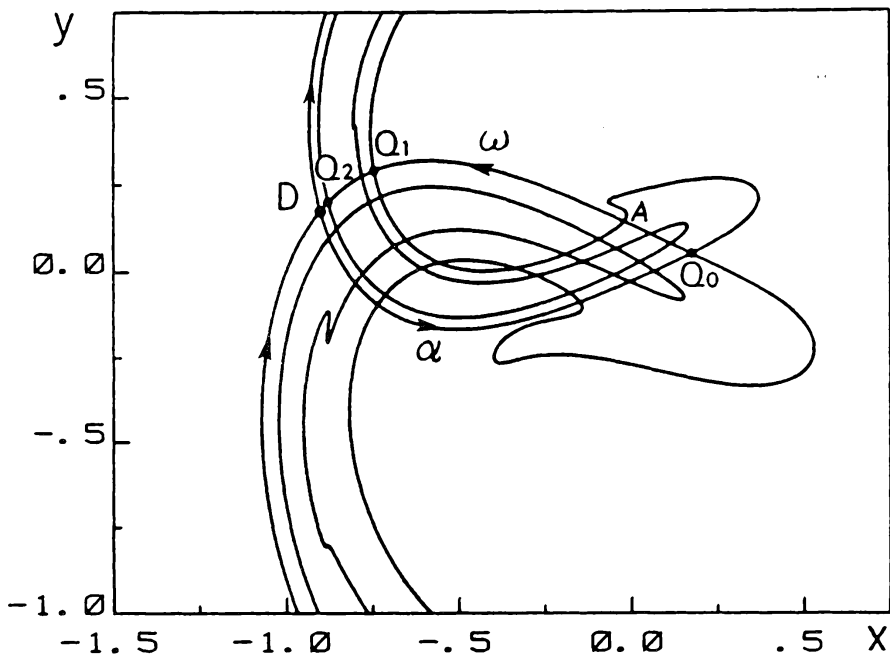


図8.  
 不変点Dの $\alpha$ 軌,  $\omega$ 軌.  
 $B=0.3$   
 $B_0=0.05$   
 $D \alpha Q_0 \omega A \alpha Q_1 \omega D$   
 の領域  $\cap$  は  
 $\mathcal{T}_\lambda$ によつて horseshoe  
 型に写される。

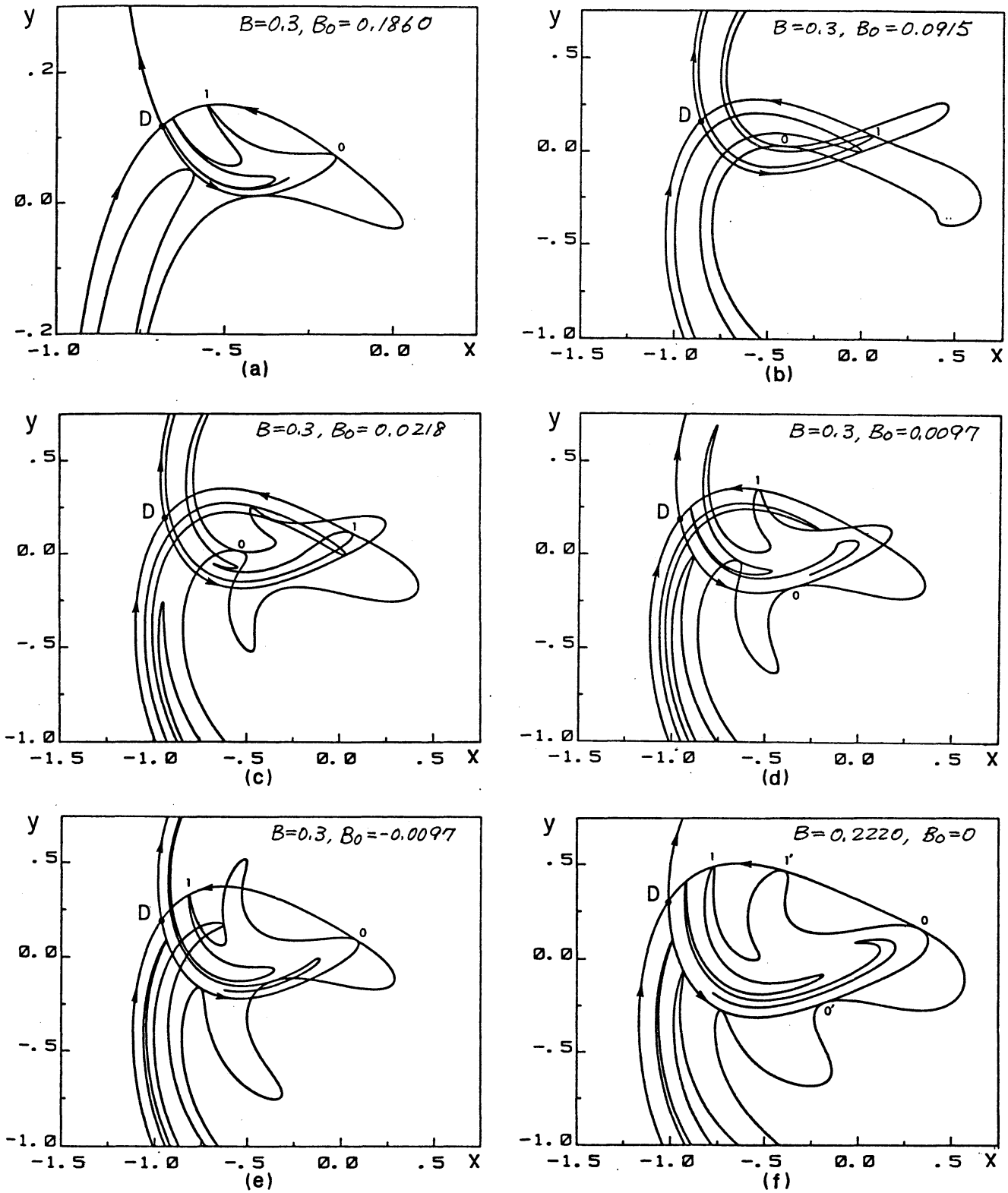


図9. 図7 (a)~(f) の phase portraits. 点Oは  $T_\lambda$  の点1に等しい。

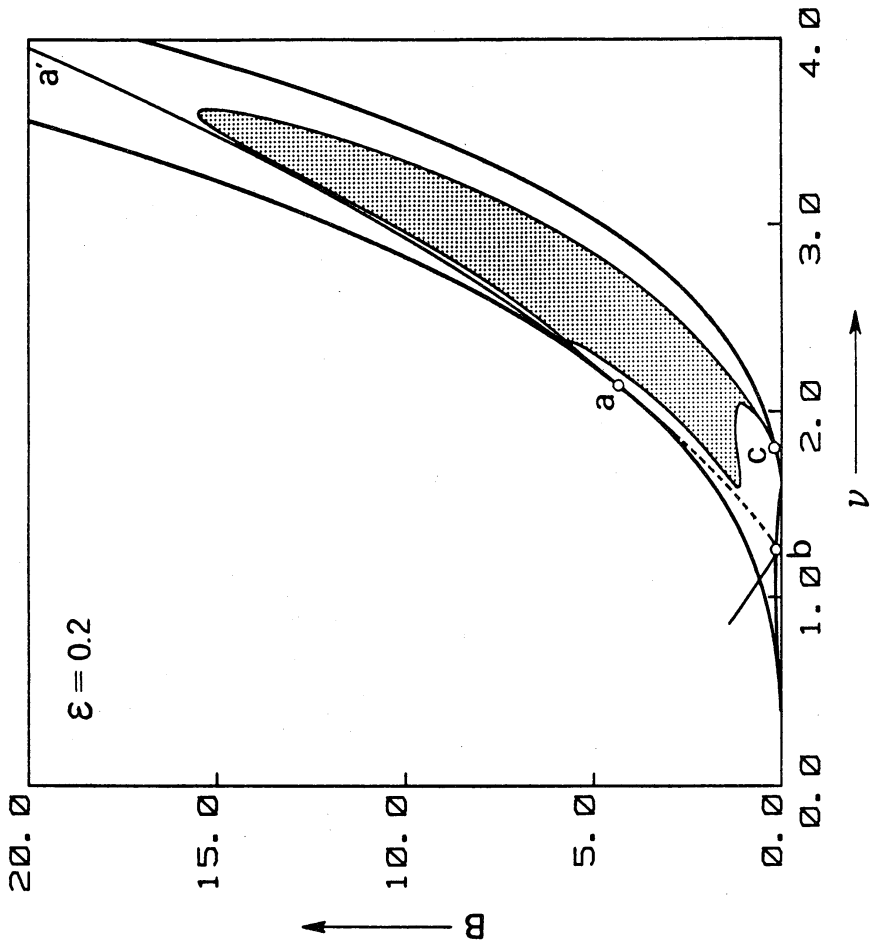


図11. DVP方程式のモクリック桌の分岐集合:  
(斜線領域の境界), (斜線領域で  
homoclinic 桌がみられる)

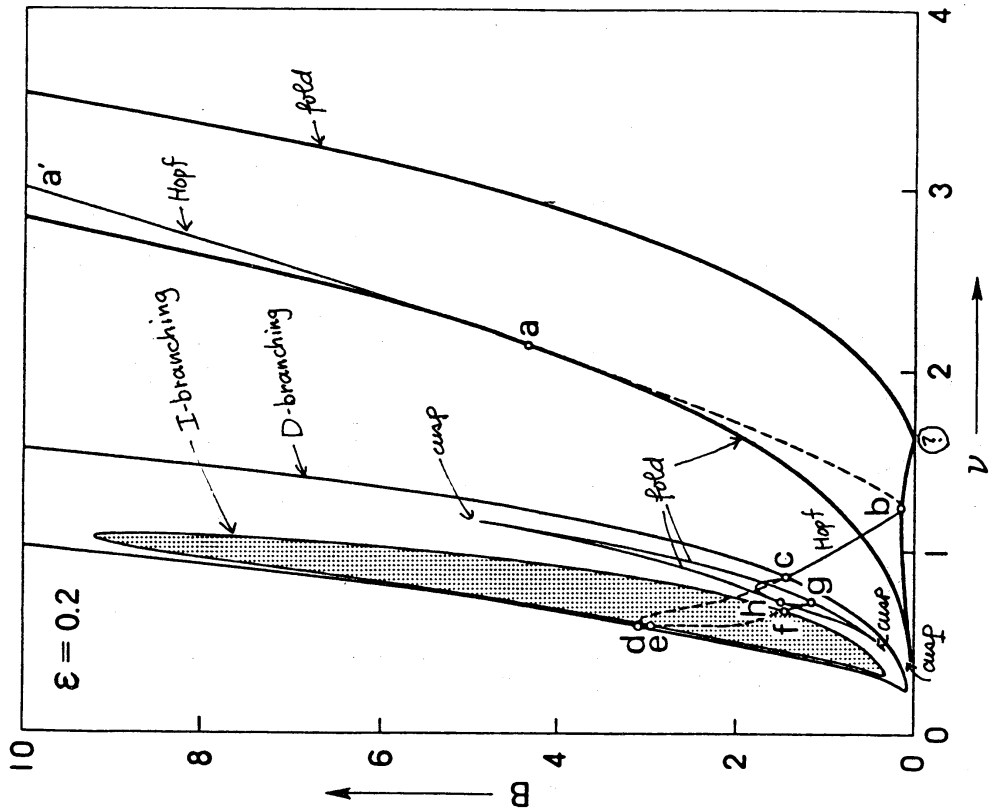
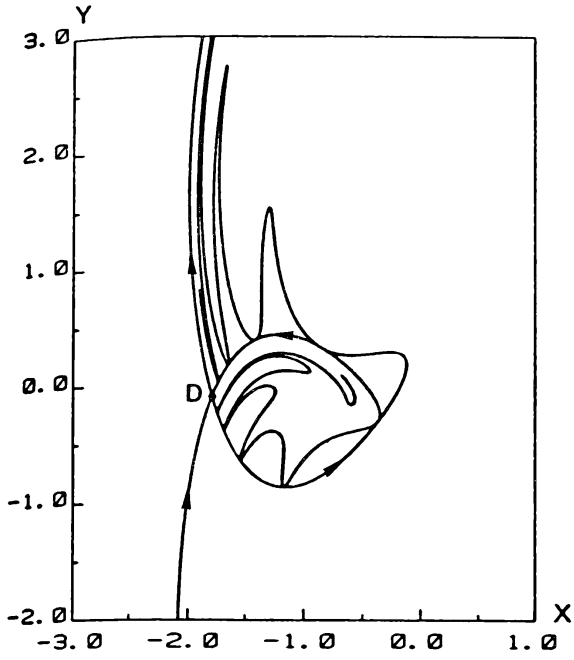
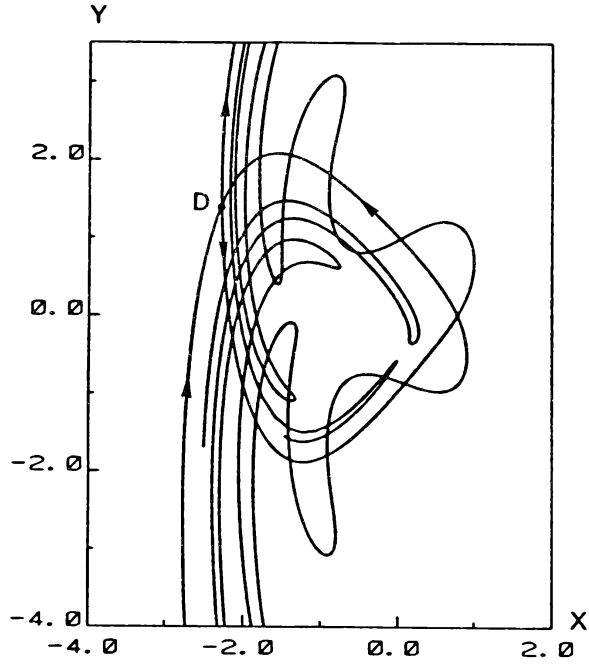


図10. DVP 方程式の分岐集合.



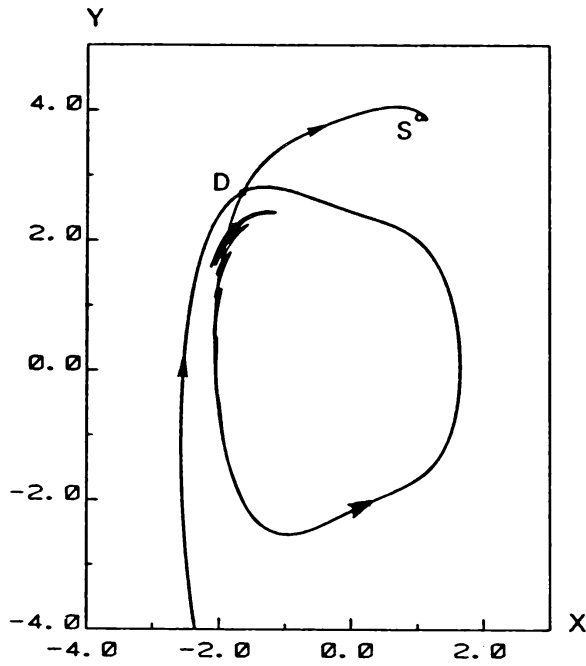
(a)  $B=3.0, \nu=1.9999$



(b)  $B=3.0, \nu=2.80$



(c)  $B=3.0, \nu=2.5376$



(d)  $B=0.5, \nu=1.9343$

图12. DVP方程式的 phase portraits.