数理解析研究所講究録
第443巻 1981年 184-190

Minimal Set の基本群について

慶応大・理工，石井一平

§1. 準備

M を3次元閉多様で，$H^1(M;\mathbb{R})$ は自明であるとする。さらに，M は minimal flow（＝すべての軌道が M 上稠密であるような flow）を許容するものとする。以下では，このような性質をもつ M について，その基本群の持つ特性を調べる。ここで，以下に使われる記号をまとめておく。

イ) ξ_t ： M 上の minimal flow.

ロ) Σ ： ξ_t に接しない codim-1 open submanifold

ハ) $T_\Sigma(x) = \inf\{t>0 \mid \xi_t(x) \in \overline{\Sigma}\}$

$\hat{T}_\Sigma(x) = \xi_{T_\Sigma(x)}(x)$ ： $x \in M$

ニ) $A_\Sigma = \{x \in \partial\Sigma \mid \hat{T}_\Sigma(x) \in \partial\Sigma\}$

$A^*_\Sigma = A_\Sigma \cup \hat{T}_\Sigma(A_\Sigma)$

ホ) $B_\Sigma = \{x \in \partial\Sigma \mid \hat{T}_\Sigma(x) \in \Sigma,\ \hat{T}^2_\Sigma(x) \in \partial\Sigma\}$

$B^*_\Sigma = B_\Sigma \cup \hat{T}^2_\Sigma(B_\Sigma)$

(A_Σ, B_Σ は有限集合で，$\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cap \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma) = \hat{T}_\Sigma(B_\Sigma)$ と仮定して一般性を失わない。)

へ) $\nu_0 = \nu_0(\Sigma) = \# A_\Sigma + \# B_\Sigma$

$\nu_1 = \nu_1(\Sigma) = \#(A_\Sigma^* \cup B_\Sigma^*)$

$\nu_2 = \nu_2(\Sigma)$: $\Sigma - (\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cup \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma))$ の連結成分の個数.

$\nu_3 = \nu_3(\Sigma)$: $\Sigma - \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)$ の連結成分の個数.

ト) C_ℓ ($\ell = 1, \cdots, \nu_1$), D_m ($m = 1, \cdots, \nu_2$), E_n ($n = 1, \cdots, \nu_3$) はそれぞれ $\partial\Sigma - (A_\Sigma^* \cup B_\Sigma^*)$, $\Sigma - (\hat{T}_\Sigma(\partial\Sigma) \cup \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma))$, $\Sigma - \hat{T}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)$ の連結成分を表わす。(これらの番号付は固定されているものとする。)

チ) $Y_0(\Sigma) = \partial\Sigma \cup \{\xi_t(a) \mid a \in A_\Sigma, 0 \leq t \leq T_\Sigma(a)\}$
$\cup \{\xi_t(b) \mid b \in B_\Sigma, 0 \leq t \leq T_\Sigma(b) + T_\Sigma(\hat{T}_\Sigma(b))\}$

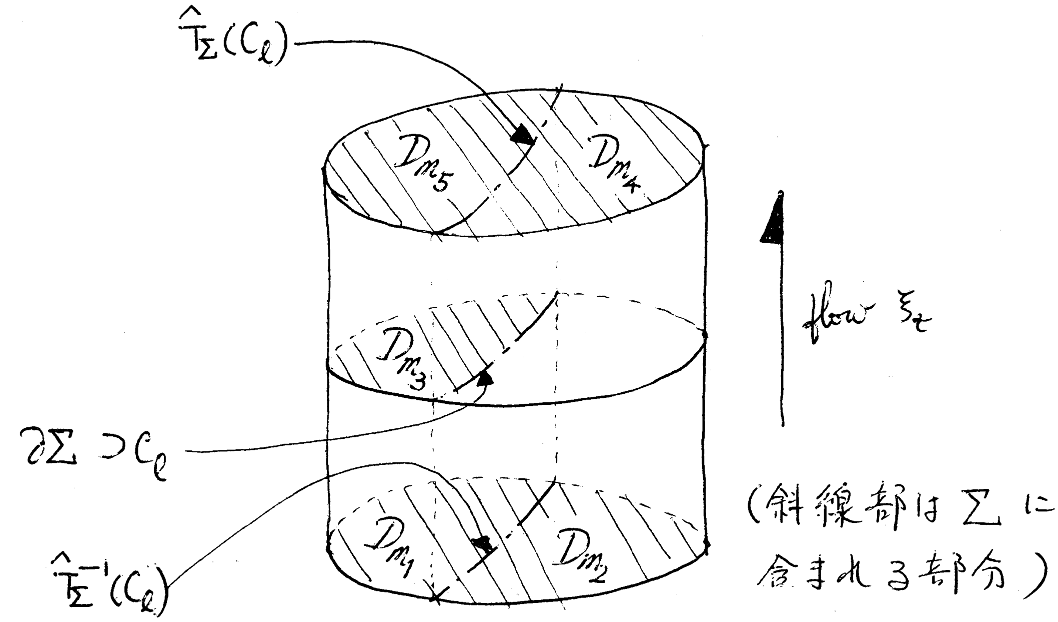
リ) $\{1, \cdots, \nu_1\}$ の部分集合 J に対して

$$Y(\Sigma; J) = Y_0(\Sigma) - \left(\bigcup_{\ell \in J} C_\ell\right)$$

と定義する。

§2. $\pi_1(M - Y(\Sigma; J))$ について.

まず各 C_ℓ ($1 \leq \ell \leq \nu_1$) に対して，D_{m_j} ($m_j = m_j(\ell)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) を，下の [Fig.] のように定める。次に $\mathbb{H} = (H_1, H_2, \cdots, H_{\nu_2}) \in (SL(2; \mathbb{C}))^{\nu_2}$ に対し，



[Fig.]

$G_\ell(H) \in SL(2;\mathbb{C})$ を

$$G_\ell(H) = H_{m_4}^{-1} H_{m_5} H_{m_3} H_{m_1} H_{m_2}^{-1}$$

$$(m_j = m_j(\ell))$$

と定義する。さらに $V(\Sigma;J) \subset (SL(2;\mathbb{C}))^{\nu_2}$ を

$$V(\Sigma;J) = \{H \,;\, G_\ell(H) = 1 \text{ for } \ell \in J\}$$

とする。一方

$$Q(\Sigma;J) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M - Y(\Sigma;J)),\, SL(2;\mathbb{C}))$$

とすると、$V(\Sigma;J)$, $Q(\Sigma;J)$ はそれぞれ $\mathbb{C}^{4\nu_2}$, $\mathbb{C}^{4r}$ (r は $\pi_1(M-Y(\Sigma;J))$ の生成元の個数)の中の代数的集合

と考えられる。ここで Σ は次の仮定をみたすものとする。

<u>仮定 I.</u> $H^1(D_m;\mathbb{R}) = H^1(E_n;\mathbb{R}) = \{0\}$

$(1 \leq m \leq \nu_2 \ ,\ 1 \leq n \leq \nu_3)$

このとき、次が成り立つ。

<u>命題 A.</u> $\dim Q(\Sigma;J) + 3(\nu_3 - 1) = \dim V(\Sigma;J)$

$M = S^3$ とすると、$\pi_1(M - Y(\Sigma;J))$ が free group となることがある。この場合には、$\dim Q(\Sigma;J) = 3\dim H^1(Y(\Sigma;J);\mathbb{R})$ であるから、命題 A により、$\dim V(\Sigma;J) = 3\dim H^1(Y(\Sigma;J);\mathbb{R}) + 3(\nu_3 - 1)$ となる。そこで次の仮定を設ける。

<u>仮定 II.</u> $V(\Sigma;J)$ は次の (i), (ii) を満たす成分 V_0 をもつ。

(i) $\dim V_0 > 3\dim H^1(Y(\Sigma;J);\mathbb{R}) + 3(\nu_3 - 1)$

(ii) ある $\mathbb{H} = (H_1, \cdots, H_{\nu_2}) \in V_0$ に対し、各 H_j は対角行列。

Σ, J が仮定 I および II を満たすとき、次のことが示される。

命題.B $\Upsilon(\Sigma;J)$ を $M-\Pi^*(\Sigma;J)$ の中で連続的に変形して得られる任意の1-次元 cell complex K に対し

$$\dim(\mathrm{Hom}(\pi_1(M-K), SL(2;\mathbb{C}))) > 3\dim H^1(K;\mathbb{R})$$

が成り立つ。但し，$\Pi^*(\Sigma;J)$ は下に定義される集合で，"連続的変形"とは $[0,1]\times\Upsilon(\Sigma;J)\longrightarrow(M-\Pi^*(\Sigma;J))$ なる連続写像 f で，$f(0,x)\equiv x$ を満たすものによって $f(1,\Upsilon(\Sigma;J))=K$ と表わされることである。

以下 Π^* を定義する。$J=\{l_1,\cdots,l_s\}$ とし，各 $l_j\in J$ に対し $p_j\in C_{l_j}$ をとり，$P=\{p_j,\hat{\tau}_\Sigma(p_j),\hat{\tau}_\Sigma^{-1}(p_j)\mid j=1,\cdots,s\}$，$P\cap\partial D_m=\{q_1^m,\cdots,q_{k_m}^m\}$ とする。そして，γ_j^m ($j=1,\cdots,k_m-1$) は，q_j^m と q_{j+1}^m とを D_m 内で結ぶ連続曲線とし，$\gamma^m=\bigcup_{j=1}^{k_m-1}\gamma_j^m$，$\Gamma=\bigcup_{m=1}^{\nu_2}\gamma^m$ ($P\cap\partial D_m=\phi$ のときは，$\gamma^m=\phi$ とする。) と定義する。さらに，$\Pi=\Pi(\Sigma,J;\Gamma)$ を

$$\Pi=\{\xi_t(x)\mid x\in\Gamma,\ -T_\Sigma(\hat{\tau}_\Sigma^{-1}(x))\le t\le T_\Sigma(x)\}$$

と定め，$\Xi\,(\subset\Sigma)$ を

$\Xi=\{x\in\Sigma-\Pi \mid x$ を含む $\overline{\Sigma-\Pi}$ の連結成分は $\partial\Sigma$ と交わる，あるいは $\hat{\tau}_\Sigma(\partial\Sigma)$ と $\hat{\tau}_\Sigma^{-1}(\partial\Sigma)$ との両方に交わる。$\}$

と定める。このとき，$\Pi^*=\Pi^*(\Sigma,J;\Gamma)$ は，

$$\Pi^*=\Pi\cup(\Sigma-\Xi)$$

と定義される集合である。（命題Bの中のπ^*はここに定義されたもので、実際には、Γのとり方にも依存する。）

［注］．仮定I, IIを満たすΣおよびJの存在は証明できる。

§3、$M=S^3$の場合

$M=S^3$で，Σ, Jは仮定I, IIを満たすとする。このとき、命題Bによれば、$Y(\Sigma;J)$を$M-\pi^*$の中でKに変形して$\pi_1(M-K)$が*free group*であるようにはできない。一方、$M=S^3$であるから、Mの中では$Y(\Sigma;J)$をK'に変形して$\pi_1(M-K')$が*free*となるようにすることができる。すなわち、π^*がこのような変形を阻害している。

そこで、"S^3上に*minimal flow*が存在するか？"（存在しないという予想が一般的である。）という問題を考えるとき、仮定I, IIを満たし、何らかの意味でπ^*が最小になるようなΣ, Jを考え、その満たすべき性質を調べることが有効であると思われる。

π^*の大きさを測る量としては、

$$\lambda(\Sigma;J)=3\times(\#J)-\#\{D_{in}\mid I\cap\partial D_{in}\neq\phi\}$$

のようなものが考えられる。仮定I, IIを満たし、この$\lambda(\Sigma;J)$を最小にするようなΣ, Jについては、いくつ

かの特性をもつことが示される。上記の問題を考える為には、"これらの特性が、minimal flowの存在と両立し得るか？"ということを調べなければならない。