数理解析研究所講究録
第443巻 1981年 243-255

shift の埋め込みについて

東大 理　笹野一洋

I. (sub)shift (of finite type)

$A=(A_{ij})$ を非負整数係数 $n\times n$ 行列とし，G を $1,\cdots,n$ を頂点とし，頂点 i と j とが，長さ 1 の A_{ij} 個の向き付けられた辺でむすばれている，1次元のグラフとする。

$$\Sigma_A \equiv \left\{ \begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to G : \text{continuous maps s.t.} \\ \quad \forall m \in \mathbb{Z} : \ g(m) \text{ は } G \text{ の頂点、} \\ \quad g \text{ は向きと，arc length とを保つ} \end{array} \right\}$$

とし，compact open topology を入れておく，

$\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ (homeo.) を $(\sigma(g))(t)=g(t+1)$ $(t\in\mathbb{R})$ で定義する。

<u>Def</u>　Σ_A 或るいは $\sigma:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 或るいは (Σ_A,σ) のことを <u>subshift of finite type determined by</u> A (或るいは，簡単に，<u>shift</u>，<u>subshift</u> 等）という。

$A_{ij} = 0$ or 1 $(\forall i, j)$ のとき，次の様に定義することもできる；

$$\Sigma_A \equiv \left\{ x = (\cdots\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots) \;;\; x_i \in \{1, \cdots, n\} \;:\; A_{x_i x_{i+1}} = 1 \;\; (\forall i) \right\},$$

$$\sigma : \Sigma_A \longrightarrow \Sigma_A$$
$$x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \longmapsto y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$
但，$y_i = x_{i+1}$. //

このとき，とくに，(Σ_A, σ) を n 個の symbol 上の sub-shift という。

連続函数 $\varphi : \Sigma_A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \equiv \{t \in \mathbb{R} \,;\, t > 0\}$ について，

$$sus(\Sigma_A, \varphi) \equiv \Sigma_A \times \mathbb{R} \big/ (x, \varphi(x)) \sim (\sigma(x), 0)$$

とおき，$sus(\Sigma_A, \varphi)$ 上の flow $sus_t(\sigma, \varphi)$ を，$\Sigma_A \times \mathbb{R}$ 上の flow $\varphi_s : (x, t) \longmapsto (x, t+s)$ から［$sus(\Sigma_A, \varphi)$ 上に］上の $\sim$ から induce される flow とする。

<u>Def</u>　$(sus(\Sigma_A, \varphi), sus_t(\sigma, \varphi))$ を，φ を <u>ceiling function</u> とする (Σ_A, σ) の <u>suspension</u> (<u>flow</u>) とよぶ。

<u>II. diffeo, flow $\rightsquigarrow$ shift, suspension</u>

M を compact smooth mfd，$f : M \to M$ を Axiom A diffeo.

とするとき，f の non-wandering set $\Omega(f)$ は次の様に分割される；

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \sqcup \cdots\cdots \sqcup \Lambda_k .$$

ここで，$\sqcup$ は disjoint union を意味するものとし，各 Λ_i は f-不変な閉集合；$f|\Lambda_i$ は (topologically) transitive.

このとき，上の各 Λ_i を basic set of f という。

$\boxed{1}$ [R. Bowen] [4]

各 basic set Λ_i に対して，非負整数行列 A_i と連続関数 $h_i : \Sigma_{A_i} \longrightarrow \Lambda_i$ とが存在し，次をみたす；

- h_i は finite-to-one な onto map で，かつ殆ど全てのところで one-to-one.
- 次の図式は commute する；

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{A_i} & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_{A_i} \\ h_i \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h_i \\ \Lambda_i & \xrightarrow{f|\Lambda_i} & \Lambda_i \end{array}$$

この定理は，diffeo の basic set が shift で"殆ど完全に"記述されることを示す。

次に flow について考える；

M を上と同じ，$\phi_t : M \to M$ を M 上の flow とする。このとき，次をみたす $X \subset M$ を $\{\phi_t\}$ の basic set という；

(0) X は ϕ_t-不変 (for $\forall t$) な閉集合

(1) X は stationary point (i.e. $\forall \phi_t$ で fix される点) をふくまない

(2) X は hyperbolic

(3) X 内の周期点全体は，X 内で稠密．

(4) $\phi_t|X$ は transitive.

(5) $U \supset X$ なる開集合 U が存在して，$X = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t U$

$\boxed{2}$ [R. Bowen] [3]

X を flow $\phi_t : M \to M$ の 1 次元 basic set とする。このとき (transitive) subshift Σ_A と ceiling function φ，並びに homeo. $h : X \to \mathrm{sus}(\Sigma_A, \varphi)$ とが存在して，次を可換にする；

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_t|X"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "h"] \\ \mathrm{sus}(\Sigma_A, \varphi) \arrow[r, "\mathrm{sus}_t(\sigma, \varphi)"'] & \mathrm{sus}(\Sigma_A, \varphi) \end{tikzcd}$$

注 この定理では "parameter もこめて conjugate" を主張している。

この定理は，flow の 1 次元 basic set が suspension で "完全に" 記述されることを示している。

III shift, suspension $\rightsquigarrow$ diffeo, flow

前節に述べた様に，flow や diffeo. の basic set から，shift（や，その suspension）への対応が与えられる。必然的に，その逆はどうか？という問題が考えられる．即ち；

［問題］$\left\{\begin{array}{l}\text{shift【の suspension】を与えたとき，それを diffeo}\\\text{【flow】の hyperbolic set として実現できるか？}\end{array}\right.$

これについて．一般的に，次の定理が成立する。

$\boxed{3}$［R.F. Williams］［7］

非負整数係数の irreducible matrix（即ち，対応する shift が top. transitive）の直和となる任意の行列 A について．$f ; S^3 \to S^3$: Smale diffeo が存在して，次をみたす；

(1) f は identity に isotopic

(2) f の index 0 の non-wandering set は．1つの sink．
f の index 3 の non-wandering set は．1つの source．

(3) f を index 1 の non-wandering set に制限したもの，及び index 2 のそれに制限したものは，各々 (Σ_A, σ) と conjugate である。（即ち，$\boxed{1}$ の h_i の様な homeo. が存在する。）

ここで，index = unstable 次元．とおく。

但，Axiom A と strong transversality をみたし，non-wandering set が 0 次元となる diffeo を <u>Smale diffeo.</u> という

一方，flow については；

④ [R. Bowen] [3]

A を transitive な，$m \times m$ 一行列で，成分は 0 あるいは 1 とし，$\varphi : \Sigma_A \to \mathbb{R}^+$ を連続写像とする。このとき $\forall k ; 1 \leq k < \infty$ について，$(2nm+1)$ 次元 C^k 多様体 M（n は十分大）と，flow $\phi_t : M \to M$ 及び，ϕ_t の basic set X が存在して，$(X, \phi_t | X)$ と $(\mathrm{sus}(\Sigma_A, \varphi), \mathrm{sus}_*(\sigma, \varphi))$ とは isomorphic（即ち，② の様な homeo h が存在する）。

[注] 上の定理で，φ を定数関数とすると $n = 1$，$k = \infty$ とできる。故に，上の帰結 "isomorphic" を "conjugate" にゆるめれば，M を $(2m+1)$ 次元 C^∞ 多様体，flow ϕ_t も C^∞ なる様にできる。（上の ③ を使えば，M が 4 次元にとれることもわかる。）

IV Smale diffeo の basic set としての subshift

Smale diffeo の basic set について，結果をまとめておく：

$\boxed{5}$ [J. Franks] [5]

$\{A_j\}_{j=0}^{m}$ を，非負整数係数行列 A_j の族で，各 A_j は irreducible な行列の直和，A_0 と A_m は permutation matrix なるもの とし，M を $\ell\,(\geqq 3)$ 次元 compact mfd とする。

さらに，M 上に Morse function $\varphi : M \to \mathbb{R}$ が存在して，
$\#\{\varphi$ の index j の critical pt$\}$ = reduced degree of A_j をみたすとする。このとき，

$$(*)\begin{cases} f : M \to M : \text{identity と isotopic な Smale diffeo が存在して，ある } k \geqq 1 \text{ に対して，} \\ f|(\text{index } j \text{ の basic set}) \underset{\text{conjugate}}{\cong} (\Sigma_{A_j^k}, \sigma) \end{cases}$$

ここで，A の <u>reduced degree</u> とは，多項式 $\det(I - tA)$ の係数を mod 2 で reduce して得られる多項式の次数。

$\boxed{6}$ [J. Franks] [5]

$\{A_j\}_{j=0}^{m}$，M^ℓ を $\boxed{5}$ と同じとする。さらに，M 上の Morse fn $\varphi : M \to \mathbb{R}$ で $\#\{$index j の crit pt of $\varphi\}$ = mod 2 Betti number of M をみたすものがあるとする。このとき，

$$(*) \iff d_q - d_{q-1} + \cdots \pm d_0 \geqq \beta_q - \beta_{q-1} + \cdots \pm \beta_0 \ (\forall q)$$
かつ
$$\Sigma (-1)^j \cdot d_j = \chi(M)$$

ここで，d_j は A_j の reduced degree，β_j は M の mod 2 Betti number.

$\boxed{7}$ [S. Batterson] [1]

M を compact surface, A_0, A_1, A_2 を $\boxed{5}$ の様な行列とする。
そのとき、

$$(*) \iff d_2 - d_1 + d_0 = \chi(M)$$

$\boxed{8}$ [J. Franks] [5]

任意の compact surface M に対して、或る A が存在して、
Σ_A は、いかなる Smale diffeo $f: M \to M$ のいかなる basic set とも conjugate でない。

$\boxed{9}$ [J. Franks] [6]

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、いかなる S^n 上にも、
$\Omega(f) \cong \Sigma_A \cup \{$有限コの周期点$\}$ なる Smale diffeo.
$f: S^n \to S^n$ は存在しない。

$\boxed{10}$ A を ODCM-type とする。このとき S^2 上の Smale diffeo $f: S^2 \to S^2$ で、$\Sigma_A \cup \{$有限コの周期点$\} \cong \Omega(f)$ なるものが存在する。
但、ODCM-type とは次の様に def される；

Def 連続写像 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ 或いは、写像度 1 の連続写像 $\varphi : S^1 \to S^1$ が <u>Markov map</u>

$\Leftrightarrow$ $\exists I_1, I_2, \cdots, I_k$: closed intervals で次を満たすものがある；

$$\begin{cases} \cdot \ \mathrm{int}\, I_i \cap \mathrm{int}\, I_j = \phi \quad (\forall i \neq \forall j) \\ \cdot \ \bigcup I_i = [0,1] \text{ or } S^1 \\ \cdot \ \varphi | I_i \text{ は monotone } (\forall i) \\ \cdot \ \forall i \text{ に対して } \exists J_i \subset \{1, 2, \cdots, k\} \text{ s.t. } f(I_i) = \bigcup_{j \in J_i} I_j \end{cases}$$

Def 非負整数係数行列 A が <u>ODCM-Type</u> (<u>one-dimensional continuous Markov-type</u>)

$\Longleftrightarrow$ $\exists \varphi : [0,1] \circlearrowleft$ or $S^1 \circlearrowleft$: Markov map s.t.

$A_{ij} =$ "$f(I_i)$ が I_j を cover する回数" $(\forall i, j)$

$\boxed{10}$ の証明は、全く自明であろう。即に、ここでは、省略することにする。

V Concluding Remarks

前節で見た様に、一般の A について、Σ_A を、mfd，とくに，2次元 surface に Smale diffeo の basic set として埋め込むことは難しい。故に，もう少し弱く，diffeo の hyperbolic な invariant set として埋め込むことはできないか？と考えてみる。このとき，$\boxed{3}$ により，mfd は2次元の時のみ意味がある。

また，当然求められる条件として，埋め込まれた Σ_A が isolated であることが要求されるだろう。

diffeo であることにこだわらなければ，次の定理が知られている；

$\boxed{11}$ [R. Bowen] [2]

周期点が稠密である様な任意の Σ_A に対して，Axiom A をみたす imbedding $f : U \to \mathbb{R}^2$ （U は $\mathbb{R}^2$ の open subset）が存在して $\Omega(f) \cong \Sigma_A$.

然し，$\boxed{11}$ に於いては，必然的に，$\Omega(f) \subsetneq \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i U$ となり，余り意味のある定理とは思えない。そこで，次の様なものを考える；

これまでに知られているbasic setは，いずれも，mfd内の，有限個のrectangles K_i の union $K=\cup K_i$ について，$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(K)$ なる形で得られるもののみである。そこで，それをまねて次の様な定義をする； M を cpt surface とする。

- $\mathbb{R}^2$ 上の rectangle $R=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ |u|\leqq 1,\ |v|\leqq 1\}$ の M 内への imbedding φ_i による imbedded image を K_i とおく； $K_i=\varphi_i(R)$。このとき，u 軸と平行な lines の image を K_i の "u-方向" ということにする。
- $f: M\to M$: diffeo について，f-invariant closed (hyp.) subset $X\subset M$ が 次をみたすとき，X を horse-shoe type という；

(1) $\exists K_1,\cdots,K_\ell$; as above s.t.

(a) $f(K_i)\cap K_j\neq\phi$ のとき，K_i の u 方向は，K_j の u-方向に，f によって，うつる

(b) $\forall i,j$; $\forall n$ について，

$$f^n(K_i)\cap K_j=\bigsqcup_{\substack{1\leq x_0,x_1,\cdots,x_n\leq \ell\\ A_{x_p x_{p+1}}=1\ (\forall p)}}\left(\bigcap_{\alpha=0,1,\cdots,n} f^\alpha(K_{x_\alpha})\right)$$

ここで，A は，$\ell\times\ell$ 行列で，成分は 0 or 1.

(2) X の nbd U が存在して，$\Omega(f)\cup U=X$.

<u>Conj.</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する shift Σ_A は、S^2 上のいかなる diffeo に対しても、その horse shoe type invariant set とは conjugate にならないであろう。

残念ながら，（7月以来．可成時間を経過したにもかかわらず．） 証明は．まだ できていない。

//

REFERENCES

[1] Batterson, S., Constructing Smale diffeomorphisms on compact surfaces, Trans.A.M.S. 257 (1980), 237-245.

[2] Bowen, R., Topological entropy and Axiom A, Proc. Pure Math. 14 (1970), 23-41.

[3] ________, One-dimensional hyperbolic sets for flows, J. Diff. Eq. 12 (1972), 173-179.

[4] ________, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer Lecture Notes in Math. 470.

[5] Franks, J., Constructing structurally stable diffeomorphisms, Ann. Math. 105 (1977), 343-359.

[6] ________, A reduced zeta function for diffeomorphisms, Amer. J. Math. 100 (1978), 217-243.

[7] Williams, R.F., Classification of subshifts of finite type, Ann. Math. 98 (1973), 120-153; Errata ibid. 99 (1974), 380-381.