数理解析研究所講究録
第 444 巻 1981 年 164-174

有限群の不変式とHilbert関数

都立大 理　中島晴久

§1. 可換環論とcombinatoricsの結びつきのなかには少くとも古典的な不変式論にあらわれるtableau, diagram, straightening formulaにかかわる分野と、generating functionなどの計算についての分野が存在する。upper bound conjectureにみられるようにStanleyの関心は後者にあると思われる。$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$とおきたとえばcombinatoricsにあらわれた(多項式)関数$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$に対して$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$なる形式巾級数を考えてそのふるまいの考察に次数環のHilbert級数を利用する。次数環の環論的特徴がHilbert級数に反映しているわけだからこの事情を用いる。特にこの次数環として有限群の不変式環のある系列を利用したりすることもあり(cf. [10])、実際coding theory (cf. [9])も含めてgenerating functionの計算への次数環の(そしてある場合にはもっと限定的に有限群の不変式環の)環論の応用といった研究がなされていた。有限

群の不変式環のHilbert級数は周知のように通常表現下ではMolienの結果があり、さまざまな応用を有しているのだが、modular表現になると事情は一転してしまう。たとえば巡回p-群の不変式環についてでさえそのHilbert級数の計算には多くのcombinatorialな技巧と膨大な紙数を要する(cf. [11])。しかもmodular表現下での不変式環の環論的特徴を考察するには、ある種の高次元のvector partitionの数え上げといったcombinatorialな数値の計算可能性が鍵となっている。従ってこうした分野では逆にcombinatoricsの環論への応用といった立脚点に立つ必要が出てくる。

さてこの小文ではStanleyのよく知られた研究([1,2,3])の1部を簡単に紹介して、あわせて[2]についての若干の注意を述べる。

§2. kを体とし、その上に有限生成な$\mathbb{N}$-gradedな多元環を$\mathbb{N}$-graded k-algebraとよぶ。$\mathbb{N}$-graded k-algebra Rがk-algebraとして1次のgraded partで生成されるときstandardであるという。$\mathbb{N}$-graded k-algebra上のgraded moduleはすべて有限生成なものだけを考える。そのような$\mathbb{Z}$-graded module $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$について$H(M,i) = \dim_k M_i$で定義される関数$H(M,\cdot) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$を$M$のHilbert関数といい、形式的Laurent級数$F(M,t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} H(M,i)t^i$をHilbert級

数といった。変数 $X_1, \cdots, X_n$ の単項式からなるある空でない集合 L が $Y \in L$ かつ $Y' | Y$ なる単項式 Y' について $Y' \in L$ をみたすならば L は単項式の order ideal といわれる。$\mathbb{N}$ で添数づけられた非負の整数の列 $(h_0, h_1, h_2, \cdots)$ は、適当な変数 $X_1, \cdots, X_n$ の単項式のある order ideal L が存在して $\deg X_i = 1$ とおくとき $h_i = |\{Y \in L \mid \deg Y = i\}|$ をみたすなら、O-列であると定義される。一方 Δ を $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 上の simplicial complex とする。$f_i = |\{\sigma \in \Delta \mid \sigma \text{ は } i\text{-simplex}\}|$, $d = \dim \Delta + 1$,

$$h(m) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{m-1}{i} & (m>0) \end{cases}$$

とおくと $h : \mathbb{N} \ni m \mapsto h(m) \in \mathbb{N}$ は次数 $\dim \Delta$ の polynomial function になり更に $(1-t)^d \sum_{m=0}^{\infty} h(m) t^m$ は t についての多項式 $h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d$ である。もちろん $h_0 = 1$ で、h_d は $\dim \Delta$ が奇数のときに $1 - \chi(\Delta)$ となり、そうでないときには $\chi(\Delta) - 1$ となる。当然のことながら f_i や h_i についての何らかの情報を必要とするわけで h_i の上限について

$$(\mathrm{UBC}) \quad h_i \leqq \binom{n-d+i-1}{i} \quad (0 \leqq i \leqq d)$$

なる評価がいつ成立するのか問題となった(下限についての評価もある, cf. [4])。ところで Δ に多項式環を square-free な monomial で生成される適当な ideal で割った環 A_Δ を

対応させる。すなわち $A_\Delta = k[X_1, \cdots, X_n] / (X_{i_1} \cdots X_{i_k} \mid \{\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}\} \notin \Delta)$ とおく。$\deg X_i = 1$ とおき A_Δ を standard graded k-algebra とみる。明らかに $(A_\Delta)_m$ の k-basis は Δ の face が support となるような $X_1, \cdots, X_n$ の degree m の monomial の reduction であるから

(2.1) $H(A_\Delta, m) = h(m)$

である。しかし

(2.2) (Macaulay, cf [1, 3]). $P : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ と固定された $c \in \mathbb{N}$ について次の条件は同値である：

(1) $H(R, i) = P(i)$ $(i \in \mathbb{N})$ となるような Cohen-Macaulay standard graded k-algebra R が存在して $\dim R = c$ をみたす。

(2) $(1-t)^d \sum_{i=0}^{\infty} P(i) t^i$ は t にかんする polynomial $p_0 + p_1 t + \cdots + p_k t^k$ で $(p_0, p_1, \cdots, p_k)$ は O-列である。

が定義からきわめて簡単に示されるから、次が基本的である。

(2.3) (Reisner, cf [1]). A_Δ が Cohen-Macaulay となるためには $\tilde{H}_i(\text{link of } \sigma, k) = 0$ ($i \neq$ dimension of link of σ, $\sigma \in \Delta$) となることが必要十分である。

例えば Δ の geometric realisation $|\Delta|$ が cell だとか sphere だとか仮定すれば A_Δ は Cohen-Macaulay である（一般に A_Δ の Macaulayness は $|\Delta|$ に依存しているだけなのであるが）。従って (2.1), (2.2) から $(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ は O-列であり、O-

列の定義からこの場合には(UBC)が成り立つ。Stanleyは(UBC)という数え上げの問題を次数環のHilbert関数に帰着させて解いているわけで、ここにcombinatoricsへの環論の応用の典型例が見い出されよう。

さてRをCohen-Macaulay graded k-algebraとするとき、Rのcanonical moduleをK_Rであらわす。K_Rはgraded R-moduleであるが容易に

(2.4)([3]). $F(K_R, t) = (-1)^d \lambda^q F(R, \frac{1}{t})$となる$q \in \mathbb{Z}$がある。

が成り立つ。ただし$n = \dim R$とした。これから直に

(2.5)([3]). Rが更にintegral domainならばRがGorensteinであるには$F(R, \frac{1}{t}) = (-1)^n t^q F(R, t)$なる$q \in \mathbb{Z}$があることが必要十分である。

を得る。もちろん(2.5)はCohen-Macaulayあるいはintegral domainという仮定をはずすと成立しない。こうしたHilbert級数の対称性によるGorenstein環の特徴づけは簡明な事実でありながらきわめて有用である。

§3. Vを標数p $(\geqq 0)$の体k上n次元のvector空間として、$GL(V)$の有限部分群Gをとる。Gは自然にVの対称多元環$k[V]$に作用するが、この作用で不変な元全体の作る部分環を$k[V]^G$であらわす。$k[V]$の自然なgraduationにより$k[V]^G$をgraded k-algebraとみる。まず$k = \mathbb{C}$とする。Gの既約指標χ

に対して、χ に応じる $\mathbb{C}[V]_i$ の既約部分加群全ての和を $\mathbb{C}[V]_{i,\chi}^G$ であらわし、$\mathbb{C}[V]_\chi^G=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{C}[V]_{i,\chi}^G$ とおくときこれは graded $\mathbb{C}[V]^G$-module となるが明らかに $\mathbb{C}[V]=\bigoplus_{\chi}\mathbb{C}[V]_\chi^G$ であるから、$\mathbb{C}[V]_\chi^G$ は Cohen-Macaulay $\mathbb{C}[V]^G$-module である。従って特に

(3.1) 次の条件は同値である。

(1) G は有限鏡映群である。

(2) $\mathbb{C}[V]^G$ は regular である。

(3) G のすべての既約指標 χ について $\mathbb{C}[V]_\chi^G$ は free $\mathbb{C}[V]^G$-module である。

が得られる。$\mathbb{C}[V]_\chi^G$ が free $\mathbb{C}[V]^G$-module である場合にはその homogeneous な basis を具体的に書き表わすといったことが問題となるが、こうした有限群の多項式表現の研究に際して、(G,χ) の Molien級数 $F_{G,\chi}(\lambda)=\chi(1)^{-1}F(\mathbb{C}[V]_\chi^G,\lambda)$ が役立つ。

(3.2) (Molien). $\bar{\chi}$ を χ の complex conjugate とすると

$$F_{G,\chi}(\lambda)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\bar{\chi}(\sigma)/\det(1-\lambda\sigma)$$

が成り立つ。

(2.5) と (3.2) を合わせると $\mathbb{C}[V]^G$ の Gorenstein 性の判定条件がすぐに求まる。とはいうものの一般に次のことが知られている。

(3.3) (Watanabe [7]). $\mathbb{C}[V]^G$ の canonical module は graded $\mathbb{C}[V]^G$-module として $\mathbb{C}[V]_{\det^{-1}}^G(-n)$ に同型である。

(3.4) (Goto [6]). G に含まれる pseudo-reflection $(\neq 1)$

$$\frac{w_1}{A(x_1)} = \cdots = \frac{w_i}{A(x_i)} = \cdots = \frac{w_{\lambda_1}}{A(\lambda_1)} = \frac{w_{\lambda_2}}{A(\lambda_2)} \tag{2.12}$$

そこでWの1例として各成分を

$$w_1 = A(x_1),\ \cdots,\ w_n = A(x_n),\ w_{\lambda_1} = A(\lambda_1),\ w_{\lambda_2} = A(\lambda_2) \tag{2.13}$$

と選ぶと

$$L_W \pi_\lambda(p) = (w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2})$$

$$L_W L_W \pi_\lambda(p) = \Big(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_2},\ \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \Big)$$

となる。従って

[命題3] $p = (x, \lambda) \in \Sigma$ とする。

(i) p が折り目形点ならば $w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}$ の両者が同時に零となることはない,

(ii) p がくさび形点ならば

(a) $w_{\lambda_1} = 0$ かつ $w_{\lambda_2} = 0$ であり,

(b) $\sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i}$, $\sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i}$ の両者が同時に零になることはない。

[分岐集合の計算法]

(i) 折り目形点: (2.2), (2.7) を (x, λ_1) あるいは (x, λ_2) について解く,

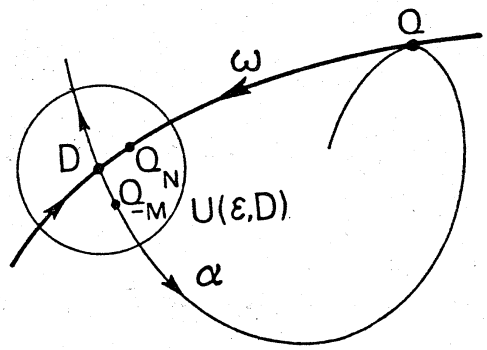
(ii) くさび形点: (2.2), (2.7) および $w_{\lambda_1} = 0$ (あるいは $w_{\lambda_2} = 0$) を (x, λ) について解く。

命題3はこれらの方程式系のJacobi行列式が零とならないことをいっている。したがってNewton法により折り目形点,くさび形点を求めることができる。

(2.2) homoclinic点の発生に関する分岐集合(2次元非自律系の例)

Poincaré写像 T_λ (2次元)が正不安定不動点 D $(0<\mu_1<1<\mu_2)$ を持つとし，点Dのα枝，ω枝が接してhomoclinic点が発生するパラメータλの値 $\lambda=\lambda_0$ を計算する。

点 $D\in\mathbb{R}^2$ を正不安定不動点とする:



$$T_\lambda(D)-D=0 \qquad (2.14)$$

Dのε近傍U(ε,D)をとり，その内部でα枝,ω枝の局所表現を計算する:

$$\begin{aligned} &\alpha\text{枝}: \ g_\alpha(x-D)=0 \\ &\omega\text{枝}: \ g_\omega(x-D)=0 \end{aligned} \qquad (2.15)$$

これらの枝を T_λ で $\mathbb{R}^2$ 内にのばし点Qで両枝が接してhomoclinic点が生じたとしよう(上図参照)。適当な正の整数M,Nをとれば

$$Q_{-M}\triangleq T_\lambda^{-M}(Q)\in U, \quad Q_N\triangleq T_\lambda^{N}(Q)\in U$$

とできる。すなわち

$$g_\alpha(Q_{-M}-D)=0,\ g_\omega(Q_N-D)=0,\ Q=T_\lambda^{M}(Q_{-M})=T_\lambda^{-N}(Q_N)$$

次に点Qで両枝の接ベクトルの方向が一致する条件を求める。まずU内でα枝のパラメータ付け，すなわちα枝を曲線 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2;\ s\mapsto\phi(s)$ で表わす。ここに $\phi(0)=D$，$\phi(s_\alpha)=Q_{-M}$ とする。今 $\mathbb{R}^2$ のベクトル場で曲線 ϕ について $\dfrac{d\phi}{ds}(s)=W(\phi(s))$ を考えると，点Qにおけるα枝の接ベクトルは

$$\left.\frac{d(T_\lambda^M\circ\phi)}{ds}\right|_{s=s_\alpha}=DT_\lambda^M(\phi(s_\alpha))\frac{d\phi}{ds}(s_\alpha)=DT_\lambda^M(Q_{-M})W_\alpha$$

でもちろん(2)はおきかえられるわけだから、少くともGがsolvableで$(p, |G|)=1$という条件下では(3)はGが有限鏡映群であるということと同値になってしまう。

Stanleyが[2]において$k[V]^G_\chi$を考察した背景を説明しよう。いま簡単にするために$k=\mathbb{C}$と改めておく。反例が渡辺敬一氏により見い出されているが、Stanleyは"$\mathbb{C}[V]^G$がcomplete intersectionならばある有限鏡映群$\tilde{G}$について$\tilde{G}\supseteq G\supseteq[\tilde{G},\tilde{G}]$となる"と予想した。そしてこのような$G$つまり

(3.7) 有限鏡映群$\tilde{G}$の正規部分群Gで$\tilde{G}/G$がabel群。

となるようなGについて$\mathbb{C}[V]^G$がcomplete intersectionとなる場合を決定しようと試みた。(3.7)の群Gは$\tilde{G}$のlinear characterの作る適当な群$\Phi(\tilde{G}, G)$のkernel群として実現されるわけで、$\mathbb{C}[V]^G=\bigoplus_{\chi\in\Phi(\tilde{G},G)}\mathbb{C}[V]^{\tilde{G}}_\chi$も成り立つ。$\mathbb{C}[V]^{\tilde{G}}_\chi$は(3.5),(3.6)によると$\mathbb{C}[V]^{\tilde{G}}f_\chi$である。こうして$\mathbb{C}[V]^G$の環論的な特徴がrelative invariantの計算からわかる。Stanleyが実際に$\mathbb{C}[V]^G$のcomplete intersection性を決定したのは$G=\tilde{G}\cap SL(V)$のときであったが、(3.7)の群Gで$\mathbb{C}[V]^G$がcomplete intersection, hypersurfaceとなるものはそれぞれ全て分類されている。前者については[5]と[8]を用いるが、紙数を要するので分類を述べない。後者については次のことのみ触れておく。

(3.8) (3.7)の群Gがpseudo-reflectionを含まないとき、次

の条件は同値である。

(1) $\mathbb{C}[V]^G$ は hypersurface.

(2) 有限鏡映群 H で $G = H \cap SL(V)$ となるものが存在して更に H の中の pseudo-reflection の order はすべて $[H : G]$ に等しい。

なおこれらのことは modular 表現の場合でも適当な変更の下に成立する。

REFERENCES

1. R. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macauley rings, Stud. in Appl. Math., 54 (1975), 135-142.
2. ———, Relative invariants of finite groups generated by pseudo-reflections, J. Algebra, 49 (1977), 134-148.
3. ———, Hilbert functions of graded algebras, Adv. Math., 28 (1978), 57-83.
4. B. Grünbaum, Convex Polytopes, Interscience, New York, 1967.
5. A. Dress, On finite groups generated by pseudo-reflections, J. Algebra, 11 (1969), 1-5.
6. S. Goto, On Gorenstein rings (in Japanese), Sûgaku, 31 (1979), 349-364.
7. K. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein, I, II, Osaka J. Math., 11 (1974), 1-8, 379-388.
8. ———, Invariant subrings which are complete intersections, I, (Invariant subrings of finite Abelian groups), Nagoya Math. J., 77 (1980), 89-98.
9. N.J.A. Sloane, A short course on error correcting codes, Springer, New York, 1975.
10. L. Solomon, Partition identities and invariants of finite groups, J.

Comb. Theory Ser. A, 23 (1977), 148-175.

11. G. Almkvist and R. Fossum, Decompositions of exterior and symmetric powers of indecomposable Z/pZ-modules in characteristic p and relations to invariants, Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil, Lecture Notes in Math., 641, Springer, Berlin, 1978, 1-111.