数理解析研究所講究録
第444巻 1981年 236-242

ある種のK3曲面の自己同型について

京大 理　上野健爾

解析曲面(即ち2次元コンパクト複素多様体，以下曲面ということにする) S は その標準束 K_S が解析的に自明であり，不正則数 $h^1(S, \mathcal{O}_S)$ が0のとき K3曲面と呼ばれる。$\mathbb{P}^3$ 内の非特異4次曲面や2次元複素トーラスを自然な involution で割った解析空間の minimal resolution による非特異モデル(これを Kummer 曲面と呼ぶ)などがその例である。

K3曲面 S は代数次元 $a(S)$ として 2, 1, 0 のすべての可能な値をとり得る。また $a(S)=2$，即ち代数曲面であるK3曲面のときは $\mathrm{Aut}(S)$ は無限群となる例が知られている。([4], [5].) これは Fano による例で，$\mathbb{P}^3$ 内のある種の4次曲面が登場するが，この例では位数2の自己同型が無限個あることが示される。ここでは $a(S)=2, 1$ のとき無限位数の自己同型が存在するK3曲面の例を与える。$a(S)=0$ の時は吉原氏による2次複素トーラスの例[6] (Example 4.1 の X_2) から対応する Kummer 曲面を

とると 無限位数の自己同型をもつことが分かる。

K3曲面の自己同型は常に離散的であることを注意しておく。Aut(S)が無限群となるK3曲面は高次元複素多様体の代数次元やアルバネーズ次元による分類の時に大切な役割をする。

§1. 種数2の曲線よりできるKummer曲面

以下Cは$\mathbb{C}$上定義された種数2の完備代数曲線とし、CのJacobi多様体をJ(C)と記す。J(C)は2次元複素トーラスであるのでJ(C)よりできるKummer曲面をKum(C)と記すことにする。Kum(C)はよく知られているように32個の非特異有理曲線を含んでいる。即ちアルバネーズ写像 $\varphi: C \longrightarrow J(C)$ をCのhyperelliptic involutionとJ(C)の自然なinvolution $\iota\ z \mapsto -z$ とcompatibleになるようにとると $\varphi(C)$ の $J(C)/\langle\iota\rangle$ の像のKum(C)へのひき戻しは$\mathbb{P}^1$となっている。このとき$\varphi(C)$はJ(C)の2等分点を丁度6個含んでいることに注意しておく。また$\varphi(C)$をJ(C)の2等分点だけずらしたものもinvolutionして不変であり、これは$\varphi(C)$とは一致しない。従って$\varphi(C)$と同様にしてKum(C)上に$\mathbb{P}^1$を定める。このようにして16個の$\mathbb{P}^1$がKum(C)上にできる。また$J(C)/\langle\iota\rangle$はJ(C)の2等分点に対応して16個のrational double pointsをもっており、そのresolutionより16個の$\mathbb{P}^1$が

できる。このようにして resolution よりでてくる16個の $\mathbb{P}^1$ を E 曲線と呼び，$\varphi(C)$ より出てくる16個の $\mathbb{P}^1$ を L 曲線と呼ぶことにする。1本の L 曲線は6本の E 曲線と交わることは，$\varphi(C)$ が丁度6個の2等分点を含むことより分かる。逆に1本の E 曲線は6本の L 曲線と交わることも分かる。実は16本の L 曲線と E 曲線とを次のように添数をつけることができることが知られている。(例えば[1],[2]を参照のこと。)

$$L_{ij}\cdot E_{kl}=\begin{cases}1, & k\neq i,\ l=j\ \text{ または }\ k=i,\ l\neq j\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

$$1\leq i,j,k,l\leq 4,$$

但し $L_{ij}\cdot E_{kl}$ は $\mathrm{Km}(C)$ 上での交点数を表わす。ちなみに，L_{ij} や E_{kl} の自己交点数は -2 である。

さて $\mathrm{Km}(C)$ 上に D，D' という因子を

$$D=2L_{11}+2E_{41}+E_{21}+E_{31}+L_{42}+L_{43}$$

$$D'=2E_{11}+2L_{14}+L_{12}+L_{13}+E_{24}+E_{34}$$

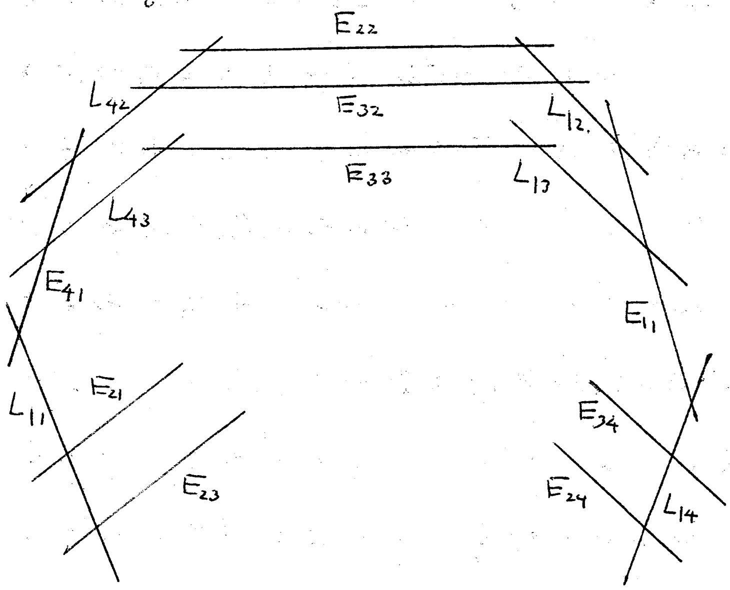
で定義する。これは

$$(*)\qquad D^2=D'^2=D\cdot D'=0$$

なる性質をもち，しかも D，D' は Kodaira による elliptic surface の singular fibres の分類表によると I_1^* 型の singular fibre の configuration になっている。以下 $S=\mathrm{Km}(C)$ とおくことにする。

Riemann-Roch の定理によって $\dim|D|=1$ であることが分か

り，$\Phi_{|D|}: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は elliptic surface になることもすぐ分かる。しかも(*)によって D, D' は $\Phi_{|D|}$ の singular fibres となっている。一方 E曲線 E_{22}, E_{32} と D, D' との交点数を計算すると 1 となる。



このことより E_{22}, E_{32} は elliptic surface $\Phi_{|D|}: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の holomorphic sections o, s をそれぞれあたえることが分かる。section o を zero section と考えることによって $\Phi_{|D|}: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は Kodaira [3] の意味で Basic member となり，Kodaira の記号を使うと s は $S_0^\#$ の holomorphic section となっている。$S_0^\#$ は S の開集合であり，$\mathbb{P}^1$ 上の group manifold になっている。$\Phi_{|D|}$ の regular fibre では $S_0^\#$ はその fibre と一致し，singular fibres D, D' ではそれぞれ $L_{42} - \mathcal{P}_1 \simeq \mathbb{C}$, $L_{12} - \mathcal{P}_2 \simeq \mathbb{C}$ $\mathcal{P}_1 = L_{42} \cap E_{41}$, $\mathcal{P}_2 = L_{12} \cap E_{11}$ となっている。従って $S_0^\#$ は D, D' に対応する fibre では有限位

数の non trivial な subgroup を持たない。s をこれらの fibre に制限すると 0 ではない（E_{22} と E_{32} とは交わらない。0 は $E_{22}\cap L_{42}$, $E_{22}\cap L_{12}$ に対応する）ので、ここでは無限位数となっている。

さて section 0 によって S を $k=\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ 上の楕円曲線 $\mathcal{E}$ とみることができる。このとき section s は $\mathcal{E}$ の k 有理点となる。従って $\mathcal{E}$ をこの k 有理点だけ平行移動すると、これは $\mathcal{E}$ の k 上定義された自己同型、従って S の双有理写像を定めるが、これは S が極小モデルであることより双正則写像であることが分かる。即ち s は $\mathrm{Aut}(S)$ の無限位数の元をを与える。一方 E_{33} も $\Phi_{|D|}$ の section を与えていることが分かる。この時 $g^k(E_{33})$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ はすべて相異なることも容易に分かる。以上によって次の結果を得る。

__定理__．__種数 2 の曲線 C に対応する Kummer 曲面 Km(C) は楕円曲面の構造をもつ。この楕円曲面は sections を無限個もち，従って特に Km(C) は無限個の $\mathbb{P}^1$ を含んでいる．また Aut(Km(C)) は無限位数の元を含む。__

注意．楕円曲面の構造は上の 1 種類ではなく沢山入れうることが F 曲線，L 曲線を使って簡単に示すことができる。

§2 代数次元1のK3曲面の自己同型.

前節の記号を使って $\varphi = \Phi_{|D|}$, $S = \mathrm{Km}(C)$ とおくことにする。$\varphi : S \to \mathbb{P}^1$ は basic member であった。これより

$$0 \to R^1\varphi_*\mathbb{Z} \to R^1\varphi_*\mathcal{O} \to \mathcal{O}(S_0^\#) \to 0$$

であることが分かる。$R^1\varphi_*\mathcal{O}$ は可逆層であることもすぐ分かる。これより

$$\to H^1(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}) \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(S_0^\#)) \to$$

なる exact sequence を得る。さて $H^1(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathbb{Z})$ は discrete であり、spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1, R^q\varphi_*\mathcal{O}_S) \Rightarrow H^{p+q}(S, \mathcal{O}_S)$$

は E_2-項で退化することより

$$H^2(S, \mathcal{O}_S) \simeq H^1(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S)$$

即ち $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S) = 1$ となることより $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(S_0^\#))$ は無元位数の元 η をもつ。すると $\varphi : S \to \mathbb{P}^1$ を η によって twist した曲面 S^η は代数次元 1 の楕円曲面となる。更に前節の δ に対応してできた自己同型 g は S^η にも自然に作用する。従って次の結果が得られた。

命題 <u>S^η は代数次元1のK3曲面であり $\mathrm{Aut}(S^\eta)$ は無限位数の元を含む。</u>

文献

1). Griffiths, P. and J. Harris. Principles of algebraic geometry. A. Wiley - Interscience Publication. New York 1978.

2). Hudson, R.W.H.T. Kummer's quartic surface. Cambridge University Press. 1905

3) Kodaira, K. On compact analytic surfaces II. Ann. of Math. 77 (1963), 563-626

4). Matsumura, H and P. Monsky. On the automorphism of hypersurfaces. J. Math. Kyoto Univ. 3 (1964), 347-361.

5). Fano, G. Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio. Rend. Reale Ist. Lombardo di Scienze e Lettere 39 (1906).

6) Yoshihara, H. The structure of complex tori with the automorphism of maximal degree. Preprint.