数理解析研究所講究録
第447巻 1981年 49-68

The dimension of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two

東大・理　　橋本喜一朗

0. Γ を $G(\mathbb{R})=Sp(2,\mathbb{R})$ の任意の lattice (i.e. 離散部分群で $vol(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))<\infty$ なるもの) とし，$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ を Γ に関する weight k $(\in \mathbb{N})$ の尖点形式のなす $\mathbb{C}$ 上の vector space とする。即ち，$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ は次の (i)−(ii) をみたす，Siegel 上半平面 $H_2=\{Z=X+iY\in M_2(\mathbb{C});\ {}^tZ=Z,\ Y>0\}$ 上の正則函数の全体である：

(i) $f(\gamma\langle Z\rangle)=\det(CZ+D)^k f(Z)\quad \forall\,\gamma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma$

(ii) $(\det Y)^{k/2}|f(Z)|$ は H_2 上有界.

ここで，$\gamma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in G(\mathbb{R})$ は $\gamma\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ により H_2 に作用している。

[問題] $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の次元を求めよ。特に $Sp(2,\mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対して，$\dim\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ を具体的に計算可能な形で求めよ。

1. 結果を述べる前に，まず $G(\mathbb{R})=Sp(2,\mathbb{R})$ の lattice Γ について注意をしよう：$G(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-rank $=2$ であるから，Margulis の定理より Γ は arithmetic である。特に，$\Gamma=$ non-uniform (i.e $\Gamma\backslash G(\mathbb{R}) \neq$ compact) ならば，$G(\mathbb{R})$ の $\mathbb{Q}$-form が存在して，Γ は $G(\mathbb{Z})$ と commensurable である。$G(\mathbb{Q})$ は，$\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数環 B に係数をもつ 2 次の unitary 群 $U(2, B)$ と同型である。従って，$G(\mathbb{Z})$ としては $U(2, \mathcal{O})$，$\mathcal{O}$ は B の極大整環，を取ることができる。$G(\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$-rank $= 2$ (resp. 1) $\Longleftrightarrow$ $B \cong M_2(\mathbb{Q})$ (resp. $B =$ division$/\mathbb{Q}$) であり，$\mathcal{O} = M_2(\mathbb{Z})$ とすると，$U(2, \mathcal{O}) \cong Sp(2, \mathbb{Z})$。

2. これまでに知られている結果を復習する。$\Gamma = Sp(2, \mathbb{Z})$ (および，implicit に主合同部分群 $\Gamma = \Gamma(2)$) の場合には，井草 [6]；$\Gamma = \Gamma(N)$，$N \geqq 3$ の場合には 山崎 [12]，森田 [7] Christian [2] の具体的公式がある。また，rank $G(\mathbb{Q}) = 1$ の場合の $\Gamma = \Gamma(N)$ $N \geqq 3$ に対して，荒川 [1]，山口 [11] の具体的公式がある。更に，$\Gamma(2) < \Gamma < Sp(2, \mathbb{Z})$ なるいくつかの Γ については井草の結果に基づく伊吹山 [5] の具体的公式がある。—— これらのうち，森田・Christian・荒川 氏の結果は，Selberg の trace-formula に基づくもので，$\Gamma(N)$，$N \geqq 3$ なる制限は，「$\Gamma = \Gamma(N)$ が torsion free $\Longleftrightarrow$ $N \geqq 3$ $\Longrightarrow$ trace formula への寄与は unipotent conjugacy class in Γ のみ」という事情による。次元公式への hyperbolic conjugacy class の寄与はないので，残る "elliptic" および，elliptic と unipotent の混合型である "p-unipotent (仮称)" なる共役

類からの寄与が，$\Gamma=\Gamma(N)\ N\geq 3$ では現れず，これらの計算が未解決である。

3. 次下本稿の問題は，Selbergのtrace formula を利用して上記の残された部分の計算を実行することにより，(一般のΓに対して) $\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma)$ を求めること 。Selberg の trace formula による最初の次元公式は次の様に述べられる：

$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ は，norm

$$\|f\|^2=\left(\int_{\Gamma\backslash H_2}(\det Y)^k|f(Z)|^2\,dZ\right)$$

$$dZ=(\det Y)^{-3}\,dX\,dY\ ,\quad Z=X+iY\in H_2$$

に関して有限次元の Hilbert space となり，その kernel function が Godement によって求められた。これより，$k\geq 5$ の時，

$$\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma)\ =\ \frac{a(k)}{\#Z(\Gamma)}\int_{\Gamma\backslash H_2}\sum_{\gamma\in\Gamma}H_\gamma(Z)\quad dZ\ ,$$

但し，$a(k)=2^{-8}\pi^{-3}(2k-2)(2k-3)(2k-4)$

$$H_\gamma(Z)=(\det Y)^k\det\left(\frac{Z-\overline{\gamma\langle Z\rangle}}{2i}\right)^{-k}\det(C\bar{Z}+D)^{-k}$$

$Z(\Gamma)=:\Gamma$の中心

4. $H_\gamma(Z)$ の基本的性質：$H_{g^{-1}\gamma g}(Z)=H_\gamma(g\langle Z\rangle)$ for $\forall g\in G(\mathbb{R})$. 従って"項別積分"が可能であれば ($\Longleftrightarrow$

$\Gamma\backslash H_2 = \mathrm{compact}$), 容易に次の形に変形できる：

$$\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma) = \frac{a(k)}{\# Z(\Gamma)} \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \int_{C_\Gamma(\gamma)\backslash H_2} H_\gamma(z)\, dz$$

但し，$C_\Gamma(\gamma) =:$ Γに於るγの中心化群，和はΓの共役類$\{\gamma\}_\Gamma$全体にわたる。この変形は$\Gamma\backslash H_2 \neq \mathrm{compact}$なる場合には不成立。しかし，parabolic なる共役類$\{\gamma\}_\Gamma$に対して適当な dumping factor を付けることによって正当化できる。次の変形の際，次の事実に注意する：

[補題] $\gamma \in \Gamma$ に対して，$C_{\mathbb{R}}(\gamma) =:$ $G(\mathbb{R})$に於る中心化群.

(i) $\mathrm{rank}\, G(\mathbb{Q}) = 1 \Longrightarrow C_\Gamma(\gamma)$はつねに$C_{\mathbb{R}}(\gamma)$の lattice

(ii) $\mathrm{rank}\, G(\mathbb{Q}) = 2 \Longrightarrow$ 次の例外を除いて$C_\Gamma(\gamma)$は$C_{\mathbb{R}}(\gamma)$の lattice となる：$\gamma \underset{G(\mathbb{Q})}{\sim} \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$, $-\det S \in (\mathbb{Q}^\times)^2$

(iii) 何れの場合にも，$C_{\mathbb{Q}}(\gamma)$の$\mathbb{Q}$-subgroup $C^0_{\mathbb{Q}}(\gamma)$が唯1つ存在して次の①−③をみたす：

① $C^0_{\mathbb{R}}(\gamma)$は compact な半直積因子をもたぬ.

② $C^0_\Gamma(\gamma) = C^0_{\mathbb{R}}(\gamma) \cap \Gamma$ は $C^0_{\mathbb{R}}(\gamma)$ の lattice である

③ $[\, C_\Gamma(\gamma) : C^0_\Gamma(\gamma)\,] < \infty$

この事実に基づいて，次の様な同値類をΓに入れる：

[定義] $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$が同一の family に属する：$[\gamma_1]_\Gamma = [\gamma_2]_\Gamma$

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\gamma_{1s} = \gamma_{2s}$ (i.e. γ_1, γ_2 の semi-simple factor が

一致する． 2) $C^{\circ}_{\mathbb{R}}(\gamma_1) = C^{\circ}_{\mathbb{R}}(\gamma_2)$)

すると，family なる概念は Γ−共役と両立するので，上記の次元公式を次の如く変形できる：(★) $\dim S_k(\Gamma) =$

$$\underbrace{a(k) \sum_{\{[\gamma]_\Gamma\}_\Gamma} \frac{vol\left(C^{\circ}_{\Gamma}(\gamma)\backslash C^{\circ}_{\mathbb{R}}(\gamma)\right)}{[C_\Gamma(\gamma) : C^{\circ}_{\Gamma}(\gamma)]} \lim_{s \to +0} \sum_{\delta \in [\gamma]_\Gamma}}_{\boxed{\Gamma\text{の数論的構造による部分}}} \underbrace{\int_{C^{\circ}_{\mathbb{R}}(\gamma)\backslash H_2} H_\delta(\hat{z}; s)\, d\hat{z}}_{\substack{\boxed{\text{解析的部分}} \\ (\Gamma\text{に independent})}}$$

但し，$H_\delta(\hat{z};s)$ は $H_\delta(z)$ に（必要なら）dumping factor をかけたものであり，左の和は Γ の family $[\gamma]_\Gamma$ の Γ−共役類全体にわたる。以下に視る様に，semi-simple でない共役類に対応する寄与は，1つの family にわたる和を取ることによって数論的にまとまった表示（例：zeta 函数の特殊値算）が可能となるのである。γ = semi-simple なら $[\gamma]_\Gamma = \{\gamma\}$ に注意。

5．［定理1］上記の公式中，$C^{\circ}_{\mathbb{R}}(\gamma)\backslash H_2$ 上の積分が消えない γ の $G(\mathbb{R})$−共役類を，その中心化群 $C^{\circ}_{\mathbb{R}}(\gamma)$ によって分類すると，次の12種からなる。各々に属する family の Γ−共役類の個数は有限である．

1) central $\gamma = \pm 1$

2) elliptic ＝ α型（regular を含む）; $\alpha(\mu,\nu) = k(\mu) \oplus k(\nu)$

---- $k(\mu)^2,\ k(\nu)^2,\ k(\mu)k(\nu) \neq 1$

3) elliptic ═ β型 ; $\beta(\mu) = k(\mu) \oplus 1_2$ --- $k(\mu)^2 \neq 1$

4) elliptic ═ γ型 ; $\gamma(\mu) = \begin{pmatrix} k(\mu) & 0 \\ 0 & k(\mu) \end{pmatrix}$ --- $k(\mu)^2 \neq 1$

$\gamma(\mu) \sim k(\mu) \oplus k(-\mu)$

5) elliptic ═ δ型 ; $\delta = 1_2 \oplus (-1_2)$

6) p-unipotent ═ $\hat{\beta}$型 ; $\hat{\beta}(\mu,\lambda) = k(\mu) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ & 1 \end{pmatrix}$

--- $k(\mu)^2 \neq 1,\ \lambda \neq 0$

7) p-unipotent ═ $\hat{\gamma}$型 ; $\hat{\gamma}(\mu,\lambda) = \begin{pmatrix} k(\mu) & \lambda\cdot k(\mu) \\ 0 & k(\mu) \end{pmatrix}$

--- $k(\mu)^2 \neq 1,\ \lambda \neq 0$

8) p- unipotent ═ $\hat{\hat{\delta}}$型 ; $\hat{\hat{\delta}}(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

--- $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

9) p-unipotent ═ $\hat{\delta}$型 ; $\hat{\delta}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (-1_2)$

--- $\lambda \neq 0$

10) unipotent ═ degenerate型 ; $\varepsilon_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus 1_2$

--- $\lambda \neq 0$

11) unipotent ═ definite型 ; $\varepsilon_2(S) = \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$

--- $S = {}^tS > 0$ or $-S > 0$

12) unipotent ═ indefinite型 ; $\varepsilon_3(S) = \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$.

---- $-\det S \in (\mathbb{Q}^\times)^2$.

$\left(\text{但し}, \ \rho_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \ i=1,2 \longmapsto \rho_1 \oplus \rho_2 = \begin{pmatrix} a_1 & & b_1 & \\ & a_2 & & b_2 \\ c_1 & & d_1 & \\ & c_2 & & d_2 \end{pmatrix} \right)$

6. <u>elliptic の積分</u> $I_0(\gamma)=\int_{C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma)\backslash H_2} H_\gamma(\hat{z})\,d\hat{z}$ とおく。

γ が elliptic なら $[\gamma]_\Gamma=\{\gamma\}$ であり，(γ が $G(\mathbb{Q})$ の parabolic subgroup に属しても) dumping factor は不要である。

[定理2] $I_0(\gamma)$ は次式で与えられる：

2) $\gamma=\alpha(\mu,\nu)$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma)=\{1\}$

$$I_0(\gamma)=\frac{1}{a(k)}\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-k}}{(1-\varepsilon_1^{-2})(1-\varepsilon_2^{-2})(1-\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1})}\quad\left(\varepsilon_1=e^{i\mu},\ \varepsilon_2=e^{i\nu}\right)$$

3) $\gamma=\beta(\mu)$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma)=1_2\oplus SL_2(\mathbb{R})$

$$I_0(\gamma)=\frac{1}{a(k)}\cdot\frac{i}{2^5\pi^2\sin\mu(1-\cos\mu)}\left\{(k-1)e^{-(k-2)\mu i}-(k-2)e^{-(k-1)\mu i}\right\}$$

4) $\gamma=\gamma(\mu)$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma)=\{g\oplus g\mid g\in SL_2(\mathbb{R})\}$

$$I_0(\gamma)=\frac{1}{a(k)}\cdot\frac{2k-3}{2^5\pi^2\sin^2\mu}$$

5) $\gamma=\delta$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma)=\{g_1\oplus g_2\mid g_1,g_2\in SL_2(\mathbb{R})\}$

$$I_0(\gamma)=\frac{1}{a(k)}\frac{(-1)^k(2k-2)(2k-4)}{2^9\cdot\pi^4}$$

7. <u>p-unipotent の積分</u> $I_0(\gamma;s)=\int_{C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma)\backslash H_2} H_\gamma(\hat{z};s)\,d\hat{z}$

かけるべき dumping factor は，γ が 0次元 cusp を固定する時は $(\det Y)^{-s}$，1次元 cusp のみを固定する時，$(y_1^{-1}\det Y)^{-s}$.

[定理3]

6) $\gamma = \hat{\beta}(\theta, \lambda)$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma) = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$I_0(\gamma; s) = -\left(\frac{1}{a(k)} \frac{1}{2^3 \pi \sin\theta \sin\theta/2} + O(s)\right) e^{-[(k-\frac{3}{2})\theta + (\mathrm{sgn}\lambda)\pi(s+1)/2]i} \times \frac{1}{|\lambda|^{s+1}}$$

7) $\gamma = \delta(\theta, \lambda)$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma) = \left\{\begin{pmatrix} 1_2 & \mathbb{R}1_2 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}\right\}$

$$I_0(\gamma; s) = \left(\frac{1}{a(k)} \frac{1}{\sin^2\theta \cdot 2^3 \pi} + O(s)\right) e^{(\mathrm{sgn}\lambda)\pi i(1+2s)/2} \times \frac{1}{|\lambda|^{1+2s}}$$

8) $\gamma = \hat{\hat{\delta}}(\lambda_1, \lambda_2)$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$I_0(\gamma; s) = \left(\frac{1}{a(k)} \frac{(-1)^k}{2^3 \pi^2} + O(s)\right) \frac{e^{-(\mathrm{sgn}\lambda_1)\pi i(s+1)/2}}{|\lambda_1|^{s+1}} \frac{e^{\pm(\mathrm{sgn}\lambda_2)\pi i(s+1)/2}}{|\lambda_2|^{s+1}}$$

9) $\gamma = \hat{\delta}(\lambda)$: $C^\circ_{\mathbb{R}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus SL_2(\mathbb{R})$

$$I_0(\gamma; s) = \left(\frac{1}{a(k)} \frac{(-1)^k (2k-3)}{2^6 \pi^3} + O(s)\right) \frac{e^{-(\mathrm{sgn}\lambda)\pi i(s+1)/2}}{|\lambda|^{s+1}}$$

これより、例えば 6) の場合、family $[\gamma]_\Gamma$ が

$$[\gamma]_\Gamma = g^{-1}\left\{ k(\theta) \oplus \begin{pmatrix} 1 & a+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} n \in \mathbb{Z} \\ a+n \neq 0 \end{matrix} \right\} g \quad \begin{pmatrix} \exists\, a \in \mathbb{Q} \\ \exists\, g \in G(\mathbb{Q}) \\ 0 \leq a < 1 \end{pmatrix}$$

と一有に normalize されるとき、trace formula への寄与は、

$$\lim_{s \to +0} \sum_{\delta \in [\gamma]_\Gamma} I_0(\delta; s) = -\frac{1}{a(k)} \frac{1}{2^3 \pi \sin\theta \sin\theta/2} e^{-(k-\frac{3}{2})\theta i} \times$$

$$\times \lim_{s\to +0}\left\{ e^{-\pi i(s+1)/2}\zeta(s+1,a) + e^{\pi i(s+1)/2}\zeta(s+1,1-a)\right\}$$

となって，Hurwitz の zeta 函数 $\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}$ の特殊値（&. 留数）で表示される。他の場合も事情は同様。

8. unipotent の積分

dumping factor は，10) = 不要，11) = $(\det Y)^{-s}$，12) = $(y_1^{-1}\det Y)^{-s}$.

［定理 4］

10) $\gamma = \varepsilon_1(\lambda)$: $C^0_{\mathbb{R}}(\gamma) = (1_2 \oplus SL_2(\mathbb{R}))\cdot\left\{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & 0 \\ \hline & & 1 & \\ & & * & 1 \end{array}\right)\right\}$

$$I_0(\gamma;s) = -\frac{1}{a(k)}\,\frac{2k-3}{2^4\pi^3}\,\frac{1}{|\lambda|^2}$$

11) $\gamma = \varepsilon_2(S)$: $C^0_{\mathbb{R}}(\gamma) = \left\{\left(\begin{array}{c|c} 1_2 & * \\ \hline & 1_2 \end{array}\right)\right\}$

$$I_0(\gamma;s) = \left(\frac{1}{a(k)}\,\frac{1}{2^3\pi^2} + O(s)\right)\frac{e^{\mp\pi i(3+2s)/2}}{(\det S)^{(3+2s)/2}} \qquad \mp \leftrightarrow S \gtrless 0$$

12) $\gamma = \varepsilon_3(S)$: $C^0_{\mathbb{R}}(\gamma) = \left\{\left(\begin{array}{c|c} 1_2 & * \\ \hline & 1_2 \end{array}\right)\right\}$

$$I_0(\gamma;s) = -\frac{1}{a(k)}\,\frac{1}{2^3\pi^2}\,\frac{1}{|\det S|^{3/2}} + O(s)$$

unipotent の場合のこれらの結果は [1][2][7] で知られているcase であり，特に 11) の積分の $[\gamma]_\Gamma$ 上の和は，2元2次形式の空間の lattice に対する（概均質）zeta 函数で表示される。

9. 以上の結果を(★)に代入して，任意のΓに対する$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$の次元公式が得られる。しかし，この公式によって次元を求めるには，第一にΓの元の"family" $[\gamma]_\Gamma$の共役類を分類しなければならぬ。$\gamma \neq$ semi-simple なら，大雑把に云って，$[\gamma]_\Gamma$は$\Gamma\backslash H_2$のcuspと対応しているので比較的容易であるが，$\gamma=$ elliptic の時は$[\gamma]_\Gamma=\{\gamma\}_\Gamma$の共役類の分類は大変めんどうである（$\Gamma=Sp(2,\mathbb{Z})$に対する場合には[8], [9]等の結果がある）。以下で我々は，Γに関するある条件の下で，この困難を避けられることを示す。

$M_2(B)$の十分大きなorder (ie, latticeであって1を含むring) Rが存在して，$\Gamma=R^\times\cap U(2,B)$となっていると仮定する。$\Gamma\ni g=$ semi-simple に対して，$Z(g)=: g$の$M_2(B)$に於るcommutor algebra とする。この時，次の図式が成立する：

$$\{g\}_{G(\mathbb{Q})}\cap\Gamma\Big/\underset{\Gamma}{\sim} \quad \underset{\text{だいたい同値}}{\longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l}Z(g)\text{の各order }\Lambda\text{に対して,}\\ \Lambda\text{を}R\text{へ optimal に埋込む}\\ \text{方法の }G(\mathbb{Q})\text{－同値類}\end{array}\right\}$$

正確には次の様になる：

$Z_G(g)=G(\mathbb{Q})\cap \overset{=C_{\mathbb{Q}}(g)}{Z(g)}$とおく。$Z(g)$の2つのorder Λ_1, Λ_2が同値$\Lambda_1\sim\Lambda_2 \Leftrightarrow \Lambda_2=z\Lambda_1 z^{-1}$ ($\exists\, z\in Z_G(g)$)とする。この時，

$$\{g\}_{G(\mathbb{Q})}=\coprod_{\Lambda/\sim}\{g,\Lambda\} \qquad \text{(disjoint)}$$

$$M(g,\Gamma)=\coprod_{\Lambda/\sim}M(g,\Gamma,\Lambda)$$

但し, $\{g,\Lambda\}=\{x^{-1}gx \mid x\in G(\mathbb{Q}),\ Z(g)\cap xRx^{-1}\sim\Lambda\}$

$M(g,\Gamma)=\{x\in G(\mathbb{Q})\mid x^{-1}gx\in\Gamma\}$

$M(g,\Gamma,\Lambda)=\{x\in M(g,\Gamma)\mid Z(g)\cap xRx^{-1}\sim\Lambda\}$

[補題] (i) $\{g,\Lambda\}\cap\Gamma/\underset{\Gamma}{\sim}\ \xrightarrow{\sim}\ Z_G(g)\backslash M(g,\Gamma,\Lambda)/\Gamma$

(ii) inclusion より引起される次の写像は $h_0(G,\Lambda)=1$

$$Z_G(g)\backslash M(g,\Gamma,\Lambda)/\Gamma \longrightarrow Z_G(g)_A\backslash M(g,\mathfrak{U},\Lambda)/\mathfrak{U}$$

但し, $h_0(G,\Lambda)=\Lambda$ の両側 G-類数, $\mathfrak{U}=\prod_p(R_p^\times\cap G(\mathbb{Q}_p))\times G(\mathbb{R})$, であって, $M(g,\mathfrak{U},\Lambda)$ は $M(g,\Gamma,\Lambda)$ と同様に定義される。右辺は直積 $\prod_p Z_G(g)_p\backslash M(g,(R_p^\times\cap G(\mathbb{Q}_p)),\Lambda_p)/(R_p^\times\cap G(\mathbb{Q}_p))$ に分解する。

(iii) $\gamma\in\{g,\Lambda\}\cap\Gamma$ に対して,

$$vol(C_\Gamma^\circ(\gamma)\backslash C_{\mathbb{R}}^\circ(\gamma))=vol((\Lambda^\times\cap C_{\mathbb{R}}^\circ(g))\backslash C_{\mathbb{R}}^\circ(g))=\text{indep. of }\gamma$$

$$[C_\Gamma(\gamma):C_\Gamma^\circ(\gamma)]=[(\Lambda^\times\cap G(\mathbb{Q})):(\Lambda^\times\cap C_{\mathbb{R}}^\circ(g))]=\text{indep of }\gamma$$

以上を用いて, $\dim\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の elliptic conjugacy class からの寄与 $\dim\mathfrak{S}_k(\Gamma)|_e$ を次の形に表すことができる

$$(\bigstar\bigstar)\quad \dim\mathfrak{S}_k(\Gamma)|_e=a(k)\sum_{\{g\}_{G(\mathbb{Q})}} I_0(g)\sum_{\Lambda} M_G(\Lambda)\prod c_p(g,\Lambda_p)$$

但し, $M_G(\Lambda)=:\dfrac{h_0(G,\Lambda)\,vol(\Lambda^\times\cap C_{\mathbb{R}}^\circ(g)\backslash C_{\mathbb{R}}^\circ(g))}{[(\Lambda^\times\cap G(\mathbb{Q})):(\Lambda^\times\cap C_{\mathbb{R}}^\circ(g))]}$ の, $\Lambda=$

$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_t$ にわたる和（Λ_i, $1 \le i \le t$, は Λ の genus 内の $Z_G(g)$-conj. class の代表）で，$M_G(\Lambda)$ は適当な zeta 函数の特殊値で表示される公式をもつ。Λ は genus の代表を動く。また，

$$c_p(g, \Lambda_p) = \#\left(Z_G(g)_p \backslash M(g, (R_p^\times \cap G(\mathbb{Q}_p)), \Lambda_p)/(R_p^\times \cap G(\mathbb{Q}_p))\right)$$
$$= 0 \text{ or } 1 \quad (\text{for almost all } p, \Lambda_p)$$

10. Explicit Formula

具体的な Γ を考えよう。ここでは次の2つの場合を考える。

(1) $\Gamma = \Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z}) \;\middle|\; C \equiv 0 \pmod{p} \right\}$

ただし，p = 奇素数 とする。

(2) $\Gamma = U(2, \mathcal{O})$ ・・・・ 記号は 1 参照.

両者ともに 9. の仮定をみたしており，p 以外の素点 ℓ では $R_\ell =: M_2(B_p)$ の極大 order，更に $\ell \nmid D(B)$ なら $R_\ell \cong M_4(\mathbb{Z}_\ell)$，$(R_\ell^\times \cap G(\mathbb{Q}_\ell)) \cong Sp(2, \mathbb{Z}_\ell)$ である。そこで上記（★★）中の因子 $c_p(g, \Lambda_p)$ の値は筆者と伊吹山氏の [4] において計算されているものと一致する。これらを有効に用いて，(1), (2) の Γ については完全に具体的な次元公式を求めることが可能である。

[注] もちろん，$\Gamma = Sp(2, \mathbb{Z})$ も同様であり，この時我々の方法による結果は井草 [6] と一致することが check できている。

記号：$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_4$ は上から順に $k \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ の値

を表すものとする。 $k(=\text{weight}) \geqq 5$

(1) $\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma_0(p))$

$$= \frac{1}{2^9 3^3 5}(p+1)(p^2+1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)$$

$$+ \frac{7}{2^9 \cdot 3^2}(-1)^k (p+1)^2 (2k-2)(2k-4)$$

$$+ \frac{5}{2^7 \cdot 3}\left(p+2+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)(2k-3) + \frac{1}{2 \cdot 3^3}(2k-3)\begin{cases} p+2+\left(\frac{-3}{p}\right) & \cdots\ p \neq 3 \\ 7 & \cdots\ p=3 \end{cases}$$

$$- \frac{1}{2^4 \cdot 3^2}(p+1)(2k-3) - \frac{(-1)^k}{2^3 \cdot 3}(p+1)(2k-3)$$

$$+ \frac{1}{2^3 \cdot 3^3}(p+1)\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\cdot\begin{pmatrix} 2k-3 \\ -k+1 \\ -k+2 \end{pmatrix}_3 + \frac{1}{2^3 3^2}(p+1)\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -k+1 \\ -k+2 \\ 1 \\ k-1 \\ k-2 \end{pmatrix}_6$$

$$+ \frac{1}{2^5 \cdot 3}(p+1)\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)\cdot\begin{pmatrix} k-2 \\ -k+1 \\ -k+2 \\ k-1 \end{pmatrix}_4 + \frac{1}{2^7}(-1)^k\left(p+2+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)$$

$$- \frac{1}{2^2 \cdot 3^3}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \begin{cases} p+2+\left(\frac{-3}{p}\right) & \cdots\ p \neq 3 \\ 1 & \cdots\ p=3 \end{cases} + \frac{1}{2^3 \cdot 3}(p+3) - \frac{1}{2^3 \cdot 3}(p+1)$$

$$+ \frac{1}{2^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_4 \times \begin{cases} 2 & \cdots\ p \equiv 3, 5 \\ 4 & \cdots\ p \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 8) \\ 0 & \cdots\ p \equiv 7 \end{cases} + \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_6 \times \left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2^2 \cdot 3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \begin{cases} 1 & \cdots\ p=3 \\ 2 & \cdots\ p \equiv 5, 7 \quad (\mathrm{mod}\ 12) \\ 4 & \cdots\ p \equiv 1 \\ 0 & \cdots\ p \equiv 11 \end{cases} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_5 \times \begin{cases} 4 & \cdots\ p \equiv 1 \\ 0 & \cdots\ p \equiv 2, 3, 4 \quad (\mathrm{mod}\ 5) \\ 1 & \cdots\ p = 5 \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_6 \times \left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) - \frac{1}{2 \cdot 3^2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_3 \times \left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) - \frac{2}{3^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_3 \times \left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2^3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}_4 \times \left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \frac{1}{2^3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}_4 \times \left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2^4}\left(3+\left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \frac{1}{2^4}\left(3+\left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \frac{1}{2\cdot 3}\left(3+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)$$

$$+\frac{(-1)^k}{2^3} + \frac{(-1)^k}{2^3} + \frac{(-1)^k}{2^3}\cdot\begin{cases}1 \cdots p \equiv 1\\ 2 \cdots p \equiv 3\end{cases} \pmod 4$$

$$+\frac{1}{2^2\cdot 3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}_{12} \times \left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)$$

〈数値例〉

$p \backslash k$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	0	2	0	5	0	10	0	16	0	23	1	35
5	0	5	0	13	0	25	3	44	6	66	16	100
7	0	11	0	25	5	56	15	95	28	145	58	222
11	2	31	9	80	33	164	80	288	158	462	278	694

$p \backslash k$	17	18	19	20	21	22	23	24
3	3	47	4	61	9	81	14	102
5	25	136	45	188	64	242	97	315
7	97	312	143	417	218	561	306	722
11	444	991	666	1365	953	1818	1311	2363

(2) $\underline{\Gamma = U(2, \mathcal{O})}$　B：不定符号四元数体 $\supset \mathcal{O}$ 極大整環

$D = D(B)$：B の判別式

$D(i\,;j) = \{p|D\ ;\ p \equiv i \pmod{j}\}$

$$\dim \mathfrak{S}_k(U(2,\mathcal{O})) = \frac{1}{2^9 \cdot 3^3 \cdot 5} \prod_{p|D} (p-1)(p^2+1)\cdot(2k-2)(2k-3)(2k-4)$$

$$+ \frac{1}{2^3 \cdot 3} \prod_{p|D} (p-1) - \frac{1}{2^3} \prod_{p|D} \left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right) - \frac{1}{2 \cdot 3} \prod_{p|D} \left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2^9 \cdot 3^2} (-1)^k (2k-2)(2k-4) \prod_{p|D} (p-1)^2 \times \begin{cases} 7 & \cdots\ 2 \nmid D \\ 13 & \cdots\ 2 | D \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{2^3 \cdot 3^3} \prod_{p|D} (p-1)\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{pmatrix} 2k-3 \\ 1-k \\ 2-k \end{pmatrix}_3$$

$$+ \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} \prod_{p|D} (p-1)\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1-k \\ 2-k \\ 1 \\ k-1 \\ k-2 \end{pmatrix}_6$$

$$+ \frac{1}{2^5 \cdot 3} \prod_{p|D} (p-1)\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right) \times \begin{pmatrix} k-2 \\ 1-k \\ 2-k \\ k-1 \end{pmatrix}_4$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2^7 \cdot 3} \sum_{D_o^* | 2D}^{*} \prod_{l | D_o^*} (l-1) \prod_{p | 2D/D_o^*} \left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 3 & \cdots\ 2 \nmid D,\ 2 | D_o^* \\ 5 & \cdots\ 2 | D,\ 2 | D_o^* \text{ or } 2 \nmid D,\ 2 \nmid D_o^* \\ 11 & \cdots\ 2 | D,\ 2 \nmid D_o^* \end{cases}$$

$$+ \frac{2k-3}{2^7 \cdot 3} \sum_{D_e^* | 2D}^{*} \prod_{l | D_e^*} (l-1) \prod_{p | 2D/D_e^*} \left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 3 & \\ 5 & \cdots\ (\text{同上}) \\ 11 & \end{cases}$$

（D_o^* は奇数個の，D_e^* は偶数個の，$2D$ の素因子の積なるものの全体にわたる．次も同様；$2D \to 3D$．）

$$+\frac{1}{2^3 \cdot 3^3}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}_3 \times \sum^*_{D_0^* | 3D} \prod_{l | D_0^*}(l-1) \prod_{p | 3D/D_0^*}\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 1 & \cdots\ 3 | D_0^* \\ 4 & \cdots\ 3 \nmid D,\ 3 \nmid D_0^* \\ 16 & \cdots\ 3 | D,\ 3 \nmid D_0^* \end{cases}$$

$$+\frac{2k-3}{2^3 \cdot 3^3} \sum^*_{D_e^* | 3D} \prod_{l | D_e^*}(l-1) \prod_{p | 3D/D_e^*}\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right) \times \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 16 \end{cases}$$

$$+\frac{1}{12}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\\-1\\-1\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}_{12} \times \prod_{p | D}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right)\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right) + \frac{1}{2 \cdot 3^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}_6 \times \prod_{\substack{p | D\\ p \neq 2}}\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)^2 \times \begin{cases} 2 & \cdots\ 2 \nmid D \\ 5 & \cdots\ 2 | D \end{cases}$$

$$+\frac{1}{2 \cdot 5}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}_5 \times \prod_{p | D} 2 \prod_{p \in D(-1;5)} 2 \times \begin{cases} 0 & \cdots\ \bigcup_{i=1}^{3} D(i;5) \neq \phi \\ 1 & \cdots\ \qquad = \phi,\ 5 | D \\ 2 & \cdots\ \qquad = \phi,\ 5 \nmid D \end{cases}$$

$$+\frac{1}{2^3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}_4 \times \prod_{\substack{p | D\\ p \neq 2}} 2 \prod_{p \in D(-1;8)} 2 \times \begin{cases} 0 & \cdots\ D(1;8) \neq \phi \\ 1 & \cdots\ D(1;8) = \phi \end{cases}$$

$+ H_{12}$;

$H_{12} = 0$ if $D(1;12) \neq \phi$

(以下, $D(1;12) \doteq \phi$ とする)

(i) $6 \nmid D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p | D} 2 \prod_{p \in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{1}{2} & \cdots\ D(-1;12) \neq \phi \\ 0 & \cdots\ D(-1;12) = \phi,\ \#D(5;12) = \text{even} \\ 1 & \cdots\ \qquad = \phi,\ \#D(5;12) = \text{odd} \end{cases}$$

$$+\frac{1}{24}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p\in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{cases} \cdots (\text{同上})$$

(ii) $2\nmid D$, $3|D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p|D} 2 \prod_{p\in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} \frac{3}{4} & \cdots D(-1;12)\neq\phi \\ \frac{1}{2} & \cdots D(-1;12)=\phi,\ \#D(5;12)=\text{even} \\ 1 & \cdots D(-1;12)=\phi,\ \#D(5;12)=\text{odd} \end{cases}$$

$$+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p\in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} 3/4 \\ 1 \\ 1/2 \end{cases} (\text{同上})$$

(iii) $2|D$, $3\nmid D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p|D} 2 \prod_{p\in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} 3/4 & \cdots D(-1;12)\neq\phi \\ 1 & \cdots D(-1;12)=\phi,\ \#D(5;12)=\text{even} \\ 1/2 & \cdots D(-1;12)=\phi,\ \#D(5;12)=\text{odd} \end{cases}$$

$$+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p\in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} 3/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases} \cdots (\text{同上})$$

(iv) $6|D$ の時,

$$H_{12} = \frac{(-1)^k}{12} \prod_{p|D} 2 \prod_{p\in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} 9/8 & \cdots D(-1;12)\neq\phi \\ 5/4 & \cdots D(-1;12)=\phi,\ \#D(5;12)=\text{even} \\ 1 & \cdots D(-1;12)=\phi,\ \#D(5;12)=\text{odd} \end{cases}$$

$$+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_3 \times \prod_{p|D} 2 \prod_{p\in D(-1;12)} 2 \times \begin{cases} 9/8 \\ 1 \\ 5/4 \end{cases} \cdots (\text{同上})$$

＜数値例＞

• $D=2\cdot 3$ の時

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma)$	0	4	2	8	5	15	10	25	15	34	26

• $D=2\cdot 5$ の時

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma)$	2	13	5	26	19	56	41	98	70	149	123

• $D=3\cdot 5$ の時

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma)$	8	34	29	86	85	183	178	331	318	536	531

[註] 上記の公式に於ては，Γの共役類のリストがある場合にはそれを利用した（[8]，[9]）。その際，共役類からの寄与はまとめないで別々に書いた。この公式に $k=4$ を代入しても $\dim \mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の正しい値が得られると予想される。$k=3$ についても，補正項 $+1$ を付加すれば正しい次元の値が得られると予想される。— 最後に，最近対馬[10]によって $\Gamma=Sp(2,\mathbb{Z})$ の場合の $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の次元が Riemann-Roch の定理の応用により求められたことを付記する。

References

1. Arakawa, T. The dimension of the spaces of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two related to a quaternion unitary group, J. Math. Soc. Japan Vol 33, No. 1, 1981, 125-145.

2. Christian, U. Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. 277 (1975) 130-154

________, Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. 296 (1977) 108-118.

3. Hashimoto, K. The dimension of the space of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two, to appear.

4. Hashimoto, K. and Ibukiyama, T. On class numbers of positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, Vol 27-3, 549-601.

5. Ibukiyama, T. On symplectic Euler factors of genus two, (thesis) to appear.

6. Igusa, J. On Siegel modular forms of genus two,(II), Amer. J. of Math. 86 (1964), 392-412.

7. Morita, Y. An explicit formula for the dimension of the space of Siegel modular forms of degree two. J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo, Vol 21 (1974), 167-248.

8. Münchhausen, I. Explizite Bestimmung der Konjugiertenklassen der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades, to appear.

9. Sakamoto, J. On the contribution from the torsion-elements to the dimension formula of the spaces of Siegel modular forms of degree two (incomplete and partially incorrect), Master thesis. 1975, Univ. of Tokyo.

10. Tsushima, R. On the space of Siegel cusp forms of degree two , to appear.

11, Yamaguchi, H. The parabolic contribution to the dimension of the space of cusp forms on Siegel space of degree two, (preprint).

12. Yamazaki, T. On Siegel modular forms of degree two, Amer. J. Math. 98. (1976), 39-53.