数理解析研究所講究録
第 450 巻 1982 年 220-228

L^2-cohomology on pseudomanifolds

東工大 理 長瀬正義

Kähler package として一括される諸定理, 例えば, Poincaré duality, Lefschetz hyperplane theorem 等々を, singular space の cohomology にまで一般化しようという研究は, 種々なされている。ただし, その方向づけは, cohomology それ自身は通常のものを使い定理を適当に修正するというものであった。ところが, 最近, cohomology を適当に修正し, 定理そのものは弱めることなく証明しようという試みがなされ, いくつかの成果があがりつつある。その試みでは, cohomology は, intersection homology なるものに取ってかわられることになる。

そこで, 本稿では, intersection homology なるものの説明, 並びに, intersection homology と L^2-cohomology との間に存在する de Rham の定理に似た関係について解説する。未だ, conjecture の状態にある pure Hodge 分解, Hard Lefschetz の一般化には, こうした関係を活用するのが有効であろうと(筆

者には）思われる。

<u>注意</u> Poincaré duality，Lefschetz hyperplane theorem は，既に証明されている。

§1 定義

n 次元 pseudomanifold X の PL構造と共調している三角形分割 T より定まる実係数鎖複体を $C_*^T(X)$ とおき，そうした T に関する $C_*^T(X)$ 達の帰納的極限を $C_*(X)$ と書く。また，X の stratification $X=X_n \supset X_{n-1}=X_{n-2} \supset X_{n-3} \supset \cdots \supset X_0$ を一つ定め，固定する。さらに，$\underbrace{\text{整数列}}_{\text{pervasityと呼ばれる}}$ $\bar{p}=(p_2,p_3,\cdots p_n)$，ただし，$p_2=0$，$p_k \le p_{k+1} \le p_k+1$，を用意する。この時，$C_*(X)$ の部分複体

$$IC_i^{\bar{p}}(X)=\left\{ \xi \in C_i(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } k \text{ に関して} \\ \dim(|\xi| \cap X_{n-k}) \le i-k+p_k \\ \dim(|\partial\xi| \cap X_{n-k}) \le i-1-k+p_k \end{array} \right\}$$

の i 次元 homology 群を $IH_i^{\bar{p}}(X)$ と書き，i 次元 intersection homology 群と呼ぶ。$IH_*^{\bar{p}}(X)$ は，stratification の取り方によらないため，$X_{n-2}=\phi$ なる stratification が存在するなら，通常の homology 群に一致してしまうことを注意しておく。

一方，open Riemannian manifold X 上の外微分 d の定義域を，$\mathrm{dom}\, d_i=\{\alpha \in \Lambda^i(X) \cap L^2\Lambda^i(X) \mid d\alpha \in L^2\Lambda^{i+1}(X)\}$，ただし，$\Lambda^i(X)$ は，滑らかな i-forms 全体を，$L^2\Lambda^i(X)$ は，二乗可積分

なi-forms全体を意味する，と定め，その（グラフ・ノルムに関する）閉包を$\bar{d}$とおく。そして，双対鎖複体$\{\mathrm{dom}\,d_i\}_i$，$\{\mathrm{dom}\,\bar{d}_i\}_i$ のi次元cohomology群を，L^2-cohomology群と呼ぶ。両者は，自然に一致するので，区別することなく$H^i_{(2)}(X)$なる記号で表現する。

§2 Intersection homology と L^2-cohomology の関係

Xをcompactで境界のないn次元stratified spaceとする。stratification $\mathcal{S}=(X=X_n\supset X_{n-1}=X_{n-2}\supset X_{n-3}\supset\cdots\supset X_0)$と，その近傍系$\mathcal{T}=\{(T_{(j)},\pi_{(j)},\lambda_{(j)},S_{(j)},\pi'_{(j)},h_{(j)})\}_j$ は固定されている。$\{(T_{(j)},\pi_{(j)},\lambda_{(j)})\}_j$は，普通言うところの$\{X_{(j)}=X_j-X_{j-1}\}$の閉近傍系である。$S_{(j)}=\lambda_{(j)}^{-1}(1)$，$\pi'_{(j)}=\pi_{(j)}|S_{(j)}$，同相写像$h_{(j)}:T_{(j)}\to M(S_{(j)})$，ただし$M(S_{(j)})=(S_{(j)}\times[0,\infty))\cup X_{(j)}/(x,0)\sim\pi'_{(j)}(x)$を，その定義の中に込めたのは，後に$X_{(n)}$の計量を特定するためである。尚，我々の考察対象は，$X_{(n)}$がXでdenseな場合である。

[3]に従い，直線族

$$\{r_{(j)}(\varepsilon):T_{(j)}-X_{(j)}\xrightarrow{h_{(j)}}M(S_{(j)})-X_{(j)}\xrightarrow{\text{射影}}S_{(j)}\xrightarrow{h_{(j)}^{-1}}\pi_{(j)}^{-1}(\varepsilon)\}$$

を使ってXを三角形分割し，それによりpseudomanifoldとしての構造を固定する。pseudomanifoldとしてのXのstratificationは，部分多面体であるX_j達で与える。

一方，perversity $\bar{p}$に従属する$X_{(n)}$の計量を以下のように定義

する。一般に，manifold Y 上の二つの計量 g, g' が p.s.r.-同値である（$g \underset{p.s.r.e.}{\sim} g'$）とは，$Y$ の恒等写像が，計量 g をもつ Y と，計量 g' を持つ Y との間の p.s.r.-同値写像であることを意味する（[1] p.97）。また fibre 束 $\pi_{(j)}: T_{(j)} \to X_{(j)}$ の $x \in X_{(j)}$ での自明写像 $k: U \times \pi_{(j)}^{-1}(x) \to \pi_{(j)}^{-1}(U)$ は，$\pi_{(k)}, \lambda_{(k)}$ 達と共調的であるとする。

<u>定義</u>　$X_{(n)}$ 上の計量 g が非負実数列 $\vec{c} = (c_2, c_3, \cdots c_n)$ に従属しているとは，各 j と，任意点 $x \in X_{(j)}$ の近傍 U 上での任意の（上の意味の）自明写像 k に対して，U 上の計量 g_U で，

$$g|_{\pi_{(j)}^{-1}(V) \cap \lambda_{(j)}^{-1}([0,\varepsilon)) \cap X_{(n)}}$$
$$\underset{p.s.r.e.}{\sim} k_* \left(g_U|_V + dr \otimes dr + \lambda_{(j)}(\cdot)^{2c_{n-j}} g|_{\pi_{(j)}^{-1}(x) \cap \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon) \cap X_n} \right),$$

ただし，$\varepsilon > 0$ は十分小さく，V は x の近傍で $V \subset \bar{V} \subset U$ となっているものとする，を満たすものが存在することを意味する。

<u>定義</u>　$\bar{p} \leq (0,0,1,1,2,2,\cdots)$ なる perversity $\bar{p}$ に従属する $X_{(n)}$ の計量とは，以下を満たす非負実数列 $\vec{c} = (c_2, \cdots c_n)$ に従属する計量のこととする。

$$\begin{cases} 2p_k \leq k-3 \text{ なら } & \dfrac{1}{k-1-2p_k} \leq c_k < \dfrac{1}{k-3-2p_k} \\ 2p_k = k-2 \text{ なら } & 1 \leq c_k < \infty \end{cases}$$

<u>補題</u>　任意の非負実数列 $\vec{c}$ に従属する $X_{(n)}$ の計量は，p.s.r.-同値なものを除いて一意に存在する。

そこで，以下では，perversity $\bar{p} \leq (0,0,1,1,\cdots)$ を固定し，それに従属する計量を $X_{(n)}$ に入れておくこととする。

以下の我々の目標は，de Rham の定理の一般化であるが，strata どうしが複雑にからみあい影響を及ぼしあっているので，表現は，どうしても複雑な形となる。それを出来るだけ回避する為，必要な道具立てを天下り的に列挙してしまう。

$\varepsilon > 0$ は十分小さく取ってあるとする。

$$W(\varepsilon) = X - \bigcup_{i \leq n-2} \lambda_{(i)}^{-1}(\varepsilon)$$

$$T_j(\varepsilon) = \lambda_{(j)}^{-1}([0,\varepsilon)) \cap (X - \bigcup_{i \leq j-1} \lambda_{(i)}^{-1}([0,\varepsilon])) \cap X_{(n)}$$

$$S_j(\varepsilon) = \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon) \cap (X - \bigcup_{i \leq j-1} \lambda_{(i)}^{-1}([0,\varepsilon))) \cap X_{(n)}$$

とおく。各列 $(x_0, x_1, \cdots x_{n-2})$，$x_j = -1, 0$ 又は 1，に対して，以下の二条件により帰納的に定まる compact manifolds の組を，$\langle x_0, x_1, \cdots x_{n-2} \rangle$ とおく。

(i) $\langle 0, \cdots 0 \rangle = (W(\varepsilon), \phi)$

(ii) $\langle x_0, \cdots x_{j-1}, 0, \cdots 0 \rangle = (A, B)$ なら

$$\begin{cases} \langle x_0, \cdots x_{j-1}, -1, 0, \cdots 0 \rangle = (A, (A \cap \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon)) \cup B) \\ \langle x_0, \cdots x_{j-1}, 1, 0, \cdots 0 \rangle = (A \cap \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon), B \cap \lambda_{(j)}^{-1}(\varepsilon)) \end{cases}$$

である。

de Rham の cohomology 群よりなる以下の長完全列が存在することは自明である。

$$\cdots \xrightarrow{j_j^*} H^{i-1}(\langle x_0, \cdots x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \cdots x_{n-2}\rangle) \xrightarrow{\delta_j^*} H^i(\langle x_0, \cdots x_{j-1}, -1, x_{j+1}, \cdots x_{n-2}\rangle)$$
$$\xrightarrow{i_j^*} H^i(\langle x_0, \cdots x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots x_{n-2}\rangle) \xrightarrow{j_j^*} H^i(\langle x_0, \cdots x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \cdots x_{n-2}\rangle) \xrightarrow{\delta_j^*} \cdots$$

$\bar{p}=(p_2, p_3, \cdots p_n)$ は，"適当な狭義単調整数列 $1=k_{-1}<k_0<\cdots<k_m=n$ を取ると，$k_{l-1}<k\leq k_l$ なる k に対して $p_k=l$ である" と仮定し，以下のような de Rham cohomology 群を考える。

<u>定義</u>

$$IH_{\bar{p}}^i(X)$$

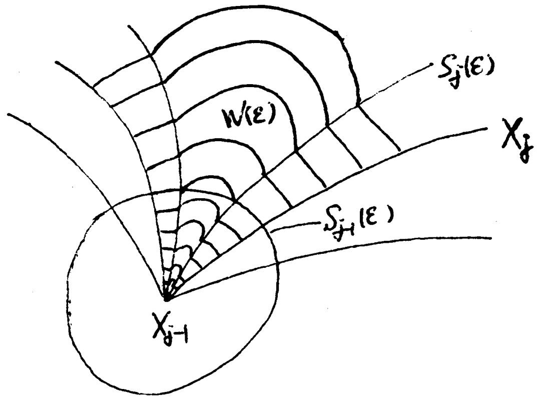
$$=\begin{cases} H^0(\langle 0, \cdots 0\rangle) & ;\ i=0 \quad \cdots\cdots(1) \\[2mm] i_{n-i-1}^*(H^i(\langle 0, \cdots 0, \overset{n-i-1}{-1}, \cdots -1\rangle)) & ;\ 1\leq i<k_0-1 \quad \cdots\cdots(2) \\[2mm] \displaystyle\bigoplus_{\substack{(j_l, \cdots j_0) \\ \text{s.t. } j_l=n-i-l-1 \\ j_l<j_{l-1}\leq n-k_{l-1} \\ \vdots \\ j_1<j_0\leq n-k_0}} \Big(\prod_{0\leq t\leq l} i_{j_t}^*\Big)\Big(\prod_{\substack{j_l\leq u\leq j_0 \\ u\neq j_t \\ (0\leq t\leq l)}} \delta_u^*\Big)\big(H^{n-j_0-1}(\langle 0, \cdots 0, \underset{j_l}{-1}, 1, \cdots 1, \underset{j_{l-1}}{-1}, 1, \cdots 1, \underset{j_t}{-1}, 1, \cdots 1, \underset{j_0}{-1}, \cdots -1\rangle)\big) & ;\ k_{l-1}-l\leq i<k_l-(l+1) \ (l=1, \cdots m-1) \quad \cdots(3) \\ & \text{又は } k_{m-1}-m\leq i<n-m \ (l=m) \quad (4) \\[2mm] \displaystyle\bigoplus_{\substack{(j_{l-1}, \cdots j_0) \\ \text{s.t. } -1\leq j_{l-1}\leq n-k_{l-1} \\ \vdots \\ j_1<j_0\leq n-k_0}} \Big(\prod_{0\leq t\leq l-1} i_{j_t}^*\Big)\Big(\prod_{\substack{0\leq u\leq j_0 \\ u\neq j_t \\ (0\leq t\leq l-1)}} \delta_u^*\Big)\big(H^{n-j_0-1}(\langle 1, \cdots 1, \underset{j_{l-1}}{-1}, 1 \cdots 1, \underset{j_t}{-1}, 1, \cdots 1, \underset{j_0}{-1}, \cdots -1\rangle)\big) & ;\ i=n-l \ (l=1, \cdots m) \quad \cdots\cdots(5) \\[2mm] H^n(\langle -1, \cdots -1\rangle) & ;\ i=n \quad \cdots\cdots(6) \end{cases}$$

ただし，$m=0$ の場合，(2), (3) (5) は，あらわれてこない。

<u>注意</u>　以下のような包含関係があるとみなしてよい。

$$\begin{cases} (2)\text{ の場合の } IH_{\bar{p}}^i(X) \subset H^i(\langle 0, \cdots 0, \overset{n-i-1}{-1}, \cdots -1\rangle) \\ (3), (4)\text{ の場合の } IH_{\bar{p}}^i(X) \subset H^i(\langle 0, \cdots 0, \overset{n-i-l-1}{-1}, \cdots -1\rangle) \\ (5)\text{ の場合の } IH_{\bar{p}}^i(X) \subset H^i(\langle -1, \cdots -1\rangle) \end{cases}$$

<u>定義</u>　$W(\varepsilon)$ 上の form Φ に対して $X_{(n)}$ 上の form $\tilde\Phi=\tilde\Phi_0$ を以下のように帰納的に定義する；$W(\varepsilon)\cup T_{n-2}(\varepsilon)$ 上の form $\tilde\Phi_{n-2}$ を、$W(\varepsilon)$ 上 $\tilde\Phi_{n-2}=\Phi$、$T_{n-2}(\varepsilon)$ 上 $\tilde\Phi_{n-2}=(\Phi|_{S_{n-2}(\varepsilon)}$ の自然な拡張）によって定義する。帰納的に、$W(\varepsilon)\cup T_{n-2}(\varepsilon)\cup\cdots\cup T_j(\varepsilon)$ 上の form $\tilde\Phi_j$ に対して、$W(\varepsilon)\cup T_{n-2}(\varepsilon)\cup\cdots\cup T_{j-1}(\varepsilon)$ 上の form $\tilde\Phi_{j-1}$ を、$W(\varepsilon)\cup T_{n-2}(\varepsilon)\cup\cdots\cup T_j(\varepsilon)$ 上、$\tilde\Phi_{j-1}=\tilde\Phi_j$、$T_{j-1}(\varepsilon)$ 上、$\tilde\Phi_{j-1}=(\tilde\Phi_j|_{S_{j-1}(\varepsilon)}$ の自然な拡張）によって定義する。



図式的に書くと左図のようになる。尚 $\tilde\Phi_j|_{S_{j-1}(\varepsilon)}$ 達は、$S_{j-1}(\varepsilon)$ における tangent 成分であるから $\tilde\Phi_{j-1}$ 達は、$S_{j-1}(\varepsilon)$ のところで、tangent 成分のみ連続であり、normal 成分は一般に不連続となっている。

<u>補題</u>　写像 $\Phi\mapsto\tilde\Phi$ は、上記注意の右辺から $H^i_{(2)}(X_{(n)})$ への写像を導く。

さて、最終的な結論を述べることになるが、実は、我々は X に、以下のような条件を課する。

<u>条件</u>　$j\le n-2$ のとき、$X_{(j)}$ は、（空集合でない場合）$(0,1)^j$ の有限個の直和に微分同型である。

この条件が満たされていない場合、intersection homology と

L^2-cohomology との仲立ちとなる $N_p^*(X)$ を，前述のように明記することは困難となる。筆者には，$N_p^*(X)$ を明確に書き下しておくことが重要であると思われるのでこの条件をおいたわけである。また，intersection homology が stratification の取り方によらないことを思えば，与えられた stratification の X_{n-2} を適当に三角形分割し条件を満たすものにおきかえてしまえば，intersection homology の研究には充分なはずである。

さて，前述の補題より，我々は，写像 $E^*: N_p^i(X) \to H_{(2)}^i(X)$ を得たことになる。そして，この拡張写像は，実は同型写像である。

<u>定理</u>　$E^*: N_p^i(X) \cong H_{(2)}^i(X_{(n)})$

また，$\Lambda^i(W(\varepsilon)) \otimes IC_i^{\bar{p}}(X) \ni (\phi, \xi)$ に対して $P(\phi, \xi) = \int_{\xi \setminus X_{n-2}} \tilde{\phi}$ とおくと，この二次形式は，$N_p^i(X) \otimes IH_i^{\bar{p}}(X)$ 上の二次形式 P^* を導く。そして

<u>定理</u>　$P^*: N_p^i(X) \otimes IH_i^{\bar{p}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ は，非退化である。

これら二つの定理の証明は，strata に関する帰納法による。

これら二つの定理より以下のような結論を得る。

<u>定理</u>　$(IH_i^{\bar{p}}(X))^* \cong H_{(2)}^i(X_{(n)})$

参考文献

[1] J. Cheeger : On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, Proc. of Sym. in Pure Math. 36 (1980), 91-146.

[2] J. Cheeger, M. Goresky and R. MacPherson : L^2 cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties, preprint.

[3] M. Goresky : Triangulation of stratified objects, PNAS, USA, 78 (1978), 193-200.

[4] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection homology theory, Topology, 19 (1980), 135-162.

[5] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection homology II, preprint.

[6] M. Nagase : De Rham Hodge theory on a manifold with cone-like singularities, preprint.

[7] M. Nagase ; L^2-cohomology of a manifold with singularities, preprint.

[8] M. Nagase ; L^2-cohomology and intersection homology of stratified spaces, preprint.

(尚, intersection homology に関する参考文献の詳しいリストは, AMS, 1981, Summer institute on singularities, Humboldt State University, Arcata, California, にある。)