数理解析研究所講究録
第 451 巻 1982 年 37-86

H^p 空間の実解析的理論

東大 理　　宮地晶彦

Fefferman-Stein の論文[15]を中心に標題の理論の初学者向けの解説をする.

本論にはいる前に Hardy-Littlewood 最大関数を想起しておこう. これは $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ に対して

$$(Mf)(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)|\,dy \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

で定義され, 次の評価が成り立つ:

$$(*) \qquad m\{x \mid (Mf)(x) > \lambda\} \leq \frac{2\|f\|_{L^1}}{\lambda} \quad , \quad \lambda > 0,$$

$$(**) \qquad \|Mf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \quad , \quad 1 < p \leq \infty.$$

ただし m は Lebesgue 測度をあらわす.

§1. Hardy-Littlewood と Burkholder-Gundy-Silverstein の定理

上半平面$\{x+it \mid x\in\mathbb{R}, t>0\}$上の正則関数 f で

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p}=\sup_{0<t<\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+it)|^p dx\right)^{1/p}<\infty$$

なるもの全体を $\mathcal{H}^p$, $0<p<\infty$, とする. 同様に上半平面上の実調和関数で上記の積分の $\sup<\infty$ なるもの全体を h^p とする. $f\in\mathcal{H}^p \Rightarrow \mathrm{Re}f\in h^p$ は明らかであるが, この逆は $1<p<\infty$ の時しか成り立たない. 詳しく言うと, $1<p<\infty$ ならば, $u\in h^p \Rightarrow \exists f\in\mathcal{H}^p$, $u=\mathrm{Re}f$ が成り立つ (これは Hilbert 変換の L^p $(1<p<\infty)$ 有界性) が, $0<p\leq 1$ の時はこれが成り立たない ([12] §§4.5~4.6 参照). ところが

$$(N_\alpha u)(x)=\sup_{(y,t):\,|x-y|<\alpha t}\{|u(y+it)|\},$$

$$x\in\mathbb{R},\ \alpha>0,$$

なる最大関数を用いると, $p\leq 1$ の場合まで込めて, $f\in\mathcal{H}^p$ となるための $\mathrm{Re}f$ に関する必要十分条件を与えることができる. それがこの節の標題にあげた次の定理である:

<u>定理A.</u> $0<p<\infty$ とする.

(i) $f\in\mathcal{H}^p \Longrightarrow N_\alpha(\mathrm{Re}f)\in L^p$ for every $\alpha>0$.

(ii) 逆に u が上半平面上の実調和関数で, ある $\alpha>0$ について $N_\alpha u\in L^p$ ならば, u を実部とする $f\in\mathcal{H}^p$ があ

る；そのような f は唯一である．

更に (i) と (ii) の対応 $f \longleftrightarrow u = \mathrm{Re}\, f$ で $\|f\|_{\mathcal{H}^p} \approx \|N_\alpha u\|_{L^p}$.

<u>定理Aの (i) の証明.</u> (i) は Hardy-Littlewood [16] による．証明には，正則関数 f に対しては $|f(z)|^\varepsilon$, $\varepsilon>0$, が劣調和になるという事と，Hardy-Littlewood 最大関数を使う．

$f \in \mathcal{H}^p$ とする．$0<\varepsilon<p$ なる ε をとり $g(z) = |f(z)|^\varepsilon$ とおくと，$g(z)$ は劣調和で

(1) $$\sup_{0<t<\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x+it)^{p/\varepsilon}\, dx \right\} = \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p < \infty.$$

劣調和関数に関する平均値の不等式から

$$g(x_0+it_0)^{p/\varepsilon} \leq C\, t_0^{-2} \iint_{\substack{|x-x_0|<t_0 \\ 0<t<2t_0}} g(x+it)^{p/\varepsilon}\, dx\, dt$$

だから (1) を用いて，$\delta>0$ を固定する時 $g(x+i\delta+it)$ が $|x|+t \longrightarrow \infty$ の時 $\longrightarrow 0$ であることがわかる．このことと g の劣調和性から

(2) $$g(x+i\delta+it) \leq \frac{1}{\pi} \int \frac{t}{(x-y)^2+t^2}\, g(y+i\delta)\, dy$$

が言える（上式の右辺は $g(\cdot+i\delta)$ を境界値とする上半平面上の調和関数である）．$g(\cdot+i\delta)$ は $L^{p/\varepsilon}$ で有界なのだか

る適当な列に沿って $\delta\downarrow 0$ として $L^{p/\varepsilon}$ で弱収束する．故に(2)で $\delta\downarrow 0$ として

$$g(x+it)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(x-y)^2+t^2}h(y)\,dy=H(x+it)$$

$$h\in L^{p/\varepsilon},\quad \|h\|_{L^{p/\varepsilon}}\leq\|f\|_{\mathcal{H}^p}^{\varepsilon}.$$

従って

$$N_\alpha(\mathrm{Re}f)\leq N_\alpha|f|=(N_\alpha g)^{1/\varepsilon}\leq(N_\alpha H)^{1/\varepsilon}$$

と評価できる．ところが容易にわかるように

$$(N_\alpha H)(x)\leq C(Mh)(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

なる評価が成り立つ；ここで Mh は h の Hardy-Littlewood 最大関数である。故に M の $L^{p/\varepsilon}$ での有界性（$p/\varepsilon>1$ に注意）によって

$$\|N_\alpha(\mathrm{Re}f)\|_{L^p}\leq C\|Mh\|_{L^{p/\varepsilon}}^{1/\varepsilon}\leq C\|h\|_{L^{p/\varepsilon}}^{1/\varepsilon}\leq C\|f\|_{\mathcal{H}^p}.$$

定理Aの(ii)の部分は Burkholder-Gundy-Silverstein [2] による。[2] の証明は Brown運動を用いたものであったが Fefferman-Stein [15] は調和関数の微積分だけを用いた証明を与えた．どちらの証明でも key になるのは次のような積分（Lusin の面積積分）である：

$$(S_c u)(x)=\left(\iint_{|y-x|<ct}|\nabla u(y+it)|^2\,dy\,dt\right)^{1/2},\quad x\in\mathbb{R},\ c>0.$$

ここで $|\nabla u|^2 = (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial t)^2$．（[2] で用いられた $S u$ はBrown運動を用いて与えられている．）定理Aの(ii)の証明をするために [15] に従って次の定理を示そう：

<u>定理1</u>．（[1]；[15] pp. 161〜167） $u(y,t)$ を上半平面 $\{y\in\mathbb{R},\ t>0\}$ 上の調和関数とし，$c_1>0$，$c_2>0$ とする．$0<p<\infty$ の時，

$$N_{c_1}u \in L^p \iff \lim_{t\to\infty} u(x,t)=0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \text{かつ}\ S_{c_2}u\in L^p,$$

しかも $\|N_{c_1}u\|_{L^p} \approx \|S_{c_2}u\|_{L^p}$．

<u>証明</u>．$1<p<\infty$ の場合には，Hardy-Littlewood最大関数の L^p 有界性によって，$N_{c_1}u\in L^p$ は u が L^p の関数のPoisson積分（(2)の右辺の積分）で書けることと同値である．Stein [29] はCalderón-Zygmund分解を用いて定理を $1<p<\infty$ の場合に示した．定理の $p=2$ の場合は単純に計算でき，$2<p<\infty$ の場合は双対性によって $1<p<2$ の場合に帰着できる（[31] pp. 91〜92 参照）．ここでは $0<p<2$ として [15] による証明のあらすじを述べよう．

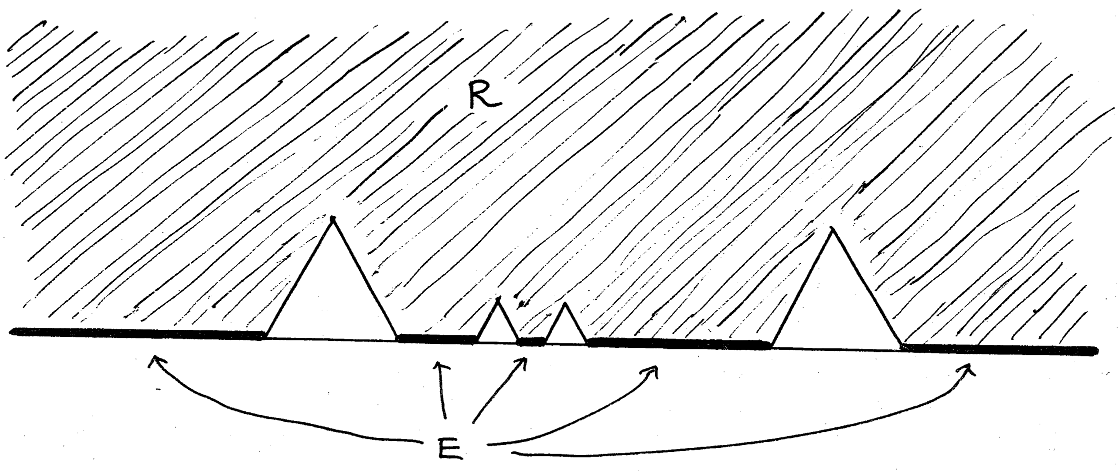
<u>$\Rightarrow$ の証明</u>．後に述べる補題によって $c_2<c_1$ と仮定してよい．u が $C^\infty\cap L^2$ の関数のPoisson積分として書かれて

いる場合をまず証明する． $\alpha>0$ として，

$$E=\{x\in\mathbb{R} \mid (N_{c_1}u)(x)\leqq\alpha\},$$

$$R=\{(y,t) \mid |y-x|<c_2t \text{ for some } x\in E\}$$

とおく． E は（非常に大きな）閉集合で R は下図のような集合である：



u が調和関数であるとき

$$\Delta(u^2)=2|\nabla u|^2$$

になることを用いると，Green の公式によって

$$\int_E (S_{c_2}u)(x)^2dx=\int_{x\in E}\iint_{|y-x|<c_2t}|\nabla u(y,t)|^2\,dy\,dt\,dx$$

$$\leqq C\iint_R|\nabla u(y,t)|^2 t\,dy\,dt=$$

$$= \frac{c}{2} \iint_R t\,\Delta(u^2)\,dy\,dt$$

$$= \frac{c}{2} \int_{\partial R} \left(t \frac{\partial u^2}{\partial n} - u^2 \frac{\partial t}{\partial n} \right) d\sigma, \ ^{*)}$$

故に（ ∂R 上で $\partial t/\partial n$ は有界だから）

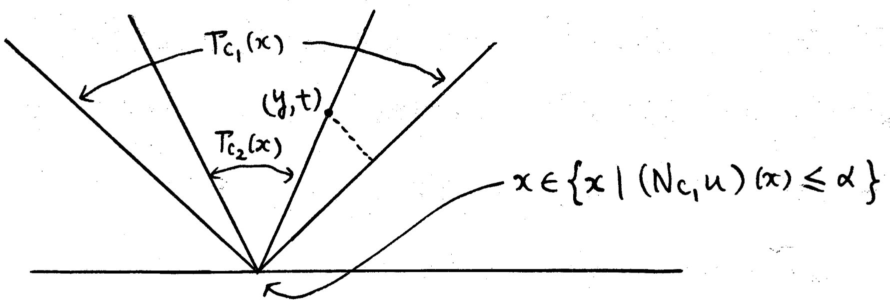
(3) $$\int_E (S_{c_2} u)(x)^2 dx \leq C \int_{\mathcal{B}} t|u||\nabla u|\,d\sigma + C\int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dx,$$

ただし $\mathcal{B} = \partial R \cap \{(y,t) \mid t > 0\}$. さて $\mathcal{B}$ 上では $|u| \leq \alpha$ である（ $N_{c_1} u$ の定義から）が，調和関数に関する Cauchy の不等式によって $|\nabla u|$ も評価できる：

$$|\nabla u(y,t)| \leq C \frac{\sup\{|u(y',t')|\,;\,(y',t') \in \Gamma_{c_1}(x)\}}{\mathrm{distance}\{(y,t),\, \partial\Gamma_{c_1}(x)\}}$$

$$\leq \frac{C\alpha}{t} \quad \text{if } (y,t) \in \mathcal{B},$$

$$\Gamma_{c_1}(x) = \{(y,t) \mid |y-x| < c_1 t\}.$$



---

*) u が $C^\infty \cap L^2$ の関数の Poisson 積分で書かれていれば適当な極限操作でこの Green の公式を正当化できる．

従って (3) の右辺第1項は $\leq C\alpha^2\sigma(B) \leq C\alpha^2 m(E^c)$ $= C\alpha^2 m\{N_{c_1}u>\alpha\}$. 一方第2項は

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dx \leq \int_E (N_{c_1}u)(x)^2\,dx + \int_{E^c}\alpha^2\,dx$$

$$\leq 2\int_0^{\alpha} t\, m\{N_{c_1}u>t\}\,dt + \alpha^2 m\{N_{c_1}u>\alpha\}$$

と評価する. 結局

$$\int_E (S_{c_2}u)(x)^2\,dx \leq C\alpha^2 m\{N_{c_1}u>\alpha\} + C\int_0^{\alpha} t\, m\{N_{c_1}u>t\}\,dt,$$

$$\therefore\ m\{S_{c_2}u>\alpha\} \leq m(E^c) + \alpha^{-2}\int_E (S_{c_2}u)(x)^2\,dx$$

$$\leq C\,m\{N_{c_1}u>\alpha\} + C\alpha^{-2}\int_0^{\alpha} t\, m\{N_{c_1}u>t\}\,dt.$$

この式の両辺に $p\alpha^{p-1}$ をかけて積分すれば, $0<p<2$ の時求める不等式 $\|S_{c_2}u\|_{L^p} \leq C\,\|N_{c_1}u\|_{L^p}$ を得る.

一般の (必ずしも $C^\infty\cap L^2$ の関数の Poisson 積分で書かれない) u に対して不等式を証明するには, まず

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t+\varepsilon)$$

に対して既に示した不等式を適用しておいてから $\varepsilon\downarrow 0$ とすればよい; $N_{c_1}u\in L^p$, $0<p<2$, ならば $u(\cdot,\varepsilon)\in C^\infty\cap L^2$

で u_ε は $u(\cdot,\varepsilon)$ の Poisson 積分で書けることは容易にわかる.

$\Leftarrow$ の証明. やはり後に述べる補題によって, 今度は $c_2 > c_1$ と仮定して証明すればよい. 前と同じく u が $C^\infty \cap L^2$ の関数の Poisson 積分で書かれている場合にまず証明する. $\alpha > 0$ として,

$$E = \{ x \in \mathbb{R} \mid (S_{c_2}u)(x) \leqq \alpha \},$$

$$E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ を中心とするすべての区間 } I \\ \text{に対して } m(E \cap I) \geqq \frac{1}{2} m(I) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid M(\chi_{E^c})(x) > \frac{1}{2} \right\}^c,$$

$$R = \{ (y,t) \mid |y - x| < c_1 t \ \text{for some } x \in E_0 \}$$

とおく. $(y,t) \in R$ ならば $|y - \bar{x}| < c_1 t$, $\bar{x} \in E_0$ なる $\bar{x}$ がとれるから

$$\{ x \in E \mid |y - x| < c_2 t \}$$

$$\supset \{ x \in E \mid |x - \bar{x}| < (c_2 - c_1) t \}$$

これの Lebesgue 測度 $\geqq (c_2 - c_1) t$

となることに注意して,

$$\int_E (S_{c_2}u)(x)^2 dx = \int_{x \in E} \iint_{|y-x| < c_2 t} |\nabla u(y,t)|^2 dy\,dt\,dx =$$

$$= \iint m\{x \in E \mid |y-x| < c_2 t\} |\nabla u(y,t)|^2 \, dy\, dt$$

$$\geqq (c_2 - c_1) \iint_R t |\nabla u(y,t)|^2 \, dy\, dt.$$

ここで前と同じく $|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\Delta(u^2)$ と書きかえ，Green の公式を使って，∂R 上で $-\partial t/\partial n \geqq \mathrm{const.} > 0$ であることに注意すると，次の不等式を得る：

$$(4) \quad \int_E (S_{c_2}u)(x)^2 dx \geqq c \int_{\partial R} u^2 \, d\sigma - C \int_{\mathcal{B}} t|u||\nabla u| \, d\sigma$$

$$\geqq \frac{c}{2} \int_{\partial R} u^2 \, d\sigma - C' \int_{\mathcal{B}} t^2 |\nabla u|^2 \, d\sigma,$$

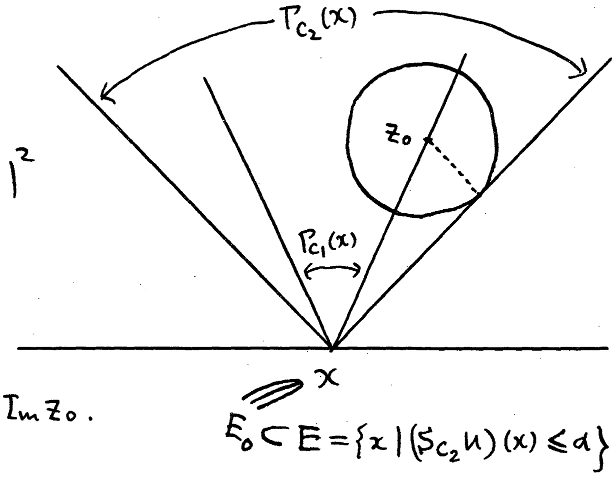
$$c > 0, \quad \mathcal{B} = \partial R \cap \{(y,t) \mid t > 0\}.$$

$z_0 \in \mathcal{B}$ ならば，右図の円板に対して平均値不等式

$$|\nabla u(z_0)|^2 \leqq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} |\nabla u(z)|^2$$

を用いて，

$$|\nabla u(z_0)|^2 \leqq C t^{-2} \alpha^2, \quad t = \mathrm{Im}\, z_0.$$



従って (4) の第 2 の積分 $\leqq C\alpha^2 \sigma(\mathcal{B}) \leqq C\alpha^2 m(E_0^c) \leqq$

(Hardy-Littlewood 最大関数の評価 (*) によって) $\leq C\alpha^2 m(E^c)$ $= C\alpha^2 m\{S_{c_2}u > \alpha\}$. 結局次の評価が得られた：

(5) $$\int_{\partial R} u^2\, d\sigma \leq C\int_E (S_{c_2}u)(x)^2\, dx + C\alpha^2 m\{S_{c_2}u > \alpha\}.$$

この評価を用いて，R 内の u の大きさを評価でき，従って E_0 上での $N_{c_1}u$ の大きさを評価できる；それは次のようにやればよい．まず

$$f(x) = \left|u\left(x, \frac{1}{c_1}\rho(x)\right)\right| + \alpha\chi_{E_0^c}(x)$$

とおく，ここで $\chi_{E_0^c}$ は E_0^c ($= E_0$ の補集合) の定義関数，$\rho(x) = \mathrm{distance}(x, E_0)$ である．($\partial R = \{(x,t) \mid t = \frac{1}{c_1}\rho(x)\}$ である)．f の Poisson 積分を U とすると，

$$|u| \leq C\,U \quad \text{in } R$$

が成り立つ．これを示すには，最大値の原理によって ∂R 上で不等式を示せばよい．まず $\partial R \cap \{(x,t) \mid t = 0\}$ 上では $U = f \geq |u|$．次に $\partial R \cap \{(x,t) \mid t > 0\} = \mathcal{B}$ 上では：既にやったように $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathcal{B}$ を中心に半径 $c\,t_0$ ($c > 0$ は小さな定数) の円板内で $|\nabla u| \leq C\alpha\, t_0^{-1}$ であるから，

$$|u(z_0)| \leq \left|u\left(x, \frac{\rho(x)}{c_1}\right)\right| + C\alpha \quad \text{if } |x - x_0| \leq c' t_0,$$

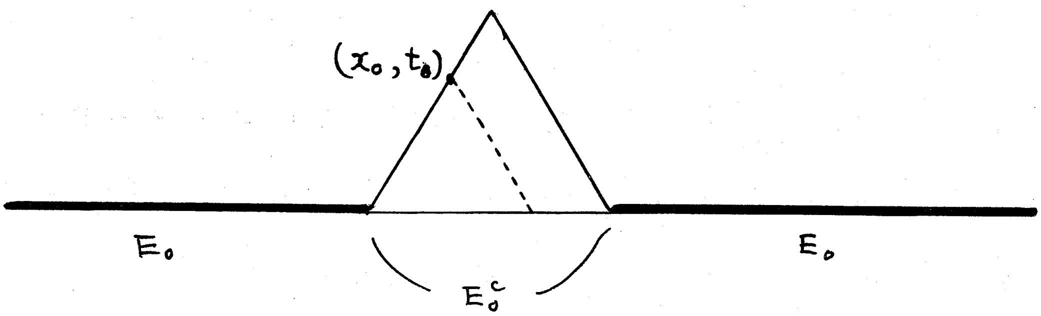
$$\therefore\ |u(z_0)| \leq \frac{1}{2c't_0}\int_{|x-x_0| \leq c't_0} \left|u\left(x, \frac{\rho(x)}{c_1}\right)\right| dx + C\alpha \leq$$

$$\leq C\frac{1}{\pi}\int \frac{t_0}{(x_0-x)^2+t_0^2}\left\{\left|u\left(x,\frac{\rho(x)}{c_1}\right)\right|+\alpha\chi_{E_0^c}\right\}dx$$
$$= C\,U(z_0).$$

上の評価で $z_0=(x_0,t_0)\in\partial R$, $t_0>0$ の時

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{t_0}{(x_0-x)^2+t_0^2}\chi_{E_0^c}(x)\,dx \geq c>0$$

であることを用いた。これは下図からわかるであろう：



さて $|u|\leq CU$ in R が言えたから, $x\in E_0$ の時

$$(N_{c_1}u)(x)\leq C(N_{c_1}U)(x)\leq C(Mf)(x).$$

故に Hardy-Littlewood 最大関数の L^2 不等式を用いて

$$\int_{E_0}(N_{c_1}u)^2\leq C\int_{E_0}(Mf)^2\leq C\int_{-\infty}^{\infty}f^2$$

(5)によって $\leq C\int_E (S_{c_2}u)^2 + C\alpha^2 m\{S_{c_2}u>\alpha\}.$

$$\therefore\ m\{N_{c_1}u>\alpha\}\leq C\alpha^{-2}\int_0^{\alpha} t\,m\{S_{c_2}u>t\}\,dt$$
$$+\,C\,m\{S_{c_2}u>\alpha\}.$$

この式の両辺に $p\alpha^{p-1}$ をかけて積分すれば求める不等式

$$\|N_{c_1}u\|_{L^p} \leq C\,\|S_{c_2}u\|_{L^p}\quad ,\ 0<p<2,$$

を得る.

一般の u に対して不等式を示すには

$$u_{\varepsilon,N}(x,t) = u(x,t+\varepsilon) - u(x,t+N),$$
$$0<\varepsilon<N,$$

に対して不等式を適用しておいて $\varepsilon\to 0$, $N\to\infty$ とすればよい.

以上の証明で c_1 と c_2 に大小の制限をおいて一般性を失なわないのは次の補題による.

<u>補題1</u>. $u(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, を勝手な連続関数, $0<p<\infty$ とすると: ある $c>0$ に対して $N_c u\in L^p$ ならば, 実はすべての $c>0$ に対して $N_c u\in L^p$ かつ更に $\lambda>\frac{1}{p}$ なる λ に対して

$$(\tilde{N}_\lambda u)(x) = \sup_{y\in\mathbb{R},\, t>0} |u(y,t)| \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^\lambda \in L^p,$$

$$\|\tilde{N}_\lambda u\|_{L^p} \leq C_{\lambda,c}\|N_c u\|_{L^p}.$$

<u>補題2</u>. $u(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$, を勝手な可測関数, $\alpha>0$,

$\lambda>0$ として

$$S_\alpha(x)=\left(\iint_{|x-y|<\alpha t}|u(y,t)|^2(\alpha t)^{-1}\,dy\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$G_\lambda(x)=\left(\iint_{y\in\mathbb{R},\,t>0}|u(y,t)|^2\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{-2\lambda}t^{-1}\,dy\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく．このとき，関数 u によらず α,β,λ および p のみによって定まる正定数 C があって次の不等式が成立：

$$\frac{1}{C}\|S_\alpha\|_{L^p}\leq\|S_\beta\|_{L^p}\leq C\|S_\alpha\|_{L^p},$$

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ 0<p<\infty;$$

$$\frac{1}{C}\|S_\alpha\|_{L^p}\leq\|G_\lambda\|_{L^p}\leq C\|S_\alpha\|_{L^p},$$

$$\alpha>0,\ 0<p\leq 2,\ \lambda>\frac{1}{p}$$

または $\alpha>0,\ 2<p<\infty,\ \lambda>\frac{1}{2}$.

補題1の証明は [15] pp. 166～167 にある．補題2の証明は [3] I, pp. 17～21 にある；そこでは $0<p\leq 2$ の場合しか扱ってないが，双対性（[31] pp. 91～92 参照）を用いると $2<p<\infty$ の場合も示すことができる．

さて以上で定理1が証明された．これを使うと定理Aの

(ii) の部分の証明ができる.

<u>定理 A の (ii) の証明.</u> $N_\alpha u \in L^p$ とする. u の共役調和関数 v を

$$v(x,t) = -\int_t^\infty \frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\,ds$$

で定義する. この積分が絶対収束することは次のようにしてわかる. $(N_\alpha u)(x)$ の定義によって $|y-x|<\alpha t$ の時 $|u(y,t)| \leq (N_\alpha u)(x)$ だから

$$|u(y,t)|^p \leq \frac{1}{2\alpha t}\int_{|y-x|<\alpha t} (N_\alpha u)(x)^p\,dx \leq \frac{1}{2\alpha t}\|N_\alpha u\|_{L^p}^p,$$

$$\therefore\ |u(y,t)| \leq \text{const.}\ t^{-1/p},$$

Cauchy の不等式によって $|\nabla u| \leq C\,t^{-1-\frac{1}{p}}$, $|\nabla^2 u| \leq C\,t^{-2-\frac{1}{p}}$, 等々. これらの評価から v を定義する積分を積分記号下で微分できて, v が u の共役調和関数であることがわかる. $|\nabla v| = |\nabla u|$ であるから当然 $S_c v \equiv S_c u$, しかも $v(x,t) \to 0$ as $t\to\infty$. 故に定理 1 を 2 回つかって

$$\|N_\alpha v\|_{L^p} \approx \|S_c v\|_{L^p} = \|S_c u\|_{L^p} \approx \|N_\alpha u\|_{L^p} < \infty.$$

従って $N_\alpha v \in L^p$, $u+iv \in \mathcal{H}^p$. 証明終.

次の定理も証明された．

定理B. $0<p<\infty$ とする．上半平面上の実調和関数 u が $\mathcal{H}^p$ の関数の実部になるための必要十分条件は，$t\to\infty$ の時 $u(x,t)\longrightarrow 0$ かつ $S_c u\in L^p$, $c>0$．しかも $u=\mathrm{Re}\,f$, $f\in\mathcal{H}^p$ の時 $\|S_c u\|_{L^p}\approx\|f\|_{\mathcal{H}^p}$．

§2. H^p の実解析的理論

関数空間 L^p, $0<p\leq 1$, は関数解析ではいくつかの点で L^p, $1<p<\infty$, より扱いにくい空間である．例えば：$p<1$ の時 L^p 上の連続線型汎関数は 0 しかない（Day [11]）；L^p, $1<p<\infty$, では Calderón-Zygmund 型の作用素が有界になるが L^1 では有界にならない；L^p, $p<1$, では合成積型の作用素で有界になるものは平行移動を可算個重ね合わせたもの以外にない（Peetre [28]）等々．ところが $\mathcal{H}^p$ は $p\leq 1$ の場合にもよい性質を持っているので，$\mathcal{H}^p$ を背景に構成される空間 H^p（以下で述べる）は $p\leq 1$ の場合にも関数解析で都合のよい性質を持っている．それを以下で解説する．

まず $\mathcal{H}^p$, $0<p<\infty$, の元の境界値をとることによって $\mathcal{H}^p$

を実直線 $\mathbb{R}$ 上の distribution の空間とみなせることを説明しよう．定理 A によって $N_\alpha u \in L^p$ なる調和関数 u を考えればよい．定理 A の (i) の証明の初めの部分と同様にして

$$(6) \qquad u(x, t+\delta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(x-y)^2+t^2} u(y,\delta)\,dy \ , \ \delta>0,$$

が出る．$1 \leq p < \infty$ ならば，適当な列 $\delta_n \downarrow 0$ に沿って弱極限 $\lim u(\cdot, \delta_n) \in L^p$ があり u がその極限の Poisson 積分で書けるから，$t \downarrow 0$ の時の $u(\cdot, t)$ の極限が L^p で存在して u はその極限の Poisson 積分に等しい．$0<p<1$ としよう．(6) の両辺を x について Fourier 変換すると

$$\hat{u}(\xi, t+\delta) = e^{-2\pi t|\xi|}\ \hat{u}(\xi, \delta).$$

この式から

$$(7) \qquad v(\xi) = e^{2\pi t|\xi|}\ \hat{u}(\xi, t)$$

が $t>0$ に依存しないことがわかる．$N_\alpha u \in L^p$ から定理 A の (ii) の証明でやったように $|u(x,t)| \leq C t^{-1/p}$ が出るから，評価 $|u(x,t)| \leq (N_\alpha u)(x)$ とあわせて $\|u(\cdot,t)\|_{L^1} \leq C t^{-\frac{1}{p}+1}$ が出る．故に

$$|v(\xi)| = e^{2\pi t|\xi|}\,|\hat{u}(\xi,t)| \leq C e^{2\pi t|\xi|}\ t^{-\frac{1}{p}+1}$$

$$t = \frac{1}{|\xi|} \text{ ととって } \quad \leq C\,|\xi|^{\frac{1}{p}-1}.$$

故に $v \in \mathcal{S}'$ である．(7) によって，$t \downarrow 0$ の時の $u(\cdot, t)$

の極限が $\mathcal{S}'$ で存在して $\mathcal{F}^{-1}v$ に等しく，　　u は $\mathcal{F}^{-1}v$ から (7) によって復元できる．

さて $\mathcal{H}^p$ の元はすべて境界値を持つことがわかったから $\mathcal{H}^p$ の元の境界値をとることによって $\mathbb{R}$ 上の distribution の空間として H^p を定義しよう．ただし H^p が定理 A または B で言うような特徴付けを持つようにするため，$\mathcal{H}^p$ の元の実部だけの境界値をとろう；もうひとつ，後で複素補間空間を取扱えるように H^p は複素数体上の線型空間になるようにしよう．そこで次のように定義する．

<u>定義</u>．$0<p<\infty$ とする．上半平面上の複素数値調和関数 u で $N_\alpha u \in L^p$，$\alpha>0$，なる u の $\mathcal{S}'$ での境界値 $\lim_{t\downarrow 0} u(\cdot,t)$ になっている distribution の全体を H^p とする．$f=\lim_{t\downarrow 0} u(\cdot,t)$ の時 $\|f\|_{H^p}=\|N_\alpha u\|_{L^p}$ とする．（$\alpha>0$ はひとつ固定しておく．）

定理 A によれば，$f\in H^p$ は $\mathrm{Re}\, f$ と $\mathrm{Im}\, f$ が両方とも $\mathcal{H}^p$ の元の実部の境界値であることと同値である．Hilbert 変換 $f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}(-i\,\mathrm{sign}\,\xi\cdot\mathcal{F}f(\xi))=Hf$ を用いれば定理 A（の本質的部分）を次のように言いかえることができる：

<u>定理2</u>. $0<p<\infty$ とすると,

$$f\in H^p\cap L^2 \iff f\in L^p\cap L^2 \text{ かつ } Hf\in L^p\cap L^2,$$

$$\|f\|_{H^p}\approx\|f\|_{L^p}+\|Hf\|_{L^p}\ ,\ f\in H^p\cap L^2.$$

上の定理で L^2 を持ち出したのは Hilbert 変換 Hf が可測関数として定まるようにするためで本質的な意味はない. この定理の証明は定理Aを使えば容易である. ただし $\Rightarrow$ は直接できるが, $\Leftarrow$ の証明には次の事実を使う:

$$F\in\mathcal{H}^2 \text{ かつ } F(x+i0)\in L^p \Rightarrow F\in\mathcal{H}^p$$

(例えば [34] Chap. VII, Th. (7.35) 参照; [32] pp. 49〜50 には Blaschke 積による因数分解を用いない証明がある).

<u>maximal function による H^p の特徴付け</u>. Fefferman-Stein [15] のひとつの重要な結果は, 上の定義の H^p が調和関数をまったく用いずに純粋に実解析的な方法で特徴付けられるという事実である. これを説明するために次のような maximal functions を導入しよう. まず

$$\int\varphi(x)dx\neq 0$$

なる $\varphi\in\mathcal{S}$ をひとつ固定して $f\in\mathcal{S}'$ に対して radial maximal function M_φ^+f を次のように定義する:

$$(M_\varphi^+ f)(x) = \sup_{0<t<\infty} \left\{ \left| \left(f * \frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(x) \right| \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

また $\lambda > 0$ として $f \in \mathcal{S}'$ に対して grand maximal function $M_\lambda^* f$ を次で定義する：

$$(M_\lambda^* f)(x) = \sup_{\substack{(y,t);\, |y-x|<t \\ \psi \in \mathcal{A}_\lambda}} \left\{ \left| \left(f * \frac{1}{t}\psi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(y) \right| \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ただし

$$\mathcal{A}_\lambda = \left\{ \psi \in \mathcal{S} \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{2^k}\psi_k\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \leq 1, \ \|\psi_k\|_{\Lambda_\lambda} \leq 1, \ \operatorname{supp}\psi_k \subset [-1,1] \end{array} \right\}$$

（$\| \ \|_{\Lambda_\lambda}$ は Lipschitz 空間のノルムである；双対空間の解説の部分を見よ）．次の定理が成り立つ：

<u>定理 3</u>. $0 < p < \infty$ とする．$f \in \mathcal{S}'$ に対して次の三条件は同値である：

(i) $f \in H^p$;

(ii) $M_\varphi^+ f \in L^p$ for some $\varphi \in \mathcal{S}$ with $\int \varphi(x)\,dx \neq 0$;

(iii) $M_\lambda^* f \in L^p$ for any $\lambda > \frac{1}{p} - 1$.

しかも

$$\|f\|_{H^p} \approx \|M_\varphi^+ f\|_{L^p} \approx \|M_\lambda^* f\|_{L^p} .$$

(注) $M_\varphi^+ f$ を $\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left(f*\frac{1}{2^k}\varphi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)(x)\right|$ でおきかえても定理はそのまま成り立つ.

定理Aによれば, 実 $f\in\mathcal{S}'$ に対しては, $f\in H^p$ は f が $\mathcal{H}^p$ の関数の実部の境界値になることと同値である. 従って定理3は $\mathcal{H}^p$ の関数の実部の境界値を (ii) または (iii) のような純粋に実関数論的な条件で特徴付けられることを示している. 定理3はこれから述べる H^p の理論の基礎となる重要な定理でもある. この定理によって正則関数や調和関数を扱うことなしに $\mathcal{H}^p$ のよい性質を H^p で実現することができる. (iii) によって H^p の関数の様々の評価が可能になる. しばしば $M_\lambda^* f$ よりは少し小さい maximal function

$$f_N^*(x)=\sup_{\substack{(y,t):|x-y|<t\\ \psi\in\mathcal{B}_N}}\left\{\left|\left(f*\frac{1}{t}\psi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(y)\right|\right\},\quad x\in\mathbb{R},$$

$$\mathcal{B}_N=\left\{\psi\in C_0^\infty\ \middle|\ \begin{array}{l}\operatorname{supp}\psi\subset[-1,1],\\ \left\|\dfrac{d^k\psi}{dx^k}\right\|_{L^\infty}\le 1 \text{ for } k=0,1,\cdots,N\end{array}\right\},$$

で十分有用である.

定理3の証明は $f\in\mathcal{S}'$ が $N_\alpha u\in L^p$ なる調和関数 u の境界値に等しいこと (これが $f\in H^p$ の定義であった) と条件 (ii) または (iii) が同値であることを直接の評価によって示

すことでできる．f を境界値とする調和関数 u は

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{t}\right)^2}f(y)\,dy$$

とかけるから（ただし右辺はすべての $f\in\mathcal{S}'$ に対して意味があるわけではないが），$u(x,t)$ は maximal functions M_φ^+f または M_λ^*f の定義の中にあらわれる $(f*\frac{1}{t}\varphi(\frac{\cdot}{t}))(x)$ または $(f*\frac{1}{t}\psi(\frac{\cdot}{t}))(x)$ と同じ形をしている；定理3の証明は関数 $1/\pi(1+x^2)$，φ，ψ のいずれかひとつから平行移動と相似変換したものを重ねあわせることによって他のものがあらわせることを評価つきで示すことによってなされる．[15] §11 では評価つきの重ねあわせを得るためにFourier変換を用いているが，Uchiyama [33] はFourier変換を用いない証明法を与えた．条件 $\lambda>\frac{1}{p}-1$ は [33] による．

atom分解による H^p の特徴付け．$0<p\leq 1$ のとき p-atomとは次のような関数のことである：

$$\begin{cases}\exists I\ (\text{区間});\ \operatorname{supp} f\subset I,\ \|f\|_{L^\infty}\leq m(I)^{-1/p},\\[4pt] \displaystyle\int f(x)x^k\,dx=0 \quad \text{for } k=0,1,\cdots,[\tfrac{1}{p}-1].\end{cases}$$

（区間 I は f によってかわってよい．）f が p-atom ならば $f\in H^p$ で $\|f\|_{H^p}$ は f によらない定数で押さえられ

3; これは H^p の定義, 定理2, 定理3の(ii)または(iii)のいずれを使っても容易に確かめられる.

定理4. $0<p\leq 1$ とする. $f\in H^p$ となる必要十分条件は f が p-atom の線型結合であらわせることである. 詳しくは:

(i) f_j $(j=1,2,\cdots)$ が p-atom, $a_j\in\mathbb{C}$ $(j=1,2,\cdots)$,

$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^p<\infty$ ならば級数 $\sum_{j=1}^{\infty}a_jf_j$ は H^p で収束し

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}a_jf_j\Big\|_{H^p}\leq c\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}};$$

(ii) 逆に任意の $f\in H^p$ に対して, p-atoms f_j と数列 a_j を適当にとって

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}a_jf_j\quad,\ \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leq c\|f\|_{H^p}$$

とできる.

注 1) もしも $f\in H^p$ でしかも f がコンパクト台を持っていたならば, (ii)の分解で $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j}$ がコンパクトになるようにできる. ただし I_j は p-atom f_j に対応する区間である. 2) p-atom の定義の条件 $\int f(x)x^k=0$ for $k\leq[\frac{1}{p}-1]$ を, $N>[\frac{1}{p}-1]$ なる自然数 N をとって (N は固定)よ

り強い条件 $\int f(x)x^k = 0$ for $k \leq N$ でおきかえて，新しく p-atom を定義しても，定理4はそのまま成立する．ただしその時は前の 1) は最早成立しない．

定理4は Coifman [8] による．次元の高い場合への拡張は Latter [20] による．[8], [20] の証明は定理3にもとづく．

この定理は H^p に作用する線型作用素の有界性を調べるのに極めて有用である．もし T が H^p, $0<p\leq 1$, から Banach 空間 X への連続線型作用素であれば，p-atom f に対して $\|Tf\|_X \leq A$ (A は f によらない定数) であるが，逆にこの評価を持つ線型作用素は H^p から X への連続作用素である．なぜならば，任意の $f \in H^p$ は定理4の (ii) で言うような分解を持つから，(無限和 Σ と T の交換を認めると)

$$\|Tf\|_X = \|\sum a_j Tf_j\|_X \leq \sum |a_j| \|Tf_j\|_X$$

$$\leq A \sum |a_j| \leq A \left(\sum |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\because 0<p\leq 1)$$

$$\leq CA\|f\|_{H^p}.$$

すなわち，線型作用素の連続性を示すためには p-atom に作用させた時の有界性を示せば十分である．p-atom f に対して $\|Tf\|_X$ を評価することは，一般の $f \in H^p$ に対して直接 $\|Tf\|_X / \|f\|_{H^p} \approx \|Tf\| / \|M_\nabla^* f\|_{H^p} \approx \|Tf\|_X / (\|f\|_{L^p} + \|Hf\|_{L^p})$ を評価するより，多くの場合ずっとやさしい．

H^p の双対空間. $1<p<\infty$ の時は, Hardy-Littlewood 最大関数の評価 (**) によって, H^p と L^p はノルムの同値性も込めて一致する. 従って双対空間は

$$(H^p)' = H^q, \quad 1<p<\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

$0<p\leq 1$ の場合には H^p の双対空間を Lipschitz 空間 Λ_λ または John-Nirenberg [19] の空間 BMO と同一視することができる. Λ_λ と BMO を説明しよう. $\lambda>0$ とし λ より小さい最大の整数を k (すなわち $k\in\mathbb{Z}$, $k<\lambda\leq k+1$) として

$$\|f\|_{\Lambda_\lambda} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \displaystyle\sup_{x\neq y} \frac{|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(y)|}{|x-y|^{\lambda-k}}, & 0<\lambda-k<1, \\[2ex] \displaystyle\sup_{x\neq y} \frac{\left|f^{(k)}(x)-2f^{(k)}\left(\frac{x+y}{2}\right)+f^{(k)}(y)\right|}{|x-y|}, & \lambda-k=1; \end{cases}$$

k 回連続微分可能で $\|f\|_{\Lambda_\lambda}<\infty$ なる関数 f の全体を Λ_λ とする. また局所可積分関数 f に対して

$$\|f\|_{BMO} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{I:\,\text{区間}} \frac{1}{m(I)}\int_I |f(x)-f_I|\,dx,$$

ただし $\displaystyle f_I=\frac{1}{m(I)}\int_I f(x)\,dx,$

とし, $\|f\|_{BMO}<\infty$ なる局所可積分関数の全体を BMO とする.

定理5. $0<p<1$ とする．台がコンパクトでかつ L^∞ に属す $f\in H^p$ と $g\in \Lambda_{\frac{1}{p}-1}$ に対して

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|\leq C\|f\|_{H^p}\|g\|_{\Lambda_{\frac{1}{p}-1}}.$$

逆に，H^p 上の任意の連続線型汎関数 ℓ に対して，次数 $\leq [\frac{1}{p}-1]$ の多項式の差をのぞいて一意に定まる $g\in\Lambda_{\frac{1}{p}-1}$ があって，$\|g\|_{\Lambda_{\frac{1}{p}-1}}\leq C\|\ell\|$ かつ

$$\ell(f)=\int f(x)g(x)dx, \quad f\in H^p\cap L^\infty,\ \mathrm{supp}\, f:\text{コンパクト}.$$

系. $0<p<1$ の時も $(H^p)'$ は H^p の点を分離する．すなわち，$f\in H^p$, $g\in H^p$, $f\neq g$ ならばある $\ell\in(H^p)'$ に対して $\ell(f)\neq\ell(g)$.

定理6. $f\in H^1$, $g\in BMO$, $fg\in L^1$ ならば

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|\leq C\|f\|_{H^1}\|g\|_{BMO}. \tag{8}$$

逆に，H^1 上の任意の連続線型汎関数 ℓ に対して，定数の差をのぞいて一意に定まる $g\in BMO$ があって，$\|g\|_{BMO}\leq C\|\ell\|$ かつ

$$\ell(f)=\int f(x)g(x)dx, \quad f\in H^1,\ \mathrm{supp}\, f:\text{コンパクト}.$$

定理7. H^1 は BMO のある閉部分空間の双対空間と同一視できる．詳しく言うと：コンパクト台を持つ連続関数の全体 C_0 の BMO での閉包を VMO とすると，任意の $f \in H^1$ に対して

$$C_0 \ni g \longmapsto \int f(x)\,g(x)\,dx$$

は VMO 上の連続線型汎関数に一意的に拡張され，逆に任意の連続線型汎関数 $\ell \in (VMO)'$ に対して一意に定まる $f \in H^1$ があって $\|f\|_{H^1} \leq C\|\ell\|$ かつ

$$\ell(g) = \int f(x)\,g(x)\,dx\,, \quad g \in C_0\,.$$

定理6は Fefferman-Stein [15] のもうひとつの重要な結果である．

定理6の諸証明について．[15]では実 $f \in H^1$ が $\mathcal{H}^1$ の関数の実部の境界値であることから定理6を導いた．H^1 の定義をこのように考えると，定理2で述べた H^1 の特徴付けをつかって，定理6の後半は容易に示される（ L^∞ の関数の Hilbert 変換が BMO にはいるという事実に帰着される）；定理6の前半を示すのに，[15]では BMO の関数を境界値に持つ上半平面上の調和関数の特徴付けを与えて，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = 2 \iint_{x\in\mathbb{R},\, t>0} t\, \nabla f(x,t)\cdot\nabla g(x,t)\,dx\,dt$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし } f(x,t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(x-y)^2+t^2}f(y)\,dy, \\ \qquad\quad g(x,t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(x-y)^2+t^2}g(y)\,dy \end{array}\right)$$

の右辺を評価して(8)を示した．[15]の証明で同時に与えられたBMOの特徴づけ(Hilbert変換を用いたものと上半平面上の調和関数を用いたもの)は重要である． Coifman[8]は定理4を示すことによって定理6の別の証明(定理3でいう H^1 の特徴付けにもとづいた証明)を与えた．定理4から定理6を示すのは容易である； g が局所可積分関数であるとすると

$$\sup_{\|f\|_{H^1}\le 1}\left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \approx \sup_{f:1\text{-atom}}\left|\int f(x)g(x)\,dx\right|$$

$$= \sup_{I:\text{区間}}\left\{\inf_{c\in\mathbb{C}}\frac{1}{m(I)}\int_I |g(x)-c|\,dx\right\}$$

$$\approx \|g\|_{BMO}$$

となるからである(ただし定理の後半をきちんと示すには任意の $\ell\in(H^1)'$ が局所可積分関数 g によって書けることを示さねばならない)． Carleson[7]はBMOの関数の分解を与えることによって定理6の前半の別証明を与えた($\|f\|_{H^1}$

$=\|M_\varphi^+ f\|_{L^1}$ として (8) を示した).

定理5と7の証明は定理4を使うと比較的容易にできる. 定理7を示すには, 定理6がわかっているとすれば H^1 を $(VMO)'$ の部分空間とみなせるから, H^1 の単位球の汎弱コンパクト性を示せばよい; [10] pp. 638〜641 に定理4を使って H^1 の単位球の汎弱コンパクト性を示す証明がある. 定理5を定理4から導くには Campanato [6] と Meyers [23] による関係式

$$\|g\|_{\Lambda_\lambda} \approx \sup_{x_0\in\mathbb{R},\, r>0}\left\{\inf_{\substack{P:\text{多項式}\\ \deg P\leq[\lambda]}}\left\{r^{-1-s}\int_{|x-x_0|<r}|g(x)-P(x)|\,dx\right\}\right\}$$

を使う; 定理4によって $\sup\left\{\left|\int fg\right| ; \|f\|_{H^p}\leq 1\right\}$ が上の式の右辺 ($\lambda=\frac{1}{p}-1$) と同等であることがわかるから定理5が示される.

<u>補間空間</u>. まず複素補間法を説明する. L^p における Riesz-Thorin の補間定理と同様の定理は $\mathcal{H}^p$, $p>0$, でも成り立つ. この事実の証明の要点は, 任意に与えられた $f\in\mathcal{H}^p$ に対して次のような関数の族 $\{f_z \mid z\in\mathbb{C},\ 0\leq \mathrm{Re}\, z\leq 1\}$ を構成することである:

(i) $z\longmapsto f_z$ は $0\leq \mathrm{Re}\, z\leq 1$ で有界連続, $0<\mathrm{Re}\, z<1$ で正則;

(ii) $f_\theta = f$;

(iii) $\|f_{iy}\|_{\mathcal{H}^{p_0}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^p}$, $\|f_{1+iy}\|_{\mathcal{H}^{p_1}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^p}$, $y \in R$;

ただし $p_0 < p < p_1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ である．(ただし厳密には，「有界」,「連続」,「正則」の意味をはっきりさせなくてはならない．) このような族 $\{f_z\}$ を構成することは，$1 < p_0 < p < p_1 < \infty$ の場合には M. Riesz の定理によって L^p 空間で同様な族を構成することに帰着され，一般の場合には Blaschke 積による因数分解によって上の場合に帰着される (Calderón-Zygmund [4] pp. 182 − 188 参照)．定理3と定理B (ただし $S_c u$ を一般化した形でおきかえたもの；後の定理11を参照) とも用いると，実解析的な方法で (因数分解を用いずに) 族 $\{f_z\}$ を構成できる；次の定理が成り立つ．

<u>定理8</u>. $0 < p_0 < p < p_1 < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ とする．

(i) $\{f_z \mid z \in \mathbb{C}, 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\} \subset \mathcal{S}'$ が次の性質を持つとする： $\int \varphi(x)dx \neq 0$ なるある $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して $(f_z * \frac{1}{t}\varphi(\frac{\cdot}{t}))(x)$ が，上半平面の任意のコンパクト集合 K について $\{(z, x, t) \mid z \in \mathbb{C}, 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1, (x, t) \in K\}$ で有界かつ一様連続，かつ上半平面の点 (x, t) を任意に固定した時 $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$ で z につき正則．この時次の不等式が成り立つ：

$$\|f_\theta\|_{H^p} \leq C\left(\sup_{y\in\mathbb{R}}\|f_{iy}\|_{H^{p_0}}\right)^{1-\theta}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}}\|f_{1+iy}\|_{H^{p_1}}\right)^{\theta}$$

(ただし右辺$<\infty$ならば $f_\theta\in H^p$ で不等式が成立するという意味).

(ii) 任意の $g\in H^p$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，有限個の関数 $f_j\in C_0^\infty\cap H^{p_0}\cap H^p\cap H^{p_1}$ と実数 a_j を適当にとれば，

$$f_z=\sum_{\text{有限和}} e^{a_j z} f_j\ ,\quad z\in\mathbb{C}\ ,\ 0\leq \operatorname{Re} z\leq 1,$$

について次の評価が成り立つ：

$$\begin{cases}\sup\limits_{y\in\mathbb{R}}\|f_{iy}\|_{H^{p_0}}\leq C\|g\|_{H^p}\ ,\\[2ex] \sup\limits_{y\in\mathbb{R}}\|f_{1+iy}\|_{H^{p_1}}\leq C\|g\|_{H^p}\ ,\\[2ex] \|f_\theta-g\|_{H^p}\leq\varepsilon\ .\end{cases}$$

この定理の証明は Calderón-Torchinsky [3]$^{\mathrm{II}}$ pp. 135～151 を見よ．

次に実補間法を述べよう．$\mathcal{H}^p$，$p\geq 1$，でも Marcinkiewicz の補間定理が成り立つことは Igari [18] によって示された．[18] で用いられた論法 (Calderón-Zygmund 分解による方法) はほとんどそのまま $p<1$ の場合にも拡張でき，H^p, $p>0$，で Marcinkiewicz の補間定理が証明できる ([10], Theorem D).

補間空間の言葉では次の定理が成り立つ：

<u>定理9</u>. $0<p_0<p<p_1<\infty$, $\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}=\frac{1}{p}$ のとき

$$[H^{p_0}, H^{p_1}]_{\theta,p}=H^p.$$

証明は Fefferman-Rivière-Sagher [14] を見よ.

<u>Fourier multiplier または convolution</u>. $m(\xi)$ を固定された有界関数として

$$f\longmapsto \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\mathcal{F}f(\xi))=K*f,$$

$$\mathcal{F}=\text{Fourier 変換}, \quad K=\mathcal{F}^{-1}m,$$

の形の作用素を考える. この形の作用素が L^1 から L^1 への有界作用素となるための必要十分条件は K が有界な複素測度であることであり, $0<p<1$ のとき L^p から L^p への有界作用素となるための必要十分条件は K が

$$K=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\delta_{(x_n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^p<\infty,$$

($\delta_{(x_n)}$ は x_n にある Dirac 測度) と書けることである (Peetre [28]). ところが H^p, $0<p\le 1$, や L^p, $1<p<\infty$, ($=H^p$) ではずっとたくさんの K に対して上の作用素 $f\mapsto K*f$ が

有界になる；次の定理が成り立つ．

定理 10.　$0<p<\infty$ とし $\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$ より大きい整数で最小のものを k とする．m が $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ で k 回連続微分可能な関数，$A\geq 1$ で

$$\left|\left(\frac{d}{d\xi}\right)^j m(\xi)\right| \leq \left(A\,|\xi|^{-1}\right)^j \quad ,\ j=0,1,\cdots,k,$$

ならば $H^p\cap L^2 \ni f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}(m\,\mathcal{F}f)$ は $H^p \longrightarrow H^p$ の有界線型作用素 T_m に拡張され

$$\|T_m\|_{H^p\to H^p} \leq C\,A^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}.$$

このような定理は $1<p<\infty$ の範囲で（この範囲では $H^p = L^p$）Marcinkiewicz [22] によって初めて与えられた；[22] の証明は Littlewood-Paley の定理と M. Riesz の定理（Hilbert 変換の L^p 有界性）を利用したものであった．[22] の定理は $\mathbb{R}$ 上の関数ではなく torus $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上の関数について与えられたものだったが，Mikhlin [24], [25] は極限をとることによって $\mathbb{R}^n$ 上で定理が成りたつことを示した（[26] の Appendix 参照）．Hörmander [17] は Calderón-Zygmund 分解を用いた証明を与えかつ定理を改良した．$p\leq 1$ の場合の結果

は最初 Stein [30] によって得られた．[30] の証明は定理 B の関数 $S_c u$ を利用したものである．

定理 10 の証明法．(I) f の Poisson 積分を v，$T_m f$ の Poisson 積分を V とすると，不等式

$$(S_c V)(x) \leq C(G_\lambda v)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

($S_c V$ は定理 B の中の関数，$G_\lambda v$ は $u = t|\nabla v|$ に対して作った補題 2 の関数）が示されるので，これを積分して

$$\|T_m f\|_{H^p} \approx \|S_c V\|_{L^p} \leq C\|G_\lambda v\|_{L^p} \approx \|S_c v\|_{L^p} \approx C\|f\|_{H^p}.$$

(Stein [31] Chap. IV, §3, Chap. VII, §3 参照.) (II) f を Calderón-Zygmund 分解して計算することにより $m\{M_\varphi^+ T_m f > \alpha\}$ を $m\{M_\lambda^* f > \alpha\}$ を用いて評価することができ，その評価式を積分して

$$\|M_\varphi^+ T_m f\|_{L^p} \leq C\|M_\lambda^* f\|_{L^p}$$

が示される．(Fefferman-Stein [15] pp. 188–191 参照.) (III) 補間定理によって $p \leq 1$ の場合に示しておけばよい；$p \leq 1$ の場合は定理 4 が使えるから p-atom f に対して $\|T_m f\|_{H^p}$ を評価すればよい；その評価は比較的やさしい．(Coifman-Weiss [10] Theorem (1.20), pp. 586–587 または [27] 参照.)

(注) (II) または (III) の方法で Hilbert 変換 H の H^p (定理3で特徴付けられる H^p) での有界性が言えるから, 定理 A の (ii) (= 定理2の $\Longrightarrow$ の部分) の別証明が与えられる.

Littlewood-Paley 型の関数による H^p の特徴付け. 定理 A の最大関数 $N_\alpha u$ (u は f の Poisson 積分) を定理3でいうような最大関数 $M_\varphi^+ f$ または $M_\lambda^* f$ でおきかえることができたように, 定理 B の面積積分 $S_c u$ (u は f の Poisson 積分) も調和関数によらない他の補助関数でおきかえることができる.

χ を次のような関数とする:

$$\begin{cases} \chi \in \mathcal{S}, \quad \operatorname{supp} \hat{\chi} \subset \{\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}, \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(2^k \xi) = 1 \quad \text{for } \xi \neq 0, \\ (\hat{\chi} = \chi \text{ の Fourier 変換}). \end{cases}$$

$f \in \mathcal{S}'$ に対して $d(f)$ を次のように定義する:

$$d(f)(x) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \left(f * \frac{1}{2^k} \chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

次の定理が成り立つ:

定理 11. $0<p<\infty$ とする.

(i) $f\in H^p \Rightarrow d(f)\in L^p$, $\|d(f)\|_{L^p}\le C\|f\|_{H^p}$.

(ii) $f\in \mathcal{S}'$, $d(f)\in L^p$

$\Rightarrow \exists P$ 多項式 s.t. $f-P\in H^p$, $\|f-P\|_{H^p}\le C\|d(f)\|_{L^p}$.

証明. 今までに述べた定理は Hilbert 空間に値をとる関数または distribution に対しても成り立つことに注意する.(一般の Banach 空間でなく Hilbert 空間としなければならないのは, Plancherel の定理を成り立たせるためである.)Hilbert 空間 ℓ^2 の値をとる distribution からなる H^p 空間を $H^p(\ell^2)$ と書く; 単に H^p と書くのはこれまで扱ってきた複素数値 distribution からなる H^p 空間である. (i) を証明しよう. $\mathbb{C}$ から ℓ^2 への連続線型作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathbb{C}\to\ell^2)$ は ℓ^2 と同一視できる. この空間に値をとる $\mathbb{R}$ 上の関数 m を次で定義する:

$$m(\xi)=\left(\hat{\chi}(2^k\xi)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^2\cong\mathcal{L}(\mathbb{C}\to\ell^2).$$

作用素 $T_m: f\longmapsto \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)$ を考える. これは $\mathbb{C}$-値 distribution を ℓ^2-値 distribution にうつす作用素である. 関数 m が定理 10 の仮定を満たすこと, すなわち

$$\left\| \left(\frac{d}{d\xi}\right)^j m(\xi) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}\to\ell^2)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| 2^{kj} \hat{\chi}^{(j)}(2^k\xi) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_j |\xi|^{-j} \quad , \quad j=0,1,2,\cdots,$$

は直ちにわかるから，定理 10 によって

$$\|T_m f\|_{H^p(\ell^2)} \leq C \|f\|_{H^p} .$$

ところが

$$\|d(f)\|_{L^p} = \|T_m f\|_{L^p(\ell^2)} \leq C \|T_m f\|_{H^p(\ell^2)}$$

であるから，(i) は示された．(ii) を証明するのもやはり定理 10 を用いればよい．今度は，supp $\hat{\chi}$ の上で 1 となる滑らかな関数で台が $\{\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4\}$ にふくまれる関数 ψ をひとつ固定して，

$$\tilde{m}(\xi) = \left(\psi(2^k\xi)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \cong \mathcal{L}(\ell^2 \to \mathbb{C}),$$

$$T_{\tilde{m}} g = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{m}\,\mathcal{F} g)$$

とする；今度は $T_{\tilde{m}}$ は ℓ^2-値 distribution を $\mathbb{C}$-値 distribution にうつす作用素である．上の $\tilde{m}$ も定理 10 の仮定をみたすから $\|T_{\tilde{m}} g\|_{H^p} \leq C \|g\|_{H^p(\ell^2)}$ ．ここで $g = \left(f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)_k$ ととれば

$$T_{\tilde{m}} g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(2^k\xi)\, \hat{\chi}(2^k\xi)\, \hat{f}(\xi)\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\chi}(2^k \xi)\hat{f}(\xi)\right)$$

$$= f - P \quad , \ P: \text{多項式},$$

であるから

(9) $$\|f-P\|_{H^p} \leq C \left\| \left(f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)_k \right\|_{H^p(\ell^2)}.$$

さて実は

(10) $$\left\| \left(f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)_k \right\|_{H^p(\ell^2)} \leq C \left\| \left(f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)_k \right\|_{L^p(\ell^2)}$$

が成り立つことを示そう．これが言えたならば，上式の右辺は $\|d(f)\|_{L^p}$ に他ならないから，(9) と (10) とから求める結果が得られる．(10) を示すために $g = \left(f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)_k$ を３つに分解する：

$$g = g_0 + g_1 + g_2 ,$$

$$g_0 = (g_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}, \quad g_{0,k} = \begin{cases} f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right) & \text{if } k \equiv 0 \pmod 3 \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

$$g_1 = (g_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}, \quad g_{1,k} = \begin{cases} f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right) & \text{if } k \equiv 1 \pmod 3 \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

$$g_2 = (g_{2,k})_{k\in\mathbb{Z}}, \quad g_{2,k} = \begin{cases} f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right) & \text{if } k \equiv 2 \pmod 3 \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

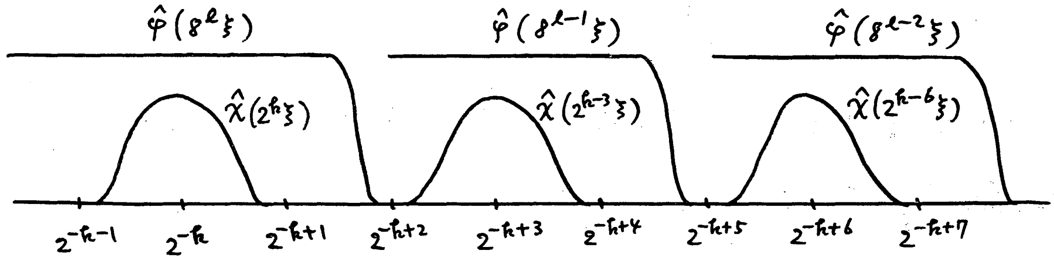
$\|g_0\|_{H^p(\ell^2)}$ を調べるために次のような $\varphi \in \mathcal{S}$ をとる：

$$\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\xi| \le 3 \\ 0 & \text{if } |\xi| \ge 4 . \end{cases}$$

この時 $k \equiv 0 \pmod{3}$ なる k と整数 ℓ に対しては

$$f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right) * \frac{1}{8^\ell}\varphi\left(\frac{\cdot}{8^\ell}\right) = \begin{cases} f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right) & \text{if } -k \le -3\ell \\ 0 & \text{if } -3\ell < -k \end{cases}$$

となってしまう；下図参照.



故に

$$\sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left\| \left(g_0 * \frac{1}{8^\ell}\varphi\left(\frac{\cdot}{8^\ell}\right)\right)(x) \right\|_{\ell^2}$$

$$= \sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \equiv 0 \pmod{3}} \left| \left(f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right) * \frac{1}{8^\ell}\varphi\left(\frac{\cdot}{8^\ell}\right)\right)(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k \equiv 0 \pmod{3}} \left| \left(f * \frac{1}{2^k}\chi\left(\frac{\cdot}{2^k}\right)\right)(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le d(f)(x).$$

従って定理3（その後の㊟）によって $\|g_0\|_{H^p(\ell^2)} \le C\|d(f)\|_{L^p}$.
g_1, g_2 についても同様. これで(10)が示され定理は証明された.

同様にして $d(f)$ のかわりに

$$g(f)(x)=\left(\int_0^\infty\left|\left(f*\frac{1}{t}\chi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(x)\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

をとってもまったく同じことが言える．また $d(f)$ を

$$S(f)(x)=\left(\iint_{|x-y|<t}\left|\left(f*\frac{1}{t}\chi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(y)\right|^2 t^{-1}\,dy\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

でおきかえてもまったく同じことが成り立つ．Calderón-Torchinsky [3] I を参照せよ．

定理11（ただし $d(f)$ を上の $S(f)$ でおきかえたもの）を定理Bの結果から重ね合わせの方法で導くこともできる（[3] I §5 参照）．また

$$u(x,t)=v(x,t^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t^2}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t^2}}f(y)\,dy \quad {}^{*)}$$

に対して定理1の証明と同様の計算を行なって，$d(f)$ を

$$S_{heat}(f)(x)=\left(\iint_{|x-y|<t}\left|\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}\right|^2 dy\,dt\right)^{1/2}$$

でおきかえた定理11も直接証明することもできる（$[3]^{\mathrm{I}}$ §6 参照）．

(注) Hilbert空間値の H^p と作用素値 Fourier multiplier に関

---

*) $v(x,s)$ は熱方程式 $\frac{\partial v}{\partial s}=\Delta v$, $v(x,0)=f(x)$ の解である．

する定理 10 を使って定理 1 の別証明が与えられる.

(☆) $d(f)$, $g(f)$, $S(f)$ の定義に用いた関数 χ を一般の関数でおきかえて, 定理 11 にも定理 3 の (iii) に相当する条項をつけくわえるべきであるが, そのような精密な結果を筆者は知らない.

§3. これまでの話の拡張

1° これまでの話の基本となったのは, $\mathbb{R}$ 上の distribution f を

$$\left(f * \frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t>0,$$

によって上半平面 $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ に拡張することであった. $\mathbb{R}^n$ 上の distribution f に対しても, $\mathbb{R}^n$ 上の試験関数 φ を固定して,

$$\left(f * \frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t>0,$$

によって上半空間 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上の関数をつくれば, 今までの結果はそのまま成り立つ. もう少し詳しく言うと, §2 の最初の定義で「上半平面上の複素数値調和関数」とあるのを「上半空間 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上の複素数値調和関数」とおきかえて $H^p = H^p(\mathbb{R}^n)$ を定義すると, 定理 3 〜 11 は簡単な変更のもとにすべて成り立つ.

2° $H^p = H^p(\mathbb{R})$ の背景には正則関数の空間 $\mathcal{H}^p$ があったが,

$H^p(\mathbb{R}^n)$ の背景にも対応する空間を考えることができる．ただし $n \geqq 2$ の場合は $n=1$ の場合より少し複雑である．

まず，定理1は，u を上半空間 $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上の調和関数とし，$N_{c_1}u$ および $S_{c_2}u$ をそれぞれ

$$(N_{c_1}u)(x) = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n,\, t>0 \\ |x-y|<c_1 t}} \{|u(y,t)|\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(S_{c_2}u)(x) = \left(\iint_{|y-x|<c_2 t} |\nabla u(y,t)|^2 t^{1-n}\, dy\, dt \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\left(\nabla u(y,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial y_n}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right)$$

でおきかえれば成り立つ．次に，「$f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, が正則関数ならば $\log|f(z)|$ は劣調和関数である」という事実に対応して次の事実が成り立つ：$U = U(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ が $(n+1)$ 個の実変数の実数値調和関数であるとき

$$\left(\sum_{j_1=0}^{n} \cdots \sum_{j_k=0}^{n} \left(\frac{\partial^k U}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n-1+k}}$$

は劣調和関数になる（Calderón-Zygmund [5]）．これらのことから，$\mathcal{H}^p$ に対応する空間として次のような $\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ をつくることが考えられる：$\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ は $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上の実数値調和関数の $(n+1)^k$ 個の系 $\{u_J \mid J=(j_1,\cdots,j_k) \in \{0,1,\cdots,n\}^k\}$

であって，ある調和関数 U によって

$$u_{(j_1,\cdots,j_k)}(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial^k U(x_0,x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_{j_1}\cdots\cdots\partial x_{j_k}},$$

$$x_0>0,\ (x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

とあらわされ，*) かつ

$$\sup_{0<x_0<\infty}\int\!\cdots\!\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j_1=0}^{n}\cdots\sum_{j_k=0}^{n}\left(u_{(j_1,\cdots,j_k)}(x_0,x_1,\cdots,x_n)\right)^2\right)^{p/2}dx_1\cdots dx_n<\infty$$

となるものの全体である．このように $\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ を定義すれば，$\mathcal{H}^p$ を $\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ でおきかえ $f\in\mathcal{H}^p$ の実部 $\mathrm{Re}f$ のかわりに $\{u_J\}\in\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ の $(0,\cdots,0)$-成分 $u_{(0,\cdots,0)}$ をとって，定理Aと定理Bが，$p>\frac{n-1}{n-1+k}$ ならば，成立する．従って，$f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ なるための必要十分条件は，$\mathrm{Re}f$ と $\mathrm{Im}f$ が両方とも $\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$，$p>\frac{n-1}{n-1+k}$，の元の $(0,\cdots,0)$-成分の境界値であること，となる．このことを定理2の形に言いかえると次のようになる：作用素 H_J を

*) $\{u_J\}$ がこのようにあらわされるための条件は $\{u_J\}$ に関する簡単な一階偏微分方程式系で書ける．たとえば $k=1$ のときは次のようになる：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}, & i,j=0,1,\cdots,n\\[2mm] \dfrac{\partial u_0}{\partial x_0}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}=0.\end{cases}$$

$$H_J f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{-i\xi_{j_1}}{|\xi|}\cdots\cdots\frac{-i\xi_{j_k}}{|\xi|}\mathcal{F}f(\xi)\right),$$

$$J=(j_1,\cdots,j_k)\in\{0,1,\cdots,n\}^k,$$

$$\left(\begin{array}{l} j_1=0 \text{ のときは } \dfrac{-i\xi_{j_1}}{|\xi|} \text{ を } 1 \text{ でおきかえる} \\ j_2=0,\cdots,j_k=0 \text{ の時も同様} \end{array}\right)$$

で定義すると，$p>\dfrac{n-1}{n-1+k}$ の時，

$$f\in H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} H_J f\in L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n) \\ \text{for all } J\in\{0,1,\cdots,n\}^k, \end{array}\right.$$

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\approx\sum_J\|H_J f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f\in H^p(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

上で述べた Calderón-Zygmund [5] の定理では $\dfrac{n-1}{n-1+k}$ は最良の指数である．従って定理 A の (i) の証明を §1 で与えたと同様に行なうためには条件 $p>\dfrac{n-1}{n-1+k}$ が必要であり，その結果，ひとつの $H^p(\mathbb{R}^n)$ に対してたくさんの $\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ が構成されしかもひとつの k ではすべての $p>0$ に対してはうまくいかない，ということになった．しかし，本当に $p\leq\dfrac{n-1}{n-1+k}$ の時には $H^p(\mathbb{R}^n)$ と $\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ の間に定理 A，B または定理 2（上に述べた変更を加えたもの）で言う関係（特に定理 A の (i) の部分，定理 B の「必要」の部分，定理 2 の $\Longleftarrow$ の部分）が成り立たないのか，ということはわ

からない(Fefferman [13] P.54).

$\mathcal{H}^p_k(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$ については Stein-Weiss [32], Fefferman-Stein [15] §8 を見よ.

3° $H^p(\mathbb{R}^n)$ を多変数正則関数の H^p 空間と関係づけることができる. $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ が開集合の時 tube domain $T_\Gamma=\mathbb{R}^n\times i\Gamma=\{x+iy \mid x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\Gamma\}\subset\mathbb{C}^n$ 上の空間 $\mathbb{H}^p(T_\Gamma)$ とは, T_Γ 上の正則関数 F で

$$\|F\|_{\mathbb{H}^p(T_\Gamma)}=\sup_{y\in\Gamma}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty$$

なるものの全体である. Γ_j, $j=1,\cdots,n+1$, を open convex proper cones で $\bigcup_{j=1}^{n+1}\Gamma_j=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ となるものとし, Γ_j^* を Γ_j の dual cone とすれば, 次のことが成り立つ:

$$f\in H^p(\mathbb{R}^n)\Longleftrightarrow\left(\begin{array}{l}\exists F_j\in\mathbb{H}^p(T_{\Gamma_j^*}),\ j=1,2,\cdots,n+1,\\ \text{s.t.}\quad f=\sum_{j=1}^{n+1}\lim_{\substack{y\downarrow 0\\ y\in\Gamma_j^*}}F_j(x+iy),\end{array}\right.$$

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\approx\inf\sum_{j=1}^{n+1}\|F_j\|_{\mathbb{H}^p(T_{\Gamma_j^*})}.$$

Carleson [7], Coifman-Weiss [10] P.585 を見よ.

4° parabolic H^p space について. 1° で定義した $H^p(\mathbb{R}^n)$

のひとつの特徴付けは，この場合の定理3によって，

$$f\in H^p(\mathbb{R}^n) \iff \sup_{0<t<\infty}\left|\left(f*\frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right)(x)\right| \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

で与えられる．上であらわれた $\mathbb{R}^n$ の相似変換 $x\longmapsto tx$，$t>0$，を一般の変換 A_t でおきかえて新しい H^p 空間を定義することができる．$\{A_t \mid t>0\}$ を $\mathbb{R}^n$ の線型変換の群とする，すなわち

$$A_t A_s = A_{ts} \quad , \quad A_1 = id.$$

が成り立つとする；このような A_t はある行列 P を用いて $A_t = t^P = e^{P\log t}$ とかける．ここで P に対して条件

$$\exists \alpha>0 \quad \text{s.t.} \quad (Px,x) \geqq \alpha|x|^2 \quad \text{for all } x\in\mathbb{R}^n$$

を仮定する（上式の $(\ ,\ )$ は $\mathbb{R}^n$ の通常の内積，$|\cdot|=(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$ は通常の x の長さである）．このとき $H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n)$，$0<p<\infty$，を

$$f\in H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n) \iff \sup_{0<t<\infty}\left|\left(f*t^{-\gamma}\varphi(A_{t^{-1}}\cdot)\right)(x)\right| \in L^p(\mathbb{R}^n)^{*)}$$

（ただし $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は $\int\varphi(x)dx\neq0$ なる固定した関数）で定義すると，定理3～11は必要な変更を加えれば H^p のかわりに $H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n)$ に対しても成り立つ．必要な変更のうちで重要なものは，$\mathbb{R}^n$ の距離を $\{A_t\}$ に則した距離 ρ に変えることで，ρ は $|A_{\rho(x)^{-1}}x|=1$ で定義される；たとえば

*) $t^{-\gamma}=\det A_{t^{-1}}$ ，$\gamma=\mathrm{trace}\,P$.

$H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n)$ を特徴付ける S-関数は

$$(Sf)(x)=\left(\iint_{\rho(x-y)<t}\left|\left(f * t^{-\gamma}\psi(A_{t^{-1}}\cdot)\right)(y)\right|^2 t^{-\gamma}\,dy\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

で与えられる．$H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n)$ については Calderón-Torchinsky [3] を見よ．$H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n)$ の atom 分解による特徴付け（定理4）は Latter-Uchiyama [21] にある．

$H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n)$ に対する定理2は，P が対角型のときには，Coifman-Dahlberg [9] によって次の形で得られている：$2n$ 個の特異積分作用素 K_j, $j=1,\cdots,2n$，を適当にとれば，

$$\begin{cases} f\in H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow K_j f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ j=1,\cdots,2n, \\ \|f\|_{H^p_{\{A_t\}}(\mathbb{R}^n)} \approx \displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\|K_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{cases}$$

がすべての p, $0<p<\infty$, に対して成り立つ（K_j として p に依存しないものがとれる）．この結果は，特に $A_t=t\cdot id.$ の場合として，$H^p(\mathbb{R}^n)$ に対しても成り立つ．$H^p(\mathbb{R}^n)$ に対しては 2° で述べたような定理2の一般化も成り立つのだから，上の結果は定理2とは少し違ったものと考えた方がよいのかもしれない．P が対角化できない時にはこのような結果はまだ得られていないようである．

5° $\mathbb{R}^n$ 以外の一般の空間 X の上でも，X 上に距離と

測度が与えられていて適当な性質が満たされていれば, p-atom というものを定義でき従って $H^p(X)$ を定義できて, 今までに述べてきた結果を一般化できる. これについては Coifman-Weiss [10] を参照せよ.

引用文献

[1] D. L. Burkholder and R. F. Gundy, Distribution function inequalities for the area integral, Studia Math. 44(1972), 527-544.

[2] D. L. Burkholder, R. F. Gundy and M. L. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p , Trans. Amer. Math. Soc. 157(1971), 137-153.

[3] A. P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, I, Advances in Math. 16(1975), 1-64; II, ibid. 24(1977), 101-171.

[4] A. P. Calderón and A. Zygmund, On the theorem of Hausdorff-Young and its extensions, Contributions to Fourier Analysis, Ann. of Math. Studies, no. 25, pp.166-188, Princeton, 1950.

[5] A. P. Calderón and A. Zygmund, On higher gradients of harmonic functions, Studia Math. 24(1964), 211-226.

[6] S. Campanato, Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 17(1963), 175-188.

[7] L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO , Advances in Math. 22(1976), 269-275.

[8] R. R. Coifman, A real variable characterization of H^p , Studia Math. 51(1974), 269-274.

[9] R. R. Coifman and B. Dahlberg, Singular integral characterizations of nonisotropic H^p spaces and the F. and M. Riesz theorem, Harmonic Analysis in Euclidean Spaces, Part 1, pp.231-234, Proc. of Symposia in Pure Math., Vol.35, Amer. Math. Soc., 1979.

[10] R. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1977), 569-645.

[11] M. M. Day, The spaces L^p with $0<p<1$, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 816-823.

[12] P. L. Duren, "Theory of H^p spaces", Academic Press, 1970.

[13] C. Fefferman, Harmonic analysis and H^p spaces, Studies in Harmonic Analysis, pp. 38-75, Studies in Math., Vol. 13, Math. Assoc. Amer., 1976.

[14] C. Fefferman, N. M. Rivière and Y. Sagher, Interpolation between H^p spaces: The real method, Trans. Amer. Math. Soc. 191(1974), 75-81.

[15] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several vaiables, Acta Math. 129(1972), 137-193.

[16] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math. 54(1930), 81-116.

[17] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math. 104(1960), 93-139.

[18] S. Lgari, An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz II, Tohoku Math. J. 15(1963), 343-358.

[19] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14(1961), 415-426.

[20] R. H. Latter, A characterization of $H^p(R^n)$ in terms of atoms, Studia Math. 62(1978), 93-101.

[21] R.H. Latter and A. Uchiyama, The atomic decomposition for parabolic H^p spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 253(1979), 391-398.

[22] J. Marcinkiewicz, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Math. 8(1939), 78-91.

[23] N. G. Meyers, Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 717-721.

[24] S. G. Mikhlin, On the multipliers of Fourier integrals (Russian), Dokl. Akad. Nauk. 109(1956), 701-703.

[25] S. G. Mikhlin, Fourier integrals and multiple singular integrals (Russian), Vest. Leningrad Univ.,Ser. Math. 12(1957), 143-145.

[26] S. G. Mikhlin, "Multidimensional singular integrals and integral equations", English translated edition, International series of monographs in pure and applied mathematics vol.83, Pergamon Press, 1965.

[27] A. Miyachi, On some Fourier multipliers for $H^p(R^n)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.IA, 27(1980), 157-179.

[28] J. Peetre, Bounded operators in L^p $(0<p<1)$, Technical Report, Lund, 1975.

[29] E. M. Stein, On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz, Trans. Amer. Math. Soc. 88(1958), 430-466.

[30] E. M. Stein, Classes H^p , multiplicateurs et fonctions de Littlewood-Paley, C. R. Acad. Sci., Paris 263(1966), A716-A719; A780-781; ibid. 264 (1967), A107-108.

[31] E. M. Stein, "Singular integrals and differentiability properties of functions", Princeton Univ. Press, 1971.

[32] E. M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables, I. The theory of H^p-spaces, Acta Math. 103(1960), 25-62.

[33] A. Uchiyama, Radial maximal functions and grand maximal functions on parabolic H^p spaces, preprint.

[34] A. Zygmund, "Trigonometric series", Second edition, Cambridge Univ. Press, 1959.