数理解析研究所講究録
第451巻 1982年 125-181

超関数の曲面波展開

東大理　片岡清臣

1960年代の後半から1970年代前半にかけて超関数の余接方向での特異性が認識されるようになって以来，線形偏微分作程式論は大きく発展して来た。よく知られている様に$\mathbb{R}^n$上の関数の〝なめらかさ〟はその関数のフーリエ変換の∞遠での減小度に対応している。ところがフーリエ変換はそのままでは大域的な演算であるから超関数の余接ベクトル束上での特異性を定義するには何らかの意味で局所化しなければならない。C^∞－カテゴリーではいわゆる1の分解という便利な方法があるがC^ω－カテゴリーではこれに直接代わるものはない。その為Hörmander らは関数のカットの仕方を替えていった列を使っていわゆる〝解析的波面集合〟を定義した。一方，素粒子物理学などでよく知られていた，くさび状領域で定義された正則関数の対とその境界値に対する〝くさびの刃定理〟は正則関数の境界値と元の正則関数とは密接なつながりがあ

る事を示していた。Martineau はさらにこれを任意有限の正則関数の組に対する定理として一般化した。また佐藤幹夫は実関数とは実軸付近での正則関数のコホモロジカルな同値類である事を既に直観し，いわゆる“佐藤の超関数（Hyper-function）”を考案していたのであるが，これと Martineau のくさびの刃定理を結びつけて佐藤の超関数の余接ベクトル束上での特異性の理論，すなわち“マイクロ関数”の理論を作り上げた。この理論を土台にして佐藤－河合－柏原らは解析的擬微分方程式系の一般論を代数的に明解に，かつ幾何学的にも見通しのよい理論としてまとめ上げる事に成功した。しかしこの理論は高度に抽象的であるホモロジー代数学をその言語としているため一般の解析学者にとっては難解で，ディストリビューションに対する“解析波面集合”の理論などとの整合性なども明らかではなかった。ところが1975年頃になると事情は一変し，2つの理論が整合的であるばかりではなく，少なくともその基礎的部分はある種の解析的複素位相をもった振動型積分作用素に対する反転公式だけを使って完全に把握できる事が知られるようになった。また最近ではさらに J. Sjöstrand による，マイクロ双曲型混合問題の解のマイクロ解析性に関する結果の中で使われた手法が注目を浴びている。この手法もやはり複素位相をもった振動型積分作用素

の理論に基づいているのであるが，超関数の解析的特異性をいわば“曲がったフーリエ変換”の増大度によって特徴付けようとするもので，正則関数を根本とする佐藤の思想とは全く対立している。勿論この様な考え方は Hill, Bros – Iagolnitzer などによって既に得られていたのではあるが Sjöstrand の方法はあるパラメータを増やした事により微分方程式論でのいわゆる，ア・プリオリ評価の方法が難なく使える様になった。このためエネルギー法的色彩の強い問題には特に有効で，先に述べた双曲型混合問題などでは基本解の存在がわからなくても解のマイクロ解析性がア・プリオリに評価できる様になった。しかしこの方法は専ら不等式的に取り扱われる為，幾何学的な見通しのよさはあまり無く，しかも解の具体的性質を調べたり，基本解を構成したりするのに有効であるとは今の所いえない。これに対して従来の正則関数を中心としたいわゆる“代数解析的方法”の枠内でもある意味で L^2 理論的不等式的方法（すなわちエネルギー法）が非常に興味深い形で定式化でき，Sjöstrand の結果もこの立場から自然に理解できるらしい事がわかって来た。この様な状況の中でこの小論では佐藤の超関数を中心とした解析的特異性の余接方向分解の理論を [15]，[16] に沿って初等的に解説し，できれば Sjöstrand の方法との比較，代数解析的エネルギー法などの最近のトピ

ックスについてもふれたい。

目次

§1. δ-関数の曲面波展開とくさびの刃定理.
§2. 解析的特異性の余接分解とSjöstrandの方法
＋代数解析的エネルギー法.

§1. δ-関数の曲面波展開とくさびの刃定理.

δ-関数を解析的特異性の極めて小さな超関数の積分として書き表わすというアイデアは佐藤[36], 佐藤－河合－柏原[37]に始まるが, そこでは実解析学的な意味が明らかにされていない。この節ではまずこの点を実解析学的にとらえて, さらにそれから一種の正則関数に対する展開定理を得る事を目標とする。さて, フーリエ解析における基本公式

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\eta\rangle}\,d\eta$$

を思い出そう。但し, $\langle x,\eta\rangle = \sum_{j=1}^n x_j\eta_j$。右辺の積分において$\eta$を次の様な$\xi\in\mathbb{R}^n$の同次一次関数に置き換えてみる。

$$\eta_j = \xi_j + i\alpha\left(|\xi|\cdot x_j - \langle x, \tfrac{\xi}{|\xi|}\rangle\xi_j\right) \quad j=1,\dots,n. \qquad (1)$$

但し, $n\geq 2$, $|\xi|=\sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$であり, $\alpha\geq 0$はパラメータ. その時$\xi\in\mathbb{R}^n$を動かした時ηは$\mathbb{C}^n$の中の無限に広がったある実n次元部分多様体上を動く。従ってこの置換による積分は一応

上とは別のものとして考えなければならない。そこで改めて $\varepsilon>0$ なるダンピング因子をつけた積分

$$I^\alpha_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \exp(i\langle x, \eta(\xi,x)\rangle - \varepsilon|\xi|)\, d\eta_1\wedge\cdots\wedge d\eta_n(\xi,x) \quad (2)$$

を考えよう。ここで(1)のヤコビアンは

$$J(x,\xi) = \left(1 - i\alpha\langle x, \tfrac{\xi}{|\xi|}\rangle\right)^{n-2}\left\{1 - i\alpha\langle x, \tfrac{\xi}{|\xi|}\rangle - \alpha^2\left(|x|^2 - \langle x, \tfrac{\xi}{|\xi|}\rangle^2\right)\right\}$$

となるから、

$$I^\alpha_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i|\xi|\left(\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\rangle + i\alpha\left(|x|^2 - \langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\rangle^2\right) + i\varepsilon\right)} J(x,\xi)\, d\xi\text{。}$$

さらに $d\xi = |\xi|^{n-1} d|\xi| \wedge d\sigma\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$ ($d\sigma(\eta) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d\eta_1\wedge\cdots\overset{\vee}{j}\cdots\wedge d\eta_n$ は $\{|\eta|=1\}$ 上の体積要素) だから $|\xi|$ について積分すると、

$$I^\alpha_\varepsilon(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{|\xi|=1} \frac{(1 - i\alpha\langle x,\xi\rangle)^{n-2}\left(1 - i\alpha\langle x,\xi\rangle - \alpha^2(|x|^2 - \langle x,\xi\rangle^2)\right)}{\left(\langle x,\xi\rangle + i\alpha(|x|^2 - \langle x,\xi\rangle^2) + i\varepsilon\right)^n}\, d\sigma(\xi) \quad \text{---(3)}$$

となる。容易にわかるように $\alpha>0$ とすれば $\forall\varepsilon\geq 0$ に対して被積分関数は $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\xi\in S^{n-1}$ で解析的となる。

<u>定理 1.1.</u> $I^\alpha_\varepsilon(x)$ は $\varepsilon\to+0$ の時 $\mathbb{R}^n$ 上の測度として $\delta(x)$ に収束する。また $\alpha>0$ ならば $I^\alpha_\varepsilon(x)$ は $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上広義一様に 0 に収束する。特に $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ において $I^\alpha_0(x)=0$.

$\because$) まず積分の回転不変性により $x=(|x|, 0, \ldots, 0)$ としてよい。$|x| = r\geq 0$ とおく。最初に $\alpha>0$, $r>0$ の時を考える。その時 $I^\alpha_\varepsilon(x)$ の定義(2)より、

$$(2\pi)^n I^\alpha_\varepsilon(x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} d_\xi\left\{\frac{1}{ir}\exp(ir\eta_1 - \varepsilon|\xi|)\, d\eta_2\wedge\cdots\wedge d\eta_n(\xi)\right\}$$

$$+\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\frac{\varepsilon}{ir}\exp(ir\eta_1-\varepsilon|\xi|)\,d|\xi|\wedge d\eta_2\wedge\cdots\wedge d\eta_n(\xi)$$

と変形できる。ダンピングファクターがついているから第一項は明らかに0になる。また第2項は(3)と同じく動径方向の積分を行うと，

$$\frac{\varepsilon}{ir}(n-1)!\int_{|\xi|=1}\frac{(1-i\alpha r\xi_1)^{n-2}\{(1-2i\alpha r\xi_1)d\xi_2\cdots d\xi_n+i\alpha r\,d\sigma(\xi)\}}{(-ir\xi_1+\alpha r^2(1-\xi_1^2)+\varepsilon)^n}$$

となる。従って $I^\alpha_\varepsilon(x)$ は $\varepsilon\to+0$ の時 $\{r=|x|>0\}$ 上で広義一様に0に収束する。次に $x=0$ の付近での挙動を調べる為に $I^\alpha_\varepsilon(x)$ の(3)の表現をさらに $\xi_2,\ldots,\xi_n$ について積分したもの，

$$\frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!}I^\alpha_\varepsilon(x)=\frac{2\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_0^\pi\frac{(1-i\alpha r\cos\theta)^{n-2}(1-i\alpha r\cos\theta-\alpha^2r^2\sin^2\theta)}{(r\cos\theta+i\alpha r^2\sin^2\theta+i\varepsilon)^n}\sin^{n-2}\theta\,d\theta \qquad (4)$$

を使う。今積分変数 θ を $t=\cos\theta+i\alpha r\sin^2\theta$ に変換する事を考える。実際 $|\alpha r|\leqq 1/16$ ならば $\{t\in\mathbb{C}\,;\,|t|\leqq 2\}$ で定義された逆変換が存在して

$$\cos\theta=\frac{2(t-i\alpha r)}{1+\sqrt{D}}\quad,\quad \sin\theta\,d\theta=-\sqrt{D}^{-1}dt$$

と書ける。但し，$D=1-4i\alpha rt-4\alpha^2r^2$。よって，

$$\frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!}I^\alpha_\varepsilon(x)=\frac{2\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_{-1}^1\left(\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{D}+i\alpha rt}{\sqrt{D}}\right)\left(\frac{1-2i\alpha rt+\sqrt{D}}{2}\right)^{-\frac{n-3}{2}}\times$$
$$\times\frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(rt+i\varepsilon)^n}\,dt$$

となる。容易にわかるようにこの積分路として実軸上の区間 $(-1,1)$ がとれる。さてこの最初の三つの因子を rt の巾級数

に展開しよう。すなわち，

$$(1+\sqrt{D}/2)^{n-2}(\sqrt{D}+i\alpha rt/\sqrt{D})(1-2i\alpha rt+\sqrt{D}/2)^{-\frac{n-3}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty} g_m^\alpha(r)(rt)^m \quad \text{-----}(5)$$

が $|rt|\leqq 1/8\alpha$ で成立し，各 $g_m^\alpha(z)$ は $\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqq 1/16\alpha\}$ で正則となる。そこで以下 $0\leqq r\leqq 1/16\alpha$ とすると，

$$I_\varepsilon^\alpha(x)=C_n\cdot\sum_{m=0}^{\infty} g_m^\alpha(r)\int_{-1}^{1}\frac{(rt)^m}{(rt+i\varepsilon)^n}\cdot(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt.$$

と無限和に分解される。但し $C_n=2\cdot(n-1)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}/\{(-2\pi i)^n\Gamma(\frac{n-1}{2})\}$。$m\geqq n$ の時は被積分関数は $r^{m-n}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$ で上から評価されるから，

$$I_\varepsilon^\alpha(x)=C_n\sum_{m=0}^{n-1} g_m^\alpha(r)\int_{-1}^{1}\frac{(rt)^m}{(rt+i\varepsilon)^n}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt+(r=\varepsilon=+0\text{で有界})$$

と書ける。また簡単な計算からわかる様に，$m\geqq 1$ ならば $r^{n-1}\int_{-1}^{1}(rt)^m(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}/(rt+i\varepsilon)^n\cdot dt$ は $r=\varepsilon=+0$ で有界となり，$m=0$ ならばルジャンドルの公式によって

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(rt+i\varepsilon)^n}dt=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{i^n\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\varepsilon\cdot(r^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$

がわかる．従って，

$$I_\varepsilon^\alpha(x)=\frac{2(n-1)!}{(2\sqrt{\pi})^n\Gamma(\frac{n}{2})}g_0^\alpha(r)\cdot\varepsilon\cdot(r^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n+1}{2}}+r^{1-n}\times(r=\varepsilon=+0\text{で有界})$$

と書ける。$g_0^\alpha(0)=1$ であるから第一項は測度の意味で $\delta(x)$ に収束する。一方前半での結果から，$\alpha>0$ の時 $\lim_{\varepsilon\to+0} I_\varepsilon^\alpha(x)$ の

台は原点のみに限られているから第2項は測度の意味で0に収束する事がわかる。従って $\alpha>0$ の時はすべて証明された。$\alpha=0$ の時は上の第2項がもともと0になるから自明である。

補題1.2. R, α を正数，ξ を $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとすると，

$$\{\langle z, \xi\rangle + i\alpha(\sum_{j=1}^n z_j^2 - \langle z, \xi\rangle^2)\}^{-n}$$

は $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\, z| = R,\ \langle \mathrm{Im}\, z, \xi\rangle - \alpha(1+4\alpha^2R^2)(|\mathrm{Im}\, z|^2 - \langle \mathrm{Im}\, z, \xi\rangle^2) > -\alpha R^2\}$ で正則。

∵) $\xi=(1,0,\dots,0)$ としてよい。$z_j = x_j + iy_j$ とおく。

$$\langle z, \xi\rangle + i\alpha(\sum_{j=1}^n z_j^2 - \langle z, \xi\rangle^2) = x_1 - 2\alpha\sum_{j=2}^n x_j y_j$$
$$+ i\{y_1 - \alpha(y_2^2 + \cdots + y_n^2) + \alpha(x_2^2 + \cdots + x_n^2)\}$$

であるから，$|\mathrm{Re}\, z| = |x| = R$ とおくと分母の零点は

$$x_1 = 2\alpha\sum_{j=2}^n x_j y_j, \quad y_1 - \alpha(y_2^2 + \cdots + y_n^2) + \alpha R^2 = \alpha x_1^2$$

を満たす。特に，$y_1 - \alpha(y_2^2 + \cdots + y_n^2) + \alpha R^2 = 4\alpha^3(\sum_{j=2}^n x_j y_j)^2 \leqq 4\alpha^3 R^2 (y_2^2 + \cdots + y_n^2)$．これより明らか。

系1.3. $\theta(R) = \alpha R^2$ $(\alpha R \leqq \frac{1}{2})$, $= \sqrt{16\alpha^4R^4 + 4\alpha^2R^2 - 1}\,/\,2\alpha(1+4\alpha^2R^2)$ $(\alpha R \geqq \frac{1}{2})$ と定義すると，補題1.2の関数は $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Im}\, z| < \theta(|\mathrm{Re}\, z|)\}$ で正則。

定義1.4. $\alpha>0$ に対して曲面波展開の核関数 $K_\alpha(z, \xi; \varepsilon)$ を

次の様に定義する。

$$\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\cdot\frac{(1-i\alpha\langle z,\xi\rangle)^{n-2}\cdot\{1-i\alpha\langle z,\xi\rangle-\alpha^2(\sum_{j=1}^n z_j{}^2-\langle z,\xi\rangle^2)\}}{\{\langle z,\xi\rangle+i\alpha(\sum_{j=1}^n z_j{}^2-\langle z,\xi\rangle^2)+i\varepsilon\}^n},$$

又，$K_\alpha(z,\xi)\equiv K_\alpha(z,\xi;0)$ とする。

<u>命題1.5.</u> $\alpha>0$ とする。$\{|\xi|=1\}\times\{|\mathrm{Im}\,z|<\theta(|\mathrm{Re}\,z|)\}$ において $K_\alpha(z,\xi)$ は解析的であり，$|\mathrm{Im}\,z|<\theta(|\mathrm{Re}\,z|)$ の時，

$$\int_{|\xi|=1} K_\alpha(z,\xi)\,d\sigma(\xi)=0。$$

∵）系1.3 と定理1.1より明らか。

<u>定義1.6.</u> $B(0,R)=\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|\leqq R\}$ と定義する。V を $\mathbb{R}^n$ 内の連結開錐とし，$\beta, R>0$ に対して複素領域 $D_\beta=B(0,R)+i\{V\cap B(0,\beta)\}$ を考える。この時 $\alpha>0$，$y_0\in V\cap B(0,\beta)$，$f(z)\in\mathcal{O}(D_\beta)$ （$\mathcal{O}(D_\beta)$ は D_β で正則な関数全体の作る Fréchet 空間）に対し，$f(z)$ の曲面ラドン変換

$$\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)=\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'|\leqq R,\ \mathrm{Im}\,z'=y_0\}}K_\alpha(z-z',\xi)f(z')\,dz'$$

を定義する。ここで $K_\alpha(z-z',\xi)f(z')dz'=K_\alpha(z-z',\xi)f(z')\,dz'_1\wedge\cdots\wedge dz'_n$ は $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ 内の実 n 次微分形式とみなされている。従って補題1.2によりこの積分は (z,ξ) が

$$\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|<R,\ |\xi|=1,$$
$$\langle\mathrm{Im}\,z-y_0,\xi\rangle-\alpha(1+16\alpha^2R^2)(|\mathrm{Im}\,z-y_0|^2-\langle\mathrm{Im}\,z-y_0,\xi\rangle^2)>0\ \}$$

上にある時よく定義され，(z,ξ) の解析関数になる。さらに $K_\alpha(z-z',\xi)f(z')dz'_1\wedge\cdots\wedge dz'_n$ が $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ 内の実外微分作用素 $d_{(z',\bar{z}')}$ について閉じている事を使うと，積分チェインをホモトピックに変形する事ができる。その結果 $\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)$ は上の領域よりさらに広い領域に解析接続される。

補題1.7. 定義1.6 の記号下で $Y_0(r)$ を $[0,R]\longrightarrow V\cap B(0,\beta)$ なる区分的になめらかな写像で $Y_0(R)=y_0$ をみたすものとする。その時，等式

$$\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)=\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=Y_0(|\mathrm{Re}\,z'|)\}}K_\alpha(z-z',\xi)f(z')dz'$$

が両辺の共通定義領域で成立する。特に $\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)$ は

$$\bigcap_{0\leq r\leq R}\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\xi|=1,\ \langle\mathrm{Im}\,z-Y_0(r),\xi\rangle-\alpha(1+4\alpha^2(|\mathrm{Re}\,z|+r)^2)\times$$
$$\times(|\mathrm{Im}\,z-Y_0(r)|^2-\langle\mathrm{Im}\,z-Y_0(r),\xi\rangle^2)+\alpha(|\mathrm{Re}\,z|-r)^2>0\}\quad\cdots\cdots(6)$$

で一価解析的になる。

∵) 今 $\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=Y_0(|\mathrm{Re}\,z'|)\}\cup\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=y_0\}$ は D_β 内の実 $n+1$ 次元の区分的になめらかな部分多様体（厳密にはチェイン）$\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=Y_0(t|\mathrm{Re}\,z'|+(1-t)R),\ \mathrm{s.t.}\ 0\leq{}^\exists t\leq 1\}$ の境界であるから，$\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle>>0$ にとっておいて．$\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)$ の定義式中の積分チェインを変更すればよい。あとは解析接続の一意性により従う。接続の一価性は (6) の形の領域が ξ，$\mathrm{Re}\,z$ を固定したとき凸になる事から従う。

系1.8. 定義1.6の記号下で考える。R_1 を $0<R_1<R$ の様にとる。$y,\xi\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$g(y,\xi)=\langle y,\xi\rangle-\alpha(1+4\alpha^2(R+R_1)^2)(|y|^2-\langle y,\xi\rangle^2) \quad \cdots(7)$$

とおく。さらに，

$$S=\{\gamma(t);\ [0,1]\to V\cap B(0,\beta)\text{ なる区分的になめらかな写像で } \gamma(0)=y_0 \text{ をみたすもの}\}$$

とする。その時 $\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)$ は

$$\bigcup_{\gamma\in S}\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|\leq R_1,\ |\xi|=1,\ g(\mathrm{Im}\,z-\gamma(1),\xi)>0 \text{ かつ } g(\mathrm{Im}\,z-\gamma(t),\xi)+\alpha(R-R_1)^2>0 \text{ for } {}^{\forall}t\in[0,1]\} \quad \cdots(8)$$

で解析的。特に $0<\alpha<1/2(R+R_1)$，$|y_0|\leq\min\{\beta,\frac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2\}=\beta'$ であれば(8)は次の領域を含む。

$$\bigcup_{y\in V\cap B(0,\beta')}\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|\leq R_1,\ |\xi|=1,\ |\mathrm{Im}\,z|<\tfrac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2,\ g(\mathrm{Im}\,z-y,\xi)>0\}。 \quad \cdots(9)$$

これらの準備の下で次の曲面波分解の基本定理をえる。

定理1.9. R,α,R_1,β を $0<R_1<R$，$0<\alpha<1/2(R+R_1)$，$0<\beta\leq\frac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2$ をみたす正数とする。さらに V を $\mathbb{R}^n$ 内の連結開錐，y_0 を $V\cap B(0,\beta)$ 内の一点とする，その時 $B(0,R)+i(V\cap B(0,\beta))\subset\mathbb{C}^n$ で正則な任意の関数 $f(z)$ に対し $\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)$ は

$$\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\xi|=1,\ |\mathrm{Re}\,z|\leq R_1,\ \mathrm{Im}\,z\in V\cap B(0,\beta)\}$$

で解析的であり，しかも $B(0,R_1)+i(V\cap B(0,\beta))$ 上で

$$f(z)=\int_{|\xi|=1}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)\,d\sigma(\xi) \qquad ---(10)$$

が成立する。

左辺の被積分関数は系 1.8 により各 $\xi\in S^{n-1}$ に対してさらに

$$\bigcup_{y\in V\cap B(0,\beta)}\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|\leq R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|<\tfrac{1}{2}\alpha(R-R_1)^2,\ g(\mathrm{Im}\,z-y,\xi)>0\} \qquad ---(11)$$

迄解析接続できる。特に虚部が放物曲面の内部 $\{\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle-\alpha(1+4\alpha^2(R+R_1)^2)(|\mathrm{Im}\,z|^2-\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle^2)>0\}$ で与えられる管状領域で正則となるから (10) は $f(z)$ に対する一種の展開公式とみなす事ができる。

∵) $B(0,R_1)+i(V\cap B(0,\beta))$ 内の一点 $z=x+iy$ を固定する。系 1.8 などより直ちにわかる事は各 $\xi\in S^{n-1}$ に対し適当に積分チェインを変更する事により $\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\,\mathrm{Im}\,z'=y_0\}}K_\alpha(z-z',\xi;\varepsilon)f(z')\,dz'$ が $\forall\varepsilon\geq 0$ に対してよく定義され，しかも $\varepsilon\to+0$ の極限は $\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)$ に等しい。従って

$$\int_{|\xi|=1}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)\,d\sigma(\xi)=\int_{|\xi|=1}\Big\{\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\,\mathrm{Im}\,z'=y_0\}}K_\alpha(z-z',\xi;\varepsilon)f(z')\,dz'\Big\}\,d\sigma(\xi)$$

となる。各 ξ に対する積分チェイン $\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=y_0\}$ の変更は $\varepsilon\geq 0$ によらず，しかも ξ に関して局所的に一定である様にとれる。よって ε に関する収束は $\{\xi\in S^{n-1}\}$ 上一様となり，

$$\int_{|\xi|=1}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}f(z,\xi)\,d\sigma(\xi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|\xi|=1}d\sigma(\xi)\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\,\mathrm{Im}\,z'=y_0\}}K_\alpha(z-z',\xi;\varepsilon)f(z')\,dz'$$

が成立する。さて今 $V\cap B(0,\beta)$ は連結であったから，

$$\gamma(t):[0,1]\longrightarrow V\cap B(0,\beta),\quad \gamma(0)=y_0,\quad \gamma(1)=\mathrm{Im}\,z=y$$

をみたす C^∞-写像が存在する。その時補題1.7と同じ理由で積分チェインを $A\cup B=\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=y\}\cup\{|\mathrm{Re}\,z'|=R,\ \mathrm{Im}\,z'\in\gamma([0,1])\}$ に変更できる。従って

$$
\begin{aligned}
\int_{|\xi|=1} R_{\alpha,y_0}f(z,\xi)\,d\sigma(\xi) &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|\xi|=1} d\sigma(\xi)\int_{A\cup B} K_\alpha(z-z',\xi;\varepsilon)f(z')dz' \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|\xi|=1} d\sigma(\xi)\Big\{\int_{|x'|\leq R} K_\alpha(x-x',\xi;\varepsilon)f(x'+iy)dx' \\
&\qquad + \int_B K_\alpha(z-z',\xi;\varepsilon)f(z')dz'\Big\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x'|\leq R} I_\alpha^\varepsilon(x-x')f(x'+iy)dx' \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_B \Big\{\int_{|\xi|=1} K_\alpha(z-z',\xi;\varepsilon)\Big\} f(z')dz'.
\end{aligned}
$$

第1項は定理1.1により $f(x+iy)$ に収束する。又、第2項は命題1.5により 0 に収束する。従って証明終わり。

以下定理1.9の重要な応用例としてまずBochnerの定理（Bochner [3], Bochner-Martin [4], Stein [41], 小松 [25]）の局所形を紹介する。

<u>定理1.10.</u>（cf. S-K-K [37] p. 285）. V を $\mathbb{R}^n$ 内の連結開錐, $R,\beta>0$ とする。その時 $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|<R,\ |\mathrm{Im}\,z|<\beta,\ \mathrm{Im}\,z\in V\}$ で正則な関数 $f(z)$ は"無限小くさび" $\{|\mathrm{Re}\,z|<R,\ \mathrm{Im}\,z\in\gamma(V)\cdot 0\}$ に解析接続される。但し $\gamma(V)$ は V の凸包であり, $g(z)$ が無限小くさび $\{|\mathrm{Re}\,z|<R,\ \mathrm{Im}\,z\in\gamma(V)\cdot 0\}$ で正則とは、$\gamma(V)$ に錐として相対コンパクトに含まれる $\mathbb{R}^n$ 内の任意の開錐 U と任意の R' s.t. $0<R'<R$

に対してある小さな正数δが存在して$\{|\mathrm{Re}\, z|<R', |\mathrm{Im}\, z|<\delta, \mathrm{Im}\, z \in U\}$に正則に接続できる事。特に$\gamma(V)=\mathbb{R}^n$ならば$f(z)$は$\{|\mathrm{Re}\, z|<R, \mathrm{Im}\, z=0\}$の近傍で正則になる。

∵ Rを少し縮めて議論すればよいから$f(z)$は$\{|\mathrm{Re}\, z|\leq R, |\mathrm{Im}\, z|<\beta, \mathrm{Im}\, z\in V\}$の近傍で正則としてよい。$0<R_1<R$を任意にとり定理1.9を適用する。すなわち$\alpha=1/4R$とし$y_0\in V$を十分小さくとれば

$$f(z)=\int_{|\xi|=1} R_{\alpha, y_0} f(z, \xi)\, d\sigma(\xi)$$

が$B(0, R_1)+i(V\cap \mathrm{int}(B(0,\beta)))$上で成立する。一方$R_{\alpha, y_0} f(z, \xi)$は(11)で解析的であるから結局$f(z)$は

$$\Omega=\bigcap_{|\xi|=1}\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\, z|<R_1,\ |\mathrm{Im}\, z|<(R-R_1)^2/8R,$$
$$\langle \mathrm{Im}\, z-y, \xi\rangle-\frac{1}{2R}(|\mathrm{Im}\, z-y|^2-\langle \mathrm{Im}\, z-y, \xi\rangle^2)>0 \quad \text{for some } y\in V\cap \mathrm{int}\, B(0,\beta)\}$$

で正則となる。(∵ $1/2R>\alpha(1+4\alpha^2(R+R_1)^2)$)。この領域の虚部が無限小の意味で$V$の凸包になっている事を示す。容易にわかるように

$$D=\bigcap_{|\xi|=1}\{y\in\mathbb{R}^n;\ \langle y-y', \xi\rangle-C(|y-y'|^2-\langle y-y', \xi\rangle^2)>0 \text{ for some } y'\in V\cap \mathring{B}(0,\beta)\}$$

は開集合であり，また$y\in D$ならば$0<{}^{\forall}t\leq 1$に対して$ty\in D$となる。従って${}^{\forall}y_0\in\gamma(V)$に対して十分小さな正数$\delta$があって$\delta y_0\in D$なる事を云えば$D$の今述べた性質とコンパクト性の議論から，$D$が$\gamma(V)$方向の無限小錐である事がわかる。今

$$D'=\bigcap_{|\xi|=1}\{y\in\mathbb{R}^n;\ \langle y-y', \xi\rangle>0 \text{ for some } y'\in V\cap \mathrm{int}(B(0,\beta))\}$$

とおくとD'は$V\cap \mathrm{int}\,B(0,\beta)$を含み，かつ凸であるから十分小さい正数$\delta'$に対して$\delta'\cdot y_0\in D'$がわかる。よって$\forall\xi\in S^{n-1}$に対して$\exists y'_\xi\in V\cap \mathrm{int}(B(0,\beta))$ s.t. $\langle\delta'\cdot y_0-y'_\xi,\xi\rangle>0$。故に十分小さい正数$t_\xi$をとれば

$$\langle t_\xi\delta'\cdot y_0-t_\xi\cdot y'_\xi,\xi\rangle-\frac{1}{2R}\left(|t_\xi\cdot\delta'\cdot y_0-t_\xi y'_\xi|^2-\langle t_\xi\cdot\delta'\cdot y_0-t_\xi y'_\xi,\xi\rangle^2\right)>0$$

とできる．しかもこの様な$t_\xi>0$，$y'_\xi\in V\cap \mathrm{int}(B(0.\beta))$は$\xi$について局所一定にもとれるから，$\inf\{t_\xi;|\xi|=1\}=t>0$としてよい。従って$t\cdot\delta'\cdot y_0\in D$となる。証明終わり。

正則関数の対の境界値に対する“くさびの刃定理”は場の理論を研究する物理学者によって発見され（[5]，[42]），さらにA. Martineauによって多数個の正則関数の組の境界値に対する定理として一般化された（[27]，[28]，[29]，[30]，[31]，[32]，[20]）。この定理は解析的特異性の方向分解の理論にとってもっとも基本的であるにもかかわらず，通常の証明は正則関数に対するコホモロジー群の使用など複雑な方法を用いている。ここで紹介する方法は多少結果は粗くなるが定理1.9のみを用いて簡単に証明できる点で有効である。

<u>定理1.11.</u>　R，βを正数，$V_1,\dots,V_N$を$\mathbb{R}^n$内の閉凸錐とする。正則関数$F_1(z),\dots,F_N(z)$について次のi)，ii)が成立するとする。

i) $\forall j$ に対して錐の意味で $U_j \supset\supset V_j$ となる開凸錐 U_j が存在して $F_j(z)$ は $\{|\mathrm{Re}\, z| \leqq R, |\mathrm{Im}\, z| \leqq \beta, \mathrm{Im}\, z \in U_j\}$ で正則。

ii) 次のイ) 又は ロ) が成立する。

イ) $V_1 \cap \cdots \cap V_N \neq \phi$ であって $\sum_{j=1}^N F_j(z)|_{\mathrm{Im} z \in V_1 \cap \cdots \cap V_N} = 0$.

ロ) $F_j(x+i0V_j) = \lim_{\{|y| \to 0,\, y \in V_j\}} F_j(x+iy)$ が $\mathcal{D}'(\{|x| \leqq R\})$ で存在して、$\sum_{j=1}^N F_j(x+i0V_j) = 0$ が $\{|x| \leqq R\}$ で成立。

その時 $0 < {}^\forall R_1 < R$, $\forall j, k = 1, \dots, N$ に対して $\exists \delta > 0$ と $\{|\mathrm{Re}\, z| \leqq R_1, |\mathrm{Im}\, z| \leqq \delta, \mathrm{Im}\, z \in \mathcal{H}(V_j \cup V_k)\}$ で正則な関数 $G_{jk}(z)$ が存在して、$G_{jk} + G_{kj} = 0$, $\forall j, k = 1, \dots, N$, $F_j(z) = \sum_{k=1}^N G_{jk}(z)|_{\mathrm{Im} z \in V_j}$ $\forall j = 1, \dots, N$ が成立する。さらに ロ) の場合には $G_{jk}(x + i0\mathcal{H}(V_j \cup V_k))$ が $\mathcal{D}'(\{|x| \leqq R_1\})$ の意味で存在する。

∵) N に関する数学的帰納法による。$R_1 \in (0, R)$ を固定する。まず イ) の場合を考える。条件 i) により $\alpha = 1/4R$, $y_0 \in V_1 \cap \cdots \cap V_N$ を $|y_0| \ll 1$ にとれば $\{F_j(z)\}_j$ に定理1.9が適用できる。すなわち

$$F_j(z) = \int_{|\xi|=1} \mathcal{R}_{\alpha, y_0} F_j(z, \xi)\, d\sigma(\xi), \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

一方、条件 イ) により $y_0 \in V_1 \cap \cdots \cap V_N$ だから

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{R}_{\alpha, y_0} F_j(z, \xi) = 0.$$

が成立する。よって $\mathcal{R}_{\alpha, y_0} F_N(z, \xi) = -\sum_{j=1}^{N-1} \mathcal{R}_{\alpha, y_0} F_j(z, \xi)$。今錐 V の双対錐 V° を $\{\xi \in \mathbb{R}^n ; \langle \xi, y \rangle \geqq 0, \forall y \in V\}$ と定義する。各 j に対し開凸錐 W_j を $U_j \supset\supset W_j \supset\supset V_j$ のようにとると系1.8の(9)によって、十分小さな $\delta > 0$ に対し $\mathcal{R}_{\alpha, y_0} F_j(z, \xi)$ は

$\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\xi|=1,\ \xi\notin W_j^\circ,\ |\mathrm{Re}\,z|\leqq R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq\delta\}$

で解析的となる。今 $\mathrm{Im}\,z\in V_1\cap\cdots\cap V_N$，$|\mathrm{Im}\,z|\ll 1$ の時

$$
\begin{aligned}
F_N(z) &= \int_{|\xi|=1}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F_N(z,\xi)\,d\sigma(\xi) = \int_{S^{n-1}\setminus W_N^\circ}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F_N(z,\xi)\,d\sigma(\xi)\\
&\quad-\sum_{j=1}^{N-1}\left\{\int_{S^{n-1}\cap(W_N^\circ\setminus W_j^\circ)}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F_j(z,\xi)\,d\sigma(\xi)+\int_{S^{n-1}\cap W_N^\circ\cap W_j^\circ}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F_j(z,\xi)\,d\sigma(\xi)\right\}\\
&=\left[\int_{S^{n-1}\setminus W_N^\circ}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F_N(z,\xi)\,d\sigma(\xi)+\sum_{j=1}^{N-1}\int_{S^{n-1}\cap(W_N^\circ\setminus W_j^\circ)}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F_j(z,\xi)\,d\sigma(\xi)\right]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{N-1}\int_{S^{n-1}\cap W_N^\circ\cap W_j^\circ}\mathcal{R}_{\alpha,y_0}F_j(z,\xi)\,d\sigma(\xi)
\end{aligned}
$$

が成立する。第一項は上の議論により $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|\leqq R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq\delta\}$ で正則，又，第二項はやはり(9)により十分小さい $\delta>0$ に対して，第3項が

$\Omega_j=\bigcap_{\xi\in S^{n-1}\cap W_j^\circ\cap W_N^\circ}\{|\mathrm{Re}\,z|\leqq R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq\delta,\ \langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle-\frac{1}{2R}(|\mathrm{Im}\,z|^2-\langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle^2)>0\}$

で正則になる。$(W_j^\circ\cap W_N^\circ)^\circ=\widetilde{\mathrm{ch}(W_j\cup W_N)}\supset\supset\mathrm{ch}(V_j\cup V_N)$ に注意すると $\exists\,\delta''>0$ s.t. $\Omega_j\supset\Omega'_j=\{|\mathrm{Re}\,z|\leqq R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq\delta',\ \mathrm{Im}\,z\in\mathrm{ch}(V_j\cup V_N)\}$。

第一項は第二項のいずれかの項に含めて考える事ができるから結局各 $j=1,\dots,N-1$ に対し Ω'_j で正則な関数 $G_{N,j}(z)$ が存在して，$F_N(z)=\sum_{j=1}^{N-1}G_{N,j}(z)$ とかけた事になる。一般の (j,k) に対し，$G_{jk}=0$ $j,k=1,\dots,N-1$，$G_{j,N}=-G_{N,j}$ $j=1,\dots,N-1$，$G_{NN}=0$ と定義する事により，$\Omega'_{jk}=\{|\mathrm{Re}\,z|\leqq R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq\delta',\ \mathrm{Im}\,z\in\mathrm{ch}(V_j\cup V_k)\}$ で正則，かつ添字について反対称な正則関数の組 $\{G_{jk}(z)\}_{jk}$ が得られる。今，$F'_j(z)=F_j(z)-\sum_{k=1}^{N}G_{jN}(z)$ とおくと $F'_N=0$，かつ $\sum_{j=1}^{N-1}F'_j=0$ となり，しかも証明をよくみればわかるように F'_j は V_j を相対コンパクトに含むある凸開錐 U_j とある小正数 $\delta'>0$ をとれ

は $\{|\mathrm{Re}\, z|\leq R_1, |\mathrm{Im}\, z|\leq \delta', \mathrm{Im}\, z\in U'_j\}$ で正則となる。従って R を R_1 と置き換えた時の条件 i) ii) をみたす。$R_1\in(0,R)$ は任意だったから定理は $N-1$ 個の場合に帰着する。

ロ) の場合。$\alpha=1/4R$ とおき $y_0^j\in V_j$ を十分小さくとって定理1.9 の条件が $F_j(z)$ 達に対して成立する様にする。従って

$$F_j(z)=\int_{|\xi|=1}\mathcal{R}_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi)\,d\sigma(\xi).$$

今，$\varphi(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 関数で $|x|>\frac{R+R_1}{2}$ のとき $0\leq\varphi(x)<1$，$|x|\leq\frac{R+R_1}{2}$ の時 $\varphi(x)\equiv 1$，$|x|\geq R$ の時 $\varphi(x)\equiv 0$ をみたすものとする。$1\geq\forall\delta\geq 0$，$\forall j=1,\dots,N$ に対して $z_\delta^j(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^n$ なる C^∞ 写像を

$$z_\delta^j(x)=x+i\{1-(1-\delta)\varphi(|x|)\}y_0^j$$

で定義する。その時 $\forall\delta\in(0,1]$ に対して積分チェインを変更する事により，

$$\mathcal{R}_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi)=\int_{|x'|\leq R}K_\alpha(z-z_\delta^j(x'),\xi)F_j(z_\delta^j(x'))\cdot\left|\frac{\partial z_\delta^j(x')}{\partial x'}\right|dx'$$

となる。ここで $\delta\to+0$ とすると F_j に対する仮定ロ) より容易にわかるように $\lim_{\delta\to+0}F_j(z_\delta^j(x'))$ は $\{|x'|\leq R\}$ の近傍で distribution として収束し，特に $\{|x'|<\frac{R+R_1}{2}\}$ では $F_j(x'+i0V_j)$ に一致する。それ故

$$\sum_{j=1}^N\mathcal{R}_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi)=\int_{|x'|\leq R}\sum_{j=1}^N\Big[K_\alpha(z-z_0^j(x'),\xi)\left|\frac{\partial z_0^j(x')}{\partial x'}\right|\times$$
$$\times\{\lim_{\delta\to+0}F_j(z_\delta^j(x'))\}\Big]dx'$$

となる。さらに $|x'|<\frac{R+R_1}{2}$ では $z_0^j(x')=x'$，かつ $\sum_{j=1}^N\lim_{\delta\to+0}F_j(z_\delta^j(x'))=\sum_{j=1}^N F_j(x'+i0V_j)=0$ だから右辺の被積分関数の台は $\{|x'|\geq$

$\frac{1}{2}(R+R_1)\}$に含まれる。従って$K_\alpha(z,\xi)$の解析性に関する系1.3によって$\sum_{j=1}^N R_{\alpha,y_0^\circ} F_j(z,\xi)$は$\{|\xi|=1,\ |\mathrm{Re}\,z|\leqq R_1,\ \mathrm{Im}\,z=0\}$の近傍で解析的となる。後の議論は i)と同様である。また，得られた$G_{jk}(z)$などが$|x|\leqq R_1$において$\mathrm{Im}\,z\in\mathcal{H}(V_j\cap V_k)$方向から distribution 境界値をもつ事も構成の仕方からわかる。

§2．解析的特異性の余接分解と Sjöstrand の方法。

$f(x)$を$\mathbb{R}^n$上のコンパクト台を持つ連続関数（超関数でもよいが）とすると，

$$F(z,\xi)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x')\,dx'}{(\langle z,\xi\rangle-\langle x',\xi\rangle)^n} \tag{12}$$

が$\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\xi|=1,\ \langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle>0\}$の近傍で解析関数として定義できる。さらに$f(x)$が$(n+2)$階連続微分可能とすると$F(z,\xi)$は$\{|\xi|=1,\ \langle\mathrm{Im}\,z,\xi\rangle\geqq0\}$で連続となる（これは部分積分により容易にわかる）。 従って例えば$S^{n-1}=\{|\xi|=1\}$を互いに素でかつ直径の十分小さい可測集合の有限和$E_1\cup\cdots\cup E_N$に分解したとすると，

$$F_j(z)=\int_{E_j}F(z,\xi)\,d\sigma(\xi) \tag{13}$$

は$\Omega_j=\{z\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Im}\,z\in V_j\}$で正則，$\overline{\Omega_j}$で連続となる。但し$V_j$は$E_j$の双対錐$E_j^\circ$の内部からなる$\mathbb{R}^n$の開凸錐である。特に$\mathbb{R}^n\subset\overline{\Omega_j}$での値を$F_j(x+i0V_j)$と書く事にすると定理1.1から容易にわかるように，

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i0V_j)$$

が$\mathbb{R}^n$上で成立する。$f(x)$が一般にコンパクト台のdistributionの時も$\lim_{|y|\to 0, y\in V_j} F_j(x+iy)$が$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$の中で収束し，その和が$f(x)$に一致する事もよく知られている。台がコンパクトでない場合も適当に台をカットして考えれば少なくとも局所的にはくさび型の領域で正則な関数の境界値達の和で書ける事がわかる。distribution境界値については次の事実がよく知られている。(cf. [26])。

定理2.1. Vを$\mathbb{R}^n$のある半開空間$\{y\in\mathbb{R}^n; \langle y,\xi_0\rangle>0\}$ $(|\xi_0|=1)$に真に含まれる開凸集合とする（すなわち$\overline{V}\cap\{|\xi|=1\}\subset\{\langle y,\xi_0\rangle>0\}$）。$\exists C, \exists\mu>0$に対し$D=\{z\in\mathbb{C}^n; |\mathrm{Re}\, z|<R, |\mathrm{Im}\, z|<\delta, \mathrm{Im}\, z\in V\}$で正則な関数$F(z)$が評価

$$\sup_{|x|<R} |F(x+iy)|\le C|y|^{-\mu} \tag{14}$$

をみたすならば$\lim_{|y|\to 0, y\in V} F(x+iy)$が$\mathcal{D}'(\{|x|<R\})$で存在する。

（注）逆に$f(x)$がコンパクト台のdistributionの時，構造定理を使う事により(13)で定義された正則関数が(14)のような評価を持つことが導ける。

$\because)$ $\xi_0=(1,0,\dots,0)$として一般性を失なわない。$z=(z_1,\overset{n-1}{\tilde{z}})$とかく。$V$に対する仮定により$\exists C'>0$, s.t.

$$\sup_{|x|<R} |F(x+iy)| \leq C'|y_1|^{-\mu} \tag{15}$$

となる。Vは閉錐だから$\delta'>0$を十分小さくとれば

$$D \supset \{z_1=\tfrac{1}{2}i\delta,\ |\mathrm{Re}\,z'|<R,\ |\mathrm{Im}\,z'|<\delta'\}$$

とできる。従って$\forall l=1,2,\ldots$に対し$F(z)$のz_1によるl階不定積分.

$$G_l(z)=\int_{\frac{1}{2}i\delta}^{z_1}\frac{(z_1-s)^{l-1}}{(l-1)!}F(s,z')ds$$

$$=\int_0^{\mathrm{Re}\,z_1}\frac{(z_1-s-\frac{1}{2}i\delta)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot F(s+\tfrac{1}{2}i\delta,z')ds+\int_{\frac{1}{2}\delta}^{\mathrm{Im}\,z_1}\frac{\{i(\mathrm{Im}\,z_1-s)\}^{l-1}}{(l-1)!}\cdot F(\mathrm{Re}\,z_1+is,z')i\,ds$$

を考える。実際Dの凸性からG_lは$D\cap\{|\mathrm{Im}\,z'|<\delta'\}$で正則になる。$\partial^l G_l(z)/\partial z_1{}^l=F(z)$は明らかであり，又(15)を使うと$l>\mu+2$ならば$\lim_{|y|\to 0,\,y\in V} G_l(x+iy)$は$\{|x|<R\}$で一様収束する事がわかる。これより明らか。

このように普通の意味での関数は適当な正則関数の何らかの意味での境界値の和として表現できる事がわかる。しかし一般にはそれらの正則関数には(14)のような増大度条件を課さなければならない。この条件を不自然であるとして取り払ってしまうのが佐藤の着想である。

定義2.2. $f(x)$が$x_0\in\mathbb{R}^n$の近傍で定義された佐藤の超関数であるとは.（以下単に超関数，或いはhyperfunctionと呼ぶ）

$\exists R>0$，$\mathbb{R}^n$ の開凸錐 $\exists V_1, \ldots, \exists V_N$ に対して $\{z \in \mathbb{C}^n ; |z-x_0|<R,$ $\mathrm{Im}\, z \in V_j\}$ で正則な関数 $F_j(z)$ $j=1,\cdots,N$ が存在して

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i0V_j) \tag{16}$$

と x_0 の付近でかけること。ここで境界値 $F_j(x+i0V_j)$ は単なる記号と理解しておく（つまり $F_j(z)$ が虚部が V_j で与えられる様なくさび状領域で正則になっていることを保証しているにすぎない)。但し (16) のような表示に対し $f(x)$ が x_0 の付近で 0 である事を次の様に定義する。(distribution に対するくさびの刃定理（定理1.11 (ロ)）を思い出して頂きたい)。：十分小さな $R'>0$ と V_j に含まれる空でない適当な開凸錐 V_j' に対して $\{z \in \mathbb{C}^n ;$ $|z-x_0|<R'$, $\mathrm{Im}\, z \in \gamma(V_j' \cup V_k')\}$ で正則な関数 $G_{jk}(z)$ $j,k=1,\ldots,N$ が存在して，

$$G_{jk}(z) = -G_{kj}(z),\ \forall j,k=1,\ldots N,\ F_j(z) = \sum_{k=1}^{N} G_{jk}(z)\Big|_{\mathrm{Im}\, z \in V_j'} \tag{17}$$

が成立すること。

これによって (16) の中の $\{F_j\}_j$ 達の間につながりが生まれるわけである。例えば (16) において $V_1 \cap \cdots \cap V_N \neq \phi$ であれば $F(z) = \sum_{j=1}^{N} F_j(z)$ という虚部が $V_1 \cap \cdots \cap V_N$ で与えられるくさび状領域で正則な関数を考えると，$f(x) = F(x+i0(V_1 \cap \cdots \cap V_N))$ ともかけることがわかる。またさらに $N=1$ の時 $F(x+i0V)=0$ は $F(z)=0$ と同値になる。

上の定義では(16)の表現が0であるかどうかを確かめるのに消極的な判定条件(17)を使用している点で不満足な所がある。しかし§1で定義した曲面波展開の理論を使う事により次のような形で0の判定条件をみやすくすることができる。

<u>定理2.3.</u> $R>0$, $\delta>0$, $V_1,\dots,V_N$ を $\mathbb{R}^n$ 内の開凸錐とし，$F_j(z)$ $(j=1,\dots,N)$ を $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Re}\,z|\leqq R,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq\delta,\ \mathrm{Im}\,z\in V_j\}$ で定義された正則関数とする．$R_1\in(0,R)$ を固定し $\alpha=1/4R$ とおく。その時 $y_0^j\in V_j$ を十分小さくとって $\mathcal{R}_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi)$ に対して定理1.9 (10) が成立するようにする。ここで

$$H(z,\xi)=\sum_{j=1}^N \mathcal{R}_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi) \qquad (18)$$

と定義する。実際定理1.9により $\exists\delta'>0$ に対して $H(z,\xi)$ は

$$\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\xi|=1,\ |\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ |\mathrm{Im}\,z|<\delta',\ \langle \mathrm{Im}\,z,\xi\rangle-\frac{1}{2R}(|\mathrm{Im}\,z|^2-\langle \mathrm{Im}\,z,\xi\rangle^2)>0\}$$

で解析的になる。この時 $\{|x|<R\}$ 上の超関数

$$f(x)=\sum_{j=1}^N F_j(x+i0V_j)$$

に対し次の i), ii) が成立する。

i) $f(x)$ が $x_0\in\{|x|<R_1\}$ の付近で0である事と #) は同値.

#) $H(z,\xi)$ は $\{z=x_0,\ |\xi|=1\}$ の近傍へ解析接続できて，さらに

$$\int_{|\xi|=1} H(x,\xi)\,d\sigma(\xi)=0$$

が $x\sim x_0$ の付近で成立する。

ii) $E_1\sqcup\cdots\sqcup E_L=S^{n-1}=\{\xi\in\mathbb{R}^n;|\xi|=1\}$ を S^{n-1} 内の互いに素な可測集合

による分解とし，しかもE_ℓの直径は十分小さいとする$(\ell=1,\dots,L)$。

$$H_\ell(z)=\int_{E_\ell} H(z,\xi)d\sigma(\xi) \qquad \ell=1,\dots,L$$

とおくと無限小くさび$\{|\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ \mathrm{Im}\,z\in 0\cdot U_\ell\}$ $(U_\ell=\mathrm{int}(E_\ell^\circ))$で正則となり，

$$f(x)=\sum_{\ell=1}^{L} H_\ell(x+i0\cdot U_\ell)$$

が$\{|x|<R_1\}$上で成立する。

ii) i) ⇒：$f(x)=0$の定義により$\exists r>0$，$\exists V_j'$（V_jに含まれる開凸錐）$j=1,\dots,N$ に対して$\{|z-x_0|\leq r,\ \mathrm{Im}\,z\in\gamma(V_j'\cup V_k')\}$で正則な関数$G_{jk}(z)$ $j,k=1,\dots,N$で(17)をみたすものが存在する。$|x_0|+r<R_1$としてよい。$v_0^j\in V_j'$を十分小さくとって

$$\mathcal{R}'_{\alpha,v_0^j}G_{jk}(z,\xi)=\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'-x_0|\leq r,\ \mathrm{Im}\,z'=v_0^j\}} K_\alpha(z-z',\xi)G_{jk}(z')dz'$$

$j,k=1,\dots,N$について$\{|\mathrm{Re}\,z-x_0|\leq\frac{1}{2}r\}$において定理1.9が成立するようにする。$j=1,\dots,N$に対し$\Phi^j(x):\{|x|\leq R\}\longrightarrow V_j\cap\{|y|\leq\delta\}$なる$C^\infty$写像を$\Phi^j(x)|_{\{|x|=R\}}\equiv y_0^j$，$\Phi^j(x)|_{\{|x-x_0|\leq r\}}\equiv v_0^j$であるように選ぶ。従って

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi)&=\int_{\{z'=x'+i\Phi^j(x'),\ |x'|\leq R\}} K_\alpha(z-z',\xi)F_j(z')dz'\\&=\int_{\{z'=x'+i\Phi^j(x'),\ |x'|\leq R,\ |x'-x_0|\geq r\}} K_\alpha(z-z',\xi)F_j(z')dz'\\&\quad+\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'-x_0|\leq r,\ \mathrm{Im}\,z'=v_0^j\}} K_\alpha(z-z',\xi)\Big(\sum_{k=1}^{N}G_{jk}(z')\Big)dz'\end{aligned}$$

が成立する。ここで関係$G_{jk}+G_{kj}=0$を使ってjに関する和をとると第2項の内部での積分が相殺し，結局

$$\sum_{j=1}^{N}\mathcal{R}_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi)=$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\{z'=x'+i\Phi^j(x'),\ |x'|\leq R,\ |x'-x_0|\geq r\}} K_\alpha(z-z',\xi)F_j(z')dz'$$

$$+\ \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} \int_{\{|\mathrm{Re}\, z'-x_0|=r,\ \mathrm{Im}\, z'\in[v_0^j,v_0^k]\}} K_\alpha(z-z',\xi)G_{jk}(z')dz'$$

となる。但し $[v_0^j, v_0^k]$ とは v_0^j と v_0^k を R^n 内で結ぶ線分。$|v_0^j|$ 達を十分小さくとった事により系1.3によって上の各項は $\{z=x_0, |\xi|=1\}$ の近傍で解析的となり、さらに命題1.5によって各項の $\{|\xi|=1\}$ 上での積分は 0 となる。従って #) が成立する。

⇐). #) から G_{jk} を構成する手続きは定理1.11と同様にすればよい。

ii) $H_{jl}(z)=\int_{E_l} \mathcal{R}_{\alpha,y_0^j} F_j(z,\xi)d\sigma(\xi)$ とおく $(j=1,\dots,N,\ l=1,\dots,L)$。すると明らかに H_{jl} は無限小くさび $\{|\mathrm{Re}\, z|<R_1, \mathrm{Im}\, z\in 0\cdot\Gamma_{jl}\}$ (但し $\Gamma_{jl}=\mathcal{X}(V_j\cup \mathrm{int}(E_l^\circ))$) で正則となりしかも $\{|\mathrm{Re}\, z|<R_1\}$ で

$$F_j(z)=\int_{|\xi|=1} \mathcal{R}_{\alpha,y_0^j} F_j(z,\xi)d\sigma(\xi)=\sum_{l=1}^{L} H_{jl}(z)\big|_{\mathrm{Im}\, z\in V_j},$$

$$H_l(z) = \sum_{j=1}^{N} H_{jl}(z)\big|_{\mathrm{Im}\, z\in \mathrm{int}(E_l^\circ)}$$

が成立する。これより明らか。

この定理、或いはその証明の過程から Martineau のくさびの刃定理の超関数版が得られる。

<u>定理2.4.</u> 定理1.11の口)の条件を"$\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i0V_j)=0$ が $\{|x|\leq R\}$ 上で佐藤の超関数として成り立つ"で置き換えたものに対し同定理の結論が成立する。

（注） 定義2.2の(17)との違いはうまい$G_{jk}(z)$をとればその定義域の虚部である錐が$\gamma(V_j\cup V_k)$に内側からいくらでも近くとれる事。

distributionについてはこの節の始めに述べた事と定理2.1によって（少なくとも局所的には）

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}\lim_{|y|\to 0,\, y\in V_j} F_j(x+iy)$$

とかけるような正則関数$\{F_j(z)\}_j$が存在することがわかる。従ってこれらの正則関数を用いて佐藤の超関数

$$\hat{f}(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i0V_j)$$

が定義できる。この対応がよく定義されていることはくさびの刃定理1.11のロ)の場合によって保証される。また$f\to\hat{f}$が1:1対応であることも定理2.3のi)の条件#)から容易に得られる。実際F_jがdistribution境界値をもつことから(18)で定義される$H(z,\zeta)$も定理2.1を経由することにより$\langle \mathrm{Im}\, z,\zeta\rangle>0$方向からのdistribution境界値をもつ。従って，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\lim_{\{|y|\to 0,\, y\in V_j\}} F_j(x+iy) &= \sum_{j=1}^{N}\int\Big\{\lim_{\{|y|\to 0,\, y\in V_j\}} \mathcal{R}_{\alpha,y_0^j} F_j(x+iy,\zeta)\Big\}d\sigma(\zeta)\\ &= \sum_{j=1}^{N}\int_{|\zeta|=1}\Big\{\lim_{\{|y|\to 0,\, \langle y,\zeta\rangle>0\}} \mathcal{R}_{\alpha,y_0^j} F_j(x+iy,\zeta)\Big\}d\sigma(\zeta)\\ &= \int_{|\zeta|=1}\Big\{\lim_{\{|y|\to 0,\, \langle y,\zeta\rangle>0\}} H(x+iy,\zeta)\Big\}d\sigma(\zeta)=0\end{aligned}$$

となり$f(x)=0$がわかる。すなわち，

定理2.5. distribution は上の意味で自然に佐藤の超関数の中に埋め込まれる。

さていよいよ標題の超関数の解析的特異性の方向分解を定義する。

定義2.6. $x=x_0\in\mathbb{R}^n$ の近傍で定義された超関数 $f(x)$ が $(x_0; i\xi_0 dx)\in iS^*\mathbb{R}^n=i(T^*\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n\times\{0\}/\mathbb{R}^+)$ ($\mathbb{R}^n$ の純虚余接球束と呼ぶ。$i=\sqrt{-1}$ はここでは飾りと思ってもよい) においてミクロ解析的であるとは (或いは x_0 において $i\xi_0 dx$ 方向にミクロ解析的), $x=x_0$ の付近で

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i0V_j)$$

とかけること。但し $F_j(z)$ は $\{|z-x_0|<\delta,\ \mathrm{Im}\,z\in V_j\}$ の形の領域で定義された正則関数で $\forall j$ に対し $V_j\cap\{y\in\mathbb{R}^n;\ \langle y,\xi_0\rangle<0\}\neq\phi$. つまり $\langle \mathrm{Im}\,z,\xi_0\rangle<0$ なる方向からの境界値の和でかけている事である。

開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ で定義された超関数 $f(x)$ (定義2.2では局所的にしか扱わなかったが大域的な事についてはとりあえずそれらがつながったものであると了解して頂きたい) に対しその台 (support) を

$$\mathrm{supp}.f(x)=\{x\in U;\ x\text{ において } f(x)\neq 0\},$$

又，特異台（厳密には特異スペクトルの台）を

$$S.S.f(x)=\{(x;i\xi dx)\in iS^*U;\ (x;i\xi dx) において f(x) は ミクロ解析的ではない。\}$$

と定義する。直ちにわかることは supp. $f(x)$ も S.S. $f(x)$ もそれぞれ U, iS^*U の閉部分集合になっていることである。

(注) $f(x)$ が distribution ならば supp. $f(x)$ が distribution としての台と一致する事は定理 2.5 より従う。

定義 2.6 は素朴なものであるが $f(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i0V_j)$ と多数の和で表示されている時ミクロ解析性を知ることは定義 2.2 の所で述べたのと同じ理由で積極的判定法ではない。それに対しやはり曲面波展開を用いた次の判定法がある。

<u>定理 2.7.</u> (cf. 定理 2.3). 定理 2.3 と同じ状況で，$f(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i0V_j)$ が $(x_0;i\xi_0 dx)\in iS^*\mathbb{R}^n$ $(|x_0|<R_1)$ でミクロ解析的であることと $H(z,\xi)=\sum_{j=1}^{N} \mathcal{R}_{\alpha,y;\xi}F_j(z,\xi)$ が $\{z=x_0,\xi=\xi_0\}\subset \mathbb{C}^n\times S^{n-1}$ の近傍まで解析的になることとは同値。

∵) $\Leftarrow$ は定理 2.3 の ii) を使えば容易。$\Rightarrow$ を証明する。ミクロ解析性の定義により $\exists r>0$, $\exists U_1,\dots,\exists U_L$ ($\mathbb{R}^n$ 内の開凸錐) s.t. $U_l\cap\{\langle y,\xi_0\rangle<0\}\neq\phi$ $\forall l=1,\dots,L$, に対して $\{|z-x_0|\leq r,\ \mathrm{Im}\,z\in U_l\}$ で正則な関数 F'_l $l=1,\dots,L$ が存在して $\{|x-x_0|\leq r\}$ 上で

$$f(x)=\sum_{l=1}^{L} F'_l(x+i0U_l)$$

とかける。特に $\{|x-x_0|\leq r\}$ 上で

$$\sum_{l=1}^{L} F'_l(x+i0U_l)-\sum_{j=1}^{N} F_j(x+i0V_j)=0.$$

各 $l=1,\dots,L$ に対し単位ベクトル $u_0^l\in U_l$ を $\langle u_0^l,\xi_0\rangle<0$ であるように選んでおく。ここで $\{F'_l,F_j\}_{l,j}$ に対し定理2.4（Martineauのくさびの刃定理）を使うと次がいえる：$\exists r'>0$ に対して $\{|z-x_0|\leq r',\ \mathrm{Im}\,z\in U_{l,j}\}$, $\{|z-x_0|\leq r',\ \mathrm{Im}\,z\in V_{jk}\}$ でそれぞれ正則な関数 $F_{lj}(z)$, $G_{jk}(z)$ $(l=1,\dots,L,\ j,k=1,\dots,N)$ が存在して,

$$F_j(z)=\sum_{l=1}^{L} F_{lj}(z)\big|_{\mathrm{Im}\,z\in\mathbb{R}^+ y_0^j}+\sum_{k=1}^{N} G_{jk}(z)\big|_{\mathrm{Im}\,z\in\mathbb{R}^+ y_0^j} \qquad (19)$$

$$G_{jk}+G_{kj}=0 \qquad \forall j,k=1,\dots,N,$$

をみたす。但し $U_{l,j}$ は $\{u_0^l\}\cup\{y_0^j\}$ を含む $\mathbb{R}^n$ のある開凸錐，又 $V_{j,k}$ は $\{y_0^j\}\cup\{y_0^k\}$ を含む同じく $\mathbb{R}^n$ 内のある開凸錐。これから先の証明法は定理2.3 の i) の $\Rightarrow$ の証明と並行する。すなわち(19)式を使うのであるが，まず,

$$\sum_{j=1}^{N} R_{\alpha,y_0^j}F_j(z,\xi)=\sum_{j=1}^{N}\int_{\{|\mathrm{Re}\,z'|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z'=y_0^j\}} K_\alpha(z-z',\xi)F_j(z')dz'$$

の積分中適当なチェインの変更をした後，$\{|\mathrm{Re}\,z'-x_0|\leq r'\}$ 上での積分を抜き出しそれについては $F_j(z)$ を(19)の右辺で置き換える。実際 $\{|\mathrm{Re}\,z'-x_0|\geq r',\ |\mathrm{Re}\,z'|\leq R\}$ 上での積分は前にみたように $H(z,\xi)$ の $z=x_0$ 付近での特異性には寄与しない。又，$G_{jk}+G_{kj}=0$ であるので(19)の才1項もやはり前と同じ理由で $z=x_0$ 付近での特異性には寄与しない。一方，$K_\alpha(z-z',\xi)F_{lj}(z')$ の積分は

$\mathrm{Re}\,z'=x_0$ の付近で積分チェインの虚部を u_0^l 方向に変更しておけば $\langle u_0^l, \xi_0\rangle<0$ であることから $\{\xi=\xi_0,\ z=x_0\}$ の近傍迄解析接続できることがわかる。これらを合わせて結論を得る。

次は定理2.7と2.3のii)の直接の系であり，超関数の特異性の余接方向分解の理論の核心である。

<u>定理2.8.</u>　$x_0\in\mathbb{R}^n$ の近傍で定義された超関数 $f(x)$ が x_0 の付近で解析的になることと $S.S.f(x)\cap\{(x_0;i\xi dx);\ \forall\xi\in S^{n-1}\}=\phi$ とは同値。

<u>命題2.9.</u>　V を $\mathbb{R}^n$ の開凸錐とする。$F(z)$ が $\{|z-x_0|<\delta,\ \mathrm{Im}\,z\in V\}$ で正則ならばその境界値 $F(x+i0V)$ について

$$S.S.F(x+i0V)\subset\{(x;i\xi dx);\ |x-x_0|<\delta,\ \xi\in V^\circ\}$$

が成立する。逆に $\{|x-x_0|<\delta\}$ で定義された超関数 $f(x)$ が

$$S.S.f(x)\subset\{(x;i\xi dx);\ |x-x_0|<\delta,\ \xi\in V^\circ\}$$

をみたすとすると，$f(x)$ は無限小くさび $\{|\mathrm{Re}\,z-x_0|<\delta,\ \mathrm{Im}\,z\in 0\cdot V\}$ で正則な関数 $^\exists F(z)$ の境界値 $F(x+i0V)$ に $\{|x-x_0|<\delta\}$ において等しい。

∵) 最初の主張はミクロ解析性の定義から明らかである。二番目の主張は $f(x)$ が $\{|x-x_0|<\delta\}$ の各点の付近で局所的に V 方向

からの境界値でかけている事をいえばよい（一つの定義関数でかけている時その関数は境界値により一意に定まるから）。しかしそれはやはり定理2.3と2.7の直接の帰結である。

(注) 上の命題において$f(x)$がdistributionであるならば自動的に$F(z)$もVに含まれる任意の相対コンパクト錐の方向からdistribution境界値をもち，実際$f(x)$に一致する。(cf. 定理2.5)。

このようにして超関数の特異台の位置がわかると定理2.7と2.3 ii)を使うことにより，それに応じたうまい定義関数をとることができる（しかも$f(x)$がdistributionならばそうやって作ったうまい定義関数も皆distribution境界値をもつ）。このことは例えば超関数の実解析的部分多様体への制限，或いは超関数同志の積を定義する際重要となる。つまりこれらの演算はすべてその定義関数である正則関数に対する制限，又は積から誘導されるのであるが任意の超関数達に対してこれらの操作が可能であるわけではなく，ミクロ解析性に関するある種の条件が必要となる（例えば $\frac{1}{x_1+i0}\times\frac{1}{x_1+i0}$ は $\frac{1}{(x_1+i0)^2}$ として定義できるが $\frac{1}{x_1+i0}\times\frac{1}{x_1-i0}$ は定義できない）。その条件に応じてうまい定義関数をとることによりそのような演算が可能になるのである。（同時にこれらの演算がdistributionに対する制限や積とも整合的であることもわかるであろう）。詳しくは

[37] の Ch 1，（又は [32]，[13]，[14]）を参照されたい。いずれにせよそれらは今迄に述べた超関数の局所的な理論（特に定理 2.3，2.4，2.7 など）から直ちに定式化し証明できる事ばかりである．但し積分演算についてはある程度大域的な表示や考察が必要なのでこのセクションの事柄だけでは済まない部分もある，ところでよく知られた超関数の構成法として次の定理は大変便利である．

<u>定理 2.10.</u>（Lemma 3.1.5, Ch. I, [37]）. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\varphi(x)$ を U 上定義された実解析関数で U 上 $\mathrm{Im}\,\varphi(x) \geqq 0$ をみたすものとする。さらに $S = \{x \in U \,;\, \varphi(x) = 0\}$ 上で $\nabla_x \varphi(x) \neq 0$ を仮定する。その時 $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ に対して $\{\varphi(z)\}^\alpha$ は無限小くさび $\{z = x + iy \in \mathbb{C}^n \,;\, x \in U,\ y \in 0 \cdot \{\langle y, \nabla_x \mathrm{Re}\,\varphi(x)\rangle > 0\}\}$ で一価正則となり，従って境界値

$$f(x) = (\varphi(x) + i0)^\alpha$$

は U 上の distribution としてよく定義される。しかも．

$$\mathrm{S.S.}\, f(x) = \{(x \,;\, i\xi dx) \in iS^*U \,;\, \varphi(x) = 0,\ \xi = \nabla_x(\mathrm{Re}\,\varphi(x))\}.$$

例として $\forall (x_0 \,;\, i\xi_0 dx) \in iS^*\mathbb{R}^n$ に対して（$|\xi_0| = 1$），

$$f(x) = (\langle x - x_0, \xi_0\rangle + i(x - x_0)^2 + i0)^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots)$$

を考えると $\mathbb{R}^n$ 上の distribution になり，$\mathrm{S.S.}\, f(x) = \{(x_0 \,;\, i\xi_0 dx)\}$。

又，曲面波展開の時使った $(\langle x - x_0, \xi_0\rangle + i((x - x_0)^2 - \langle x - x_0, \xi_0\rangle^2) + i0)^\alpha$ で

も同様である。これに対し $f(x)=(\langle x-x_0,\xi_0\rangle+i0)^\alpha$ を考えると $S.S.f(x)=\{(x;i\xi dx)\in iS^*\mathbb{R}^n;\ \langle x-x_0,\xi_0\rangle=0,\ \xi=\xi_0\}$ となり一点ではなくなる。

超関数の特異性の方向分解の理論のしめくくりとしてマイクロ関数(microfunction)の定義を与えておく。詳しくは[37], [35], [32], [13], [14]などを参照せよ。

<u>定義2.11.</u> $(x_0;i\xi_0 dx)\in iS^*\mathbb{R}^n$ に対して $(x_0;i\xi_0 dx)$ におけるマイクロ関数の層の stalk を次の様に定義する。

$$\mathcal{C}|_{(x_0;i\xi_0 dx)}=\mathcal{B}|_{x_0}\Big/\{f(x)\in\mathcal{B}|_{x_0};\ S.S.f(x)\not\ni(x_0;i\xi_0 dx)\}$$

但しここで $\mathcal{B}|_{x_0}$ は $x=x_0$ の付近で定義された超関数の芽の全体とする。よく知られているように $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$, $iS^*\mathbb{R}^n$ 上の層となる。

R, R_1, $F_j(z)$, V_j などが定理2.3の状況にある時超関数 $f(x)=\sum_{j=1}^N F_j(x+i0V_j)$ の $x=x_0$ ($|x_0|<R_1$) 付近での $i\xi_0 dx$ 方向の特異性はその曲面波展開 $H(z,\xi)=\sum_{j=1}^N \mathcal{R}_{\alpha,\gamma_j}F_j(z,\xi)$ の $z=x_0$, $\xi=\xi_0$ 付近での挙動で決まる。すなわち、十分小さい $\varepsilon>0$ に対し

$$F_\varepsilon(z)=\int_{\{|\xi|=1,\ |\xi-\xi_0|\leqq\varepsilon\}}H(z,\xi)\,d\sigma(\xi)$$

とおくと、$F_\varepsilon(z)$ は無限小くさび $\{|\mathrm{Re}\,z|<R_1,\ \mathrm{Im}\,z\in 0\cdot V_\varepsilon\}$ (但し V_ε は $\{|\xi|=1,|\xi-\xi_0|\leqq\varepsilon\}$ の双対錐の内部) で正則となり,

$f(x)-F_\varepsilon(x+i0V_\varepsilon)$ は $(x_0;i\xi_0 dx)$ でミクロ解析的となる(定理2.3 ii)より)。言いかえるとマイクロ関数として $f(x)$ と $F_\varepsilon(x+i0V_\varepsilon)$ は $(x_0;i\xi dx)$ において等しい。これは又、$(x_0;i\xi_0 dx)$ におけるマイクロ関数を考える時は $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z-x_0|<\varepsilon,\ \langle \mathrm{Im}\, z,\xi_0\rangle-\varepsilon\sqrt{|\mathrm{Im}\, z|^2-\langle \mathrm{Im}\, z,\xi_0\rangle^2}>0\}$ のような十分広い錐で正則な関数の表わす同値類を考えればよいことを意味する。

定理2.12.(佐藤の完全列)。$\mathcal{A}$ によって $\mathbb{R}^n$ 上の実解析関数の芽からなる層を表わす。又、$\pi: iS^*\mathbb{R}^n\ni(x;i\xi dx)\longmapsto x\in\mathbb{R}^n$ を射影とすると、

$$0\longrightarrow\mathcal{A}\xrightarrow{i}\mathcal{B}\xrightarrow{sp}\pi_*\mathcal{C}\longrightarrow 0$$

は $\mathbb{R}^n$ 上の層の系列として完全である。但し i は自然な埋め込みで、sp(スペクトルを取り出すという意味…プリズムの様に考えて頂きたい)は $\mathcal{C}$ の定義(2.11)による同値類をとる写像。

(注) $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ に自然にうめ込めることはわれわれの超関数の定義2.2から出発すれば明らかである。又、超関数 $f(x)$ が $(x_0;i\xi_0 dx)$, $\forall\xi_0\in S^{n-1}$ の各点で $\mathcal{C}$ の元として0、すなわちミクロ解析的ならば実は解析的、すなわち i の像に入ることは定理2.8そのものである。$sp\circ i=0$ は明らかであるから結局 sp が全射であることをいえばよい。

∵) $x_0=0\in\mathbb{R}^n$ で考えればよい。$\pi_*\mathcal{C}$ の $x=0$ における芽とは定

義により（球面のコンパクト性を使って），$S^{n-1}=\{\xi\in\mathbb{R}^n;|\xi|=1\}$ の開集合 U_λ と 0 における超関数 $f_\lambda(x)$ からなる対の組，$\{(U_\lambda, f_\lambda(x))\}_{\lambda=1,\dots,\mu}$ であって次のイ)，ロ)をみたすものと同一視できる。イ) $\cup_{\lambda=1}^{\mu} U_\lambda = S^{n-1}$，ロ) $\forall\lambda,\lambda'$ に対して

$$S.S.(f_\lambda(x)-f_{\lambda'}(x))\cap\{(0;i\xi dx);\xi\in U_\lambda\cap U_{\lambda'}\}=\phi。$$

この時主張すべきことは〝適当な 0 における超関数 $f(x)$ を選んで $\forall\lambda=1,\dots,\mu$ に対し $S.S.(f_\lambda(x)-f(x))\cap\{(0;i\xi dx);\xi\in U_\lambda\}=\phi$ とできる〟。まず $\{U_\lambda\}_\lambda$ は人為的に細かくできるから最初から U_λ は十分開き角の小さい開凸錐としてよい。さて各 $f_\lambda(x)$ を正則関数の境界値の和で表わしておく。すなわち十分小さい $R>0$ と十分大な $N\geq 1$ に対し，

$$f_\lambda(x)=\sum_{j=1}^{N} F_j^\lambda(x+i0V_j^\lambda)\qquad \lambda=1,\dots,\mu$$

と $\{|x|\leq R\}$ でかき表わしておく（N は共通にとれる）。但し V_j^λ は $\mathbb{R}^n$ の開凸錐，$F_j^\lambda(z)$ は $\{|\mathrm{Re}\,z|\leq R,\ |\mathrm{Im}\,z|\leq R,\ \mathrm{Im}\,z\in V_j^\lambda\}$ で正則 $(j=1,\dots,N,\ \lambda=1,\dots,\mu)$。ここで定理2.3を使う。すなわち $\alpha=1/4R$，$R_1=R/2$ とおき，$y_0^{j,\lambda}\in V_j^\lambda$ を十分小さくとり，各 λ に対して定理2.3が $f_\lambda(x)$ の曲面波展開 $H_\lambda(z,\xi)=\sum_{j=1}^{N} R_{\alpha,y_0^{j,\lambda}}F_j^\lambda(z,\xi)$ に対して成立するようにする。さて $\cup_{\lambda=1}^{\mu} U_\lambda=S^{n-1}$ であるから $\exists E_1,\dots,\exists E_\mu$（$S^{n-1}$ 内の可測集合）s.t. $\overline{E_\lambda}\subset U_\lambda$，$\forall\lambda$，$E_\lambda\cap E_{\lambda'}=\phi$ $\forall\lambda\neq\lambda'$，$E_1\sqcup\cdots\sqcup E_\mu=S^{n-1}$。これを使って

$$H_\lambda(z)=\int_{E_\lambda} H_\lambda(z,\xi)d\sigma(\xi)$$

と定義すると確かに $H_\lambda(z)$ は無限小くさび $\{|\mathrm{Re}\,z|<R/2,\ \mathrm{Im}\,z\in 0\cdot\Gamma_\lambda\}$ ($\Gamma_\lambda=\mathrm{int}(E_\lambda^\circ)$) で正則となる。

$$f(x)=\sum_{\lambda=1}^{\mu} H_\lambda(x+i0\Gamma_\lambda)$$

とおけば $f(x)$ が求めるものになる。実際 $1\leq{}^\forall\lambda_0\leq\mu$ と，${}^\forall\xi_0\in U_{\lambda_0}$ を固定する。定理2.3 ii) により $x=0$ の付近で $f_{\lambda_0}(x)=\sum_{\lambda=1}^{\mu}\int_{E_\lambda} H_{\lambda_0}(z,\xi)d\sigma(\xi)|_{\mathrm{Im}\,z\in 0\cdot\Gamma_\lambda}$ とかけるから，

$$f_{\lambda_0}(x)-f(x)=\sum_{\lambda=1}^{\mu}\int_{E_\lambda}(H_{\lambda_0}(z,\xi)-H_\lambda(z,\xi))d\sigma(\xi)|_{\mathrm{Im}\,z\in 0\cdot\Gamma_\lambda}$$

が $x=0$ の付近で成立する。よって右辺の各項が $(0;i\xi_0dx)$ でミクロ解析的であることをみればよい。$\overline{E}_\lambda\not\ni\xi_0$ の項については明らかに $i\xi_0dx$ 方向にミクロ解析的。$\overline{E}_\lambda\ni\xi_0$ の項については $\xi_0\in U_\lambda\cap U_{\lambda_0}$ となる。従って条件 ロ) より $S.S.(f_\lambda(x)-f_{\lambda_0}(x))\not\ni(0;i\xi_0dx)$ であるから定理 2,7 により $f_\lambda(x)-f_{\lambda_0}(x)$ の曲面波展開：

$$\sum_{j=1}^{N}R_{\alpha,y_0^j,\lambda}F_j^\lambda(z,\xi)-\sum_{j=1}^{N}R_{\alpha,y_0^j,\lambda_0}F_j^{\lambda_0}(z,\xi)=H_\lambda(z,\xi)-H_{\lambda_0}(z,\xi)$$

は $\{z=0,\ \xi=\xi_0\}$ の近傍で解析的となる。これより

$$S.S.\int_{E_\lambda}(H_\lambda(z,\xi)-H_{\lambda_0}(z,\xi))d\sigma(\xi)|_{\mathrm{Im}\,z\in 0\cdot\Gamma_\lambda}\not\ni(0;i\xi_0dx)$$

は明らか。これらを合わせて $S.S.(f_{\lambda_0}(x)-f(x))\not\ni(0;i\xi_0dx)$ がいえる。証明終わり。

(注) ${}^\forall f_\lambda(x)$ が $x=0$ の付近で distribution ならば $f(x)$ も distribution になる事は上の証明より明らか。

超関数論においてミクロ解析性のみでなくマイクロ関数の

の様な関数の特異性に関する同値類の概念を導入することの根拠は上の定理にある。すなわち微分方程式の問題を $iS^*\mathbb{R}^n$ 上の各点各点で別々に考察しておけば実解析関数の分を法として超関数に対する情報がすべて得られるということである。しかも多くの場合（C^∞とは違って）実解析関数に対してはコーシー・コバレフスカヤの定理のようなものがあるから難点はない。一方問題を $iS^*\mathbb{R}^n$ の各点で考えることは微分作用素の主部 $P(x,\xi)$ が余接ベクトル束 $T^*\mathbb{R}^n$ 上の同次関数になることから容易に想像できるように極めて自然なことである。実際マイクロ関数には微分作用素の一般化であり，積分型作用素の逆も含むようないわゆる擬微分作用素が自然に作用するし，又，座標変換の一般化であり幾何学的にははるかに自由度の大きな“量子化された接触変換”と呼ばれる $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ なる層同型が構成できる（一種の可逆な積分変換であり，いわゆる Fourier 積分作用素の C^ω 版）。これらの手段を用いて [37] の Ch.III では生成的な条件下での微分方程式系の分類とマイクロ関数解の構造の決定がなされた。ところが微分方程式の境界値問題や混合問題を超局所的に解析しようとすると事情は一変する。例えば波動作用素 $\partial_t^2-\Delta_x$ のような数理物理的に重要な作用素に対してさえ曲がった境界面での混合問題を考えるといわゆる波動の回折と呼ばれる重要な現象がお

こる。実際これに対応する解の特異性は非常に複雑で、いわゆる佐藤－河合－柏原の提唱するホロノミックな超関数と呼ばれる，代数的にきれいな性質をもつ関数のクラスには入らないことが証明されている。この問題に対し解に対する構造論的なアプローチが筆者によりなされ，いくつかの重要な結果を得た([18])が，J. Sjöstrand は独自の方法を用いて双曲型混合問題の解のミクロ解析性の伝播に関して決定的な結果を得た([38], [39], [40])。彼の方法はいわゆるGårding, Hörmander 以来の一種のア・プリオリ評価に基づくものであり，C^∞カテゴリーではよく用いられている方法である。ここではその核心と思われる部分のみを紹介するが，その前にdistribution の理論の中での解析的特異性の分解の理論を振り返ってみる。

<u>定義 2.13</u> (Hörmander [11], Andersson[1]). $f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 W で定義された distribution とする。その時 $(x_0; i\xi_0 dx) \in T^*W$ が $f(x)$ の解析波面集合 (Analytic wave front set) に属さないとは "適当な $C>0$ と x_0 の近傍 U，ξ_0 の $\mathbb{R}^n$ における錐状近傍 Γ に対して $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ なる $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台をもつ distribution の列が存在し，

i) $f_n(x) = f(x)$ on U,

ii) $|\hat{f}_n(\xi)| \leq C^{n+1} n! \cdot |\xi|^{-n} \quad \forall n=1,2,\ldots, \forall \xi \in I,$"
が成立する事である。

<u>定義 2.14.</u> (Bros - Iagolnitzer [7]). $f(x)$, Wについては同上。$(x_0; \xi_0 dx) \in S^*W$ が $f(x)$ の essential support に属さないとは，

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \lim_{\{|y| \to 0,\, y \in V_j\}} F_j(x+iy)$$

が $x=x_0$ の近傍で成立すること。但し V_j は R^n の開凸錐で $\forall j$ に対し $V_j \cap \{\langle y, \xi_0 \rangle < 0\} \neq \phi$ をみたし，$F_j(z)$ は $\{|z-x_0|<\delta,\ \mathrm{Im}\, z \in V_j\}$ $(\exists \delta>0)$ で正則，かつ V_j 方向から distribution 境界値をもつ事。

定義 2.13 と 2.14 の同値性は Bros - Iagolnitzer [9]，Hill [10]，西和田 [33] によってそれぞれ独立に証明された。又，定義 2.14 と超関数論における特異台との整合性も Bony [6]，片岡 [15] によって独立に証明された。従ってすべては同値となるわけだが特に後者の同値性については本稿で述べて来た事柄から明白である。さていよいよ Sjöstrand の方法 ([38], [39], [40]) を述べる。

まず §1 の始めに述べた $\delta(x)$ の曲面波展開を導き出す方法を思い出して頂きたい。公式

$$\delta(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\eta\rangle}\,d\eta$$

において $\eta_j = \xi_j + i\alpha\left(|\xi| x_j - \langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\rangle \xi_j\right)$ $(\alpha>0)$ のような置換をして曲面波展開の公式を得たのであるが今回は

$$\eta_j = \xi_j + i|\xi|\cdot x_j \qquad j=1,\dots,n$$

とおいてみる。すぐわかる様に $\langle x,\eta\rangle = \langle x,\xi\rangle + i|\xi|\cdot x^2$ となりやはり虚部が正又は0になる。又ヤコビアンは

$$\det\left(\partial(\xi_j + i|\xi|x_j)/\partial\xi_k\right) = \det\left(\delta_{jk} + i\frac{\xi_k}{|\xi|}x_j\right) = 1 + i\frac{\langle x,\xi\rangle}{|\xi|}$$

となる。従って§1と同様な議論により公式

$$\delta(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle - |\xi|\cdot x^2}\left(1 + i\frac{\langle x,\xi\rangle}{|\xi|}\right)d\xi$$

を得る。この展開式も $x\neq 0$ では急激に減小する項 $e^{-|\xi|\cdot x^2}$ がついているので§1の $K_\alpha(z,\xi)$ と同様の議論を進める事ができるが（ただ放物線の所が円にかわる），Sjöstrand の理論では $|\xi|$ についての積分は行なわず最後までパラメーターとして残しておく。さらに α という空間方向のパラメーターを新たに導入して次の様な変形を行う。

$$\delta(x-x') = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-x',\xi\rangle}\left(1 + i\frac{\langle x-x',\xi\rangle}{|\xi|}\right)\left\{e^{-|\xi|(x-x')^2}\right\}d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-x',\xi\rangle}\left(1 + i\frac{\langle x-x',\xi\rangle}{|\xi|}\right)\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{4|\xi|}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-2|\xi|\left((x-\alpha)^2 + (x'-\alpha)^2\right)}d\alpha\right\}d\xi. \qquad \text{---(20)}$$

このままでもよいのであるが後の議論を見通しよくする為上式中の可逆因子 $\left(1 + i\langle x-x', \frac{\xi}{|\xi|}\rangle\right)$ を取り去ったものを考える。すなわち，

<u>命題2.15.</u> $\pi^{-\frac{3}{2}n}\int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{n}{2}} \exp\{i\langle x-x',\xi\rangle - 2|\xi|((x-\alpha)^2+(x'-\alpha)^2)\}\, d\alpha$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} (1+(x-x')^2)^{-1}\left(1-\frac{i\langle x-x',\eta\rangle}{\sqrt{(1+(x-x')^2)|\eta|^2-\langle x-x',\eta\rangle^2}}\right) e^{i\langle x-x',\eta\rangle}\, d\eta$$

さらに $(1+x^2)^{-1}\left(1-\frac{i\langle x,\eta\rangle}{\sqrt{(1+x^2)|\eta|^2-\langle x,\eta\rangle^2}}\right) = \sum_{J\geq 0} x^J Q_J(\eta)$ と $x=0$ のまわりでテイラー展開すると，$Q_0(\eta)\equiv 1$，$Q_J(\eta)$ は $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ で定義された同次0次の解析関数になる。従って（$|Q_J|$ は $|J|$次の巾程度）

$$P(\partial_x) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{|J|=l} i^{|J|}\frac{\partial^{|J|}Q_J}{\partial\eta^J}\left(\frac{1}{i}\partial_x\right)\right)$$

はすべての純虚方向で定義された0階楕円型の定数係数擬微分作用素になる。これを使うと上の関数は $P(\partial_x)\delta(x-x')$ とかける。

<u>定義2.16.</u>（Sjöstrand 変換）．$f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台をもつ超関数（彼は distribution しか考えていないが）とする。その時 $\{(x,\alpha,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\}$ 上の関数 $\Phi f(x;\alpha,\xi)$ を

$$\pi^{-\frac{3}{2}n}|\xi|^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{i\langle x-x',\xi\rangle-2|\xi|((x-\alpha)^2+(x'-\alpha)^2)\}\cdot f(x')\,dx'$$

によって定義する。コンパクト台での積分であり積分核は x, α, ξ について実解析的だから $\Phi f(x;\alpha,\xi)$ も $\mathbb{R}^{3n}$ 上の実解析関数になる。特に x を複素化して $x+iy$ とおくと，

$$\Phi f(x+iy;\alpha,\xi) = e^{-\langle y,\xi\rangle+2|\xi|(|y|^2-2i\langle x-\alpha,y\rangle)}\cdot\Phi f(x;\alpha,\xi)$$

となり x, y, α, ξ がすべて実数ならば

$$|\Phi f(x+iy;\alpha,\xi)| = e^{-\langle y,\xi\rangle+2|\xi|\cdot|y|^2}|\Phi f(x;\alpha,\xi)| \tag{21}$$

が成立する。

補題2.17. $f(x)$ が $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台の超関数とすると，$\forall\varepsilon>0$ に対して $f(x)$ と ε のみによる正定数 C_ε が存在して

$$|\Phi f(x;\alpha,\xi)| \leqq C_\varepsilon\cdot|\xi|^{\frac{n}{2}} e^{\varepsilon|\xi|-2|\xi|\cdot|x-\alpha|^2}, \quad \forall(x,\alpha,\xi)\in\mathbb{R}^{3n}$$

が成立する。さらにもし $f(x)$ が distribution なら $\exists C>0$, $\exists N\geqq 1$

$$|\Phi f(x;\alpha,\xi)| \leqq C\cdot|\xi|^{\frac{n}{2}}\cdot(1+|\xi|)^N e^{-2|\xi|\cdot|x-\alpha|^2}, \quad \forall(x,\alpha,\xi)\in\mathbb{R}^{3n}$$

が成立する。

∵) 積分核 $\exp\{i\langle x-x',\xi\rangle-2|\xi|((x-\alpha)^2+(x'-\alpha)^2)\}$ において x' を複素化 $x'+iy'$ でおきかえて絶対値を評価すると

$$\begin{aligned}
&|\exp\{i\langle x-x'-iy',\xi\rangle-2|\xi|((x-\alpha)^2+(x'+iy'-\alpha)^2)\}| \\
&\qquad = \exp(\langle y',\xi\rangle+2|\xi|\cdot|y'|^2-2|\xi|((x-\alpha)^2+(x'-\alpha)^2)) \\
&\qquad \leqq \exp\{\langle y',\xi\rangle+2|\xi|\cdot|y'|^2-2|\xi|\cdot|x-\alpha|^2\}
\end{aligned}$$

超関数の積分とは少し実軸からずれた所にある積分チェイン上での正則関数の積分に他ならないからこの評価から直ちに結論が得られる。distribution についても同様である。

定理2.18. (Sjöstrand). $f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台をもつ超関数とする。$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域とし，

$$\Lambda_f(\alpha,\xi)=\sup_{x\in\Omega}|\Phi f(x;\alpha,\xi)| \quad (又は\ \|\Phi f(x;\alpha,\xi)\|_{L^1(\Omega_x)})$$

とおく。その時 $\forall(x_0;i\xi_0dx)\in iS^*\mathbb{R}^n$ $(x_0\in\Omega)$ に対し，$S.S.f(x)\not\ni(x_0;i\xi_0dx)$ と次は同値。

*) $\exists\varepsilon>0$, $\exists C>0$ が存在して $\{(\alpha,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n;\ |\alpha-x_0|<\varepsilon,\ |\frac{\xi}{|\xi|}-\frac{\xi_0}{|\xi_0|}|<\varepsilon\}$

上で不等式： $\Lambda_f(\alpha,\xi)\leqq Ce^{-\varepsilon|\xi|}$ が成立すること。

つまり x,α,ξ などすべて実の所だけを動かしてミクロ解析性が判定できるわけである。特に x についての L^2－ノルムを使った場合などは微分方程式の解のミクロ解析性のアプリオリ評価を可能にする。

∵）⇐）以下 Λ_f が sup－ノルムの時のみやる（同様なので）。

命題 2.15により

$$p(\partial_x)f(x)=\int_{|\xi|=1}d\sigma(\xi)\left[\int_0^\infty \rho^{n-1}d\rho\int_{\mathbb{R}^n}\Phi f(z;\alpha,\rho\xi)d\alpha\right]_{\langle \mathrm{Im}\,z,\xi\rangle=+0} \quad (22)$$

が成立する事がわかる。実際（21）と補題2.17によって $\forall\mu>0$

$$|\Phi f(x+iy;\alpha,\rho\xi)|\leqq C_\mu\rho^{\frac{n}{2}}\exp\{\rho(\mu-2|x-\alpha|^2-\langle y,\xi\rangle+2|y|^2)\} \quad \cdots(23)$$

がなり立つから $\int_0^\infty\rho^{n-1}d\rho\int_{\mathbb{R}^n}\Phi f(z;\alpha,\rho\xi)d\alpha$ は $\{\langle \mathrm{Im}\,z,\xi\rangle>2|\mathrm{Im}\,z|^2+\mu\}$ で絶対可積分となる。従って

$$G(z,\xi)=\int_0^\infty\rho^{n-1}d\rho\int_{\mathbb{R}^n}\Phi f(z;\alpha,\rho\xi)d\alpha$$

は $\{(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n;\ \langle \mathrm{Im}\,z,\xi\rangle>2|\mathrm{Im}\,z|^2,\ |\xi|=1\}$ で解析的となり（22）の曲面波展開表示をみたす。$p(\partial_x)$ は楕円型だったから結局 S.S.$(p(\partial_x)f(x))\not\ni(x_0;i\xi_0dx)$ をいえばよいのであるがその為には $G(z,\xi)$ が $\{\xi=\xi_0,\ z=x_0\}$ の近傍まで解析接続できる事をいえば十分である。今 $\varepsilon>0$ を ＊）の中の正数とすると（$\{|x-x_0|<\varepsilon\}\subset\Omega$ とする）

$$G(z,\xi)=G_1(z,\xi)+G_2(z,\xi)=\int_0^\infty\rho^{n-1}d\rho\int_{\{|\alpha-x_0|\leqq\varepsilon\}}\Phi f(z;\alpha,\rho\xi)d\alpha$$
$$+\int_0^\infty\rho^{n-1}d\rho\int_{\{|\alpha-x_0|\geqq\varepsilon\}}\Phi f(z;\alpha,\rho\xi)d\alpha$$

と分けられる。G_1 における被積分関数は条件 ＊）と（21）によ

り，$|\Phi f(x+iy;\alpha,\rho\xi)|\leq C e^{-\varepsilon\rho-\langle y,\xi\rangle\rho+2\rho|y|^2}$ を $\{|x-x_0|<\varepsilon,\ |\alpha-x_0|<\varepsilon,\ |\frac{\xi}{|\xi|}-\frac{\xi_0}{|\xi_0|}|<\varepsilon\}$ でみたす。従って $G_1(z,\xi)$ は $\{|\xi|=1,\ |\mathrm{Re}\,z-x_0|<\varepsilon,\ |\mathrm{Im}\,z|+2|\mathrm{Im}\,z|^2<\varepsilon,\ |\xi-\xi_0|<\varepsilon\}$ で解析的となる。又，G_2 における被積分関数は (2.3) をみたすから，$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ とすると $\forall\mu>0$ に対し，

$$\int_{\{|\alpha-x_0|\geq\varepsilon\}}|\Phi f(x+iy;\alpha,\rho\xi)|\,d\alpha\leq C_\mu e^{\rho(\mu-\langle y,\xi\rangle+2|y|^2)}\cdot\int_{\{|\alpha-x_0|\geq\varepsilon\}}\rho^{\frac{n}{2}}e^{-2\rho|x-\alpha|^2}d\alpha$$

$$\leq C_\mu e^{\rho(\mu+|y|+2|y|^2)}\cdot\int_{\{|\alpha|\geq\varepsilon\}}\rho^{\frac{n}{2}}e^{-2\rho(|\alpha|-\frac{\varepsilon}{2})^2}d\alpha$$

$$=C_\mu\cdot|S^{n-1}|\cdot e^{\rho(\mu+|y|+2|y|^2)}\int_0^\infty\rho^{\frac{n}{2}}e^{-2\rho(t+\frac{\varepsilon}{2})^2}(t+\varepsilon)^{n-1}dt$$

$$\leq C'\cdot C_\mu(\rho+1)^{\frac{n-1}{2}}\exp\left(\rho(\mu+|y|+2|y|^2-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2)\right).$$

よって $\mu=\frac{1}{4}\varepsilon^2$ とおくと $G_2(z,\xi)$ が $\{|\mathrm{Re}\,z-x_0|<\frac{\varepsilon}{2},\ |\mathrm{Im}\,z|+2|\mathrm{Im}\,z|^2<\frac{1}{4}\varepsilon^2,\ |\xi|=1\}$ で解析的となることがわかる。以上を合わせれば G の $\{\xi=\xi_0,\ z=x_0\}$ での解析性がわかる。⇒の証明は次のより強い結果が成立するのでそちらに回す。

（注）Sjöstrand 変換の定義からわかる様に x に関する項は単なる積因子として入っているだけである。すなわち

$$\Phi f(x;\alpha,\xi)=\pi^{-\frac{3}{2}n}|\xi|^{\frac{n}{2}}\cdot e^{i\langle x,\xi\rangle-2|\xi|(x-\alpha)^2}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x',\xi\rangle-2|\xi|\cdot|x'-\alpha|^2}f(x')dx'.$$

しかも x,α,ξ が実であれば $|e^{i\langle x,\xi\rangle-2|\xi|\cdot|x-\alpha|^2}|\leq 1$（特に $x=\alpha$ で 1 に到達する）であるから結局

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x',\xi\rangle-2|\xi|\cdot|x'-\alpha|^2}f(x')dx'\right|$$

の増大度評価がわかればよいことになる。すなわち $\Lambda_f(\alpha,\xi)$

$$=\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x',\xi\rangle-2|\xi|\cdot(x'-\alpha)^2}f(x')dx'\right|$$

としても上の定理は成立する。次の定理はこの形で扱う。

定理 2.19. $f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台を持つ超関数とすると

$$I(\alpha,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x',\xi\rangle-2|\xi|\cdot|x'-\alpha|^2}f(x')dx'$$

は $\{(\alpha+i\beta,\xi+i\eta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\}$ 上の整関数に解析接続できて次の i) ii) をみたす。

i) $f(x)$ の台の位置のみによる定数 $M>0$ と $0<{}^\forall\mu\leq 1$ と f にのみよる定数 $C_\mu>0$ が存在して ${}^\forall\mu\in(0,1]$ に対し

$$|I(\alpha+i\beta,\xi+i\eta)|\leqq C_\mu\exp[(\mu+8|\beta|^2)|\xi|+\{M+8(M+|\alpha|)(1+|\beta|)\}|\eta|]$$

が $\{(\alpha+i\beta,\xi+i\eta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\,;\,|\eta|\leq\frac{1}{2}|\xi|\}$ で成立する。

ii) $S.S.f(x)\not\ni(x_0;i\xi_0dx)$ ならば ${}^\exists\delta>0$, ${}^\exists C>0$ に対し

$$|I(\alpha+i\beta,\xi+i\eta)|\leqq Ce^{-\delta|\xi|}$$

が $\{(\alpha+i\beta,\xi+i\eta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\,;\,|\alpha-x_0|<\delta,\ |\beta|<\delta,\ |\frac{\xi}{|\xi|}-\frac{\xi_0}{|\xi_0|}|<\delta,\ |\eta|<\delta|\xi|\}$ 上で成立する。

∵) $I(\alpha,\xi)$ の積分核 $T(x,\alpha,\xi)=e^{-i\langle x,\xi\rangle-2|\xi|\cdot(x-\alpha)^2}$ において $x\to x+iy$, $\xi\to\xi+i\eta$, $\alpha\to\alpha+i\beta$ と複素化したものの絶対値をみる。

$$\begin{aligned}&|T(x+iy,\alpha+i\beta,\xi+i\eta)|\\&\quad=\left|\exp\{-i\langle x+iy,\xi+i\eta\rangle-2\sqrt{|\xi|^2-|\eta|^2+2i\langle\xi,\eta\rangle}(x-\alpha+iy-i\beta)^2\}\right|\\&=\exp[\langle x,\eta\rangle+\langle y,\xi\rangle-2\mathrm{Re}(\sqrt{|\xi|^2-|\eta|^2+2i\langle\xi,\eta\rangle})(|x-\alpha|^2-|y-\beta|^2)\\&\qquad+4\,\mathrm{Im}(\sqrt{|\xi|^2-|\eta|^2+2i\langle\xi,\eta\rangle})\cdot\langle x-\alpha,y-\beta\rangle]\end{aligned}$$

今 $|\eta|\leq\frac{1}{2}|\xi|$ とすると $\frac{1}{2}|\xi|\leqq \mathrm{Re}\sqrt{|\xi|^2-|\eta|^2+2i\langle\xi,\eta\rangle}\leqq 2|\xi|$, $|\mathrm{Im}\sqrt{\quad''\quad}|\leqq 2|\eta|$
となるから,

$$|T|\leqq \exp\left[|x|\cdot|\eta|+\langle y,\xi\rangle-|\xi|\cdot|x-\alpha|^2+8|\xi|(|y|^2+|\beta|^2)+8|\eta|(|x|+|\alpha|)(|y|+|\beta|)\right]$$

$$=\exp\left[\langle y,\xi\rangle+8|\xi|(|y|^2+|\beta|^2)-|\xi|\cdot|x-\alpha|^2+|\eta|\cdot\{|x|+8(|x|+|\alpha|)(|y|+|\beta|)\}\right] \quad\cdots\cdots(24)$$

i)の証明。例えば $\mathrm{supp}\cdot f(x)\subset\{|x|<M\}$ とすると

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i0V_j) \qquad (25)$$

なる $|x|\leqq M$ 上でのうまい大域的表示が存在する（例えば[16]の§2, 又は[13]）。すなわち $F_j(z)$は$\{|\mathrm{Re}\,z|\leqq M,\ \mathrm{Im}\,z\in 0\cdot V_j\}$なる無限小くさびで正則，しかも$\{|\mathrm{Re}\,z|=M,\ \mathrm{Im}\,z=0\}$まで解析接続できるようにとれる。従って積分 $\int_{\mathbb{R}^n}T(x,\alpha+i\beta,\xi+i\eta)f(x)\,dx$ は

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\{|x|\leqq M\}}T(x+i\Phi^j(x),\alpha+i\beta,\xi+i\eta)\,F_j(x+i\Phi^j(x))\left|\frac{\partial(x+i\Phi^j(x))}{\partial x}\right|dx \qquad (26)$$

とかける。但し $\Phi^j(x):\{|x|\leqq M\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ は C^∞写像で $\Phi^j(x)|_{\{|x|=M\}}\equiv 0$, $\Phi^j(\{|x|<M\})\subset V_j$ をみたす, $\sup_{\{|x|\leqq M\}}|\Phi^j(x)|$ の小さいものなら何でもよい。従って $\mu\leftrightarrow\{\Phi^j\}_j$, $C_\mu\leftrightarrow\sup_{j,\{|x|\leqq M\}}|F_j(x+i\Phi^j(x))|$
と対応させれば$|T|$の評価(24)より直ちに結論を得る。

ii)の証明。$S.S.\,f(x)\not\ni(x_0;i\xi_0\,dx)$（$|x_0|<M$としてよい）が成立する時は $f(x)$のうまい大域的表示(25)においてさらにうまく$\{F_j(z)\}_{j=1,\dots,N}$をとればさらに次の様な条件を満足させる事ができる。: $1\leqq{}^\exists N_0\leqq N$, s.t. "$1\leqq j\leqq N_0$ に対しては $V_j\cap\{\langle y,\xi_0\rangle<0\}\neq\phi$, 又 $N_0<j\leqq N$に対しては $F_j(z)$が $z=x_0$ 迄解析接続できる。"

そこで $|T|$ の評価式 (24) と積分表示 (26) をみながら $|I|$ を評価する。まず積分を x_0 に十分近い所と x_0 から離れた所の2項に分ける。$x=x_0$ に近い所では $\forall y_j$ に対して Φ^j を $\langle y, \xi\rangle = \langle \Phi^j(x), \xi\rangle < 0$ なる方向にとる事ができる (但し ξ が ξ_0 方向に近い時) ので $|\xi|$ についてのダンピング因子になる。一方 α が x_0 の付近にあるとすれば x が x_0 から離れている所では $|x-\alpha|$ が下から正の評価をもつ。すなわち $-|x-\alpha|^2|\xi|$ の項がダンピング因子として効いてくる。以上の議論を厳密に行えば ii) を得る。

以上が Sjöstrand の理論の骨子である。もちろん彼は積分変換としてもっと一般なものを扱っているが本質的には変わりない。ともかくこの方法は超関数の解析的特異性をその定義関数である正則関数によって調べるのではなく，定義2.16 の様な積分変換を通して，それ自体は特異性のない関数の $|\xi|\to\infty$ における漸近挙動に帰着させる。従ってあまり構成的とはいえない面もあるが，C^∞-カテゴリーの手法が並行して使える点ではミクロ解析性の判定法として強力である。

最後に筆者により最近考案された代数解析的エネルギー法について簡単に紹介したい (詳しくは [19])。

不等式法の基本原理というのはいうまでもなく $\int_{R^n} |u(x)|^p dx$

$=0$ $(p \geqq 1)$ から $u(x) \equiv 0$ が従う事である。特に $p=2$ の時を考えるとテンソル積 $u(x)\overline{u(y)}$ の対角線 $\{x=y\}$ 上での値の評価が問題となる。ところが佐藤の超関数論で $u(x)\overline{u(y)}$ が $\{x=y\}$ に一般的に制限できる条件は $u(x)$ が実解析的な場合に限られる。これでは役に立たないからかわりにテンソル積 $u(x)\overline{u(y)}$ のままで扱うことにする。すなわち $|u(x)|^2$ の代わりに $u(x)\overline{u(y)}$ という2倍の変数の超関数を考えることにする。今 iS^*R^n の一点 $(x_0; i\xi_0 dx)$ を固定する。その時 x_0 の付近で定義された超関数 $u(x)$ を

$$u(x) = F(x+i0\Gamma) + v(x)$$

とかく事ができる。但し $\Gamma = \{y \in R^n ; \langle y, \xi_0 \rangle > \varepsilon \sqrt{|y|^2 - \langle y, \xi_0 \rangle^2}\}$ なる錐で $F(z)$ は $\{z \in \mathbb{C}^n ; |z-x_0| < \varepsilon, \mathrm{Im}\, z \in \Gamma\}$ で正則。又、$v(x)$ は $(x_0; i\xi_0 dx)$ でミクロ解析的な超関数である。よって、

$$u(x)\overline{u(y)} = F(x+i0\Gamma)\cdot\overline{F(\overline{y-i0\Gamma})} + F(x+i0\Gamma)\cdot\overline{v(y)}$$
$$+ v(x)\overline{F(\overline{y-i0\Gamma})} + v(x)\overline{v(y)}$$

となる。但し $\overline{F(\bar{z})}$ は $\{-\mathrm{Im}\, z \in \Gamma\}$ 方向で定義された z の正則関数になることに注意されたい。さらに $u(x)\overline{u(y)}$ を反対角集合

$$\Delta^a = \{(x, y ; i\xi dx + i\eta dy) ; x=y, \xi+\eta=0\}$$

上の一点 $(x_0, x_0 ; i\xi_0\cdot(dx-dy))$ でマイクロ関数としてみた場合上の右辺の第2項以下は0となる。つまりマイクロ関数として

$$[u(x)\overline{u(y)}] = [F(x+i0\Gamma)\overline{F(\overline{y-i0\Gamma})}]$$

がこの点で成立する。従って $u(x)\overline{u(y)}$ の様な２次形式型の超関数はマイクロ関数として Δ^a 上でみた場合，$F(z)\overline{F(\bar{z})}$ の様に非常に特殊な形をした正則関数の境界値で表わされる事がわかる。そこでこの様な性質をもつ正則関数を一般的に考える。

<u>定義2,20.</u> Ω を $\mathbb{C}^n$ の領域とする，$\Omega\times\Omega$ 上の複素数値関数 $K(z,w)$ が整型エルミートであるとは，

(i) $K(z,w)$ は $(z,\bar{w})$ について $\Omega\times\Omega^c$ で正則（但し Ω^c は Ω の複素共役）。

(ii) $K(z,w)$ はエルミート核，すなわち $\overline{K(z,w)}=K(w,z)$。

$\Omega\times\Omega$ 上の整型エルミート核全体を $\mathcal{H}(\Omega)$ とかく。$\mathcal{H}(\Omega)$ の２元の単なる積（オペレーター結合ではない）は再び $\mathcal{H}(\Omega)$ に属す。従って $\mathcal{H}(\Omega)$ は $\mathbb{R}$ 上の Fréchet 代数をなす。ところで $F_j(z)$ $(j=1,\dots,N)$ を Ω 上の正則関数とすると $\sum_{j=1}^N F_j(z)\overline{F_j(w)}$ は $\mathcal{H}(\Omega)$ に属すだけでなく一種の正値性をもっている。そこでこれをもとにして $\mathcal{H}(\Omega)$ に順序を入れる。

<u>定義2.21.</u> $\mathcal{H}(\Omega)$ の元 $K(z,w)$ が正又は0（或いは半正定値；$K\geqq 0$ とかく）であるとは，$\forall N$, $\forall z_1,\dots,\forall z_N\in\Omega$ に対してエルミート行列 $(K(z_j,z_k))_{j,k=1,\dots,N}$ が半正定値の時とする。そして K_1, $K_2\in\mathcal{H}(\Omega)$ が $K_1\geqq K_2$ である事を $K_1-K_2\geqq 0$ と定義する。$\geqq$ は

$\mathcal{H}(\Omega)$ 上の順序になる。$\mathcal{H}^+(\Omega)=\{K\in\mathcal{H}(\Omega);\ K\geqq 0\}$ とおく。

<u>命題 2.22.</u> $\mathcal{H}^+(\Omega)$ は和，積について閉じている。又，次の不等式が $\forall K(z,w)\in\mathcal{H}^+(\Omega)$ について成立する。

i) $K(z,z)\geqq 0 \qquad \forall z\in\Omega.$

ii) $|K(z,w)|^2\leqq K(z,z)\cdot K(w,w)$。

<u>例1.</u> Ω で正則な関数達 $F_j(z)$ をとってきて有限和（又は無限和）$\Sigma_j F_j(z)\overline{F_j(w)}$ を作れば明らかに $\mathcal{H}^+(\Omega)$ の元になる。又，和を一般化して正値測度による積分にしてもよい事は明らか。例えば $\Omega=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,z>0\}$，$\alpha>-1$ とした時

$$\left(\frac{i}{z-\overline{w}}\right)^{\alpha+1}=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty e^{itz}\cdot\overline{e^{itw}}\,t^\alpha dt$$

であるから $\mathcal{H}^+(\Omega)$ に属す。

<u>例2.</u> $L^2\mathcal{O}(\Omega)\equiv L^2(\Omega)\cap\mathcal{O}(\Omega)$ とするとヒルベルト空間 $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ の再生核である Bergman 核 $\mathcal{B}_\Omega(z,w)$ は $\mathcal{H}^+(\Omega)$ に属す。実際 $L^2\mathcal{O}(\Omega)$ の完全正規直交系を一つとって $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^\infty$ とすると，

$$\mathcal{B}_\Omega(z,w)=\Sigma_{j=1}^\infty\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

とかけることはよく知られている（[2]）。又，$\Omega'\subset\Omega$ ならば $\mathcal{H}(\Omega')$ における不等式

$$\mathcal{B}_\Omega|_{\Omega'\times\Omega'}\leqq\mathcal{B}_{\Omega'}$$

が成立することはよく知られている。

命題2.23.（順序完備性）$\mathcal{H}(\Omega)$内の単調増大列 $K_1 \leqq K_2 \leqq \cdots \leqq K_j \leqq \cdots$ が上界 $K \in \mathcal{H}(\Omega)$（i.e. $\forall j$, $K_j \leqq K$）をもつならば $\lim_{j\to\infty} K_j(z,w) = K_\infty(z,w)$（$\Omega\times\Omega$上 広義一様収束）が存在して K_∞ は $\{K_j\}_j$ 達の上限になる。

定理2.24. $\phi \neq \Omega' \subset \Omega$ を$\mathbb{C}^n$の(連結)領域の対とする。

(i) $K \in \mathcal{H}(\Omega)$ に対して $K \in \mathcal{H}^+(\Omega)$ と $K \in \mathcal{H}^+(\Omega')$ とは同値，すなわち不等号 $\geqq$ は"解析接続"できる。

(ii) $K_1, K_3 \in \mathcal{H}(\Omega)$，$K_2 \in \mathcal{H}(\Omega')$ が $\mathcal{H}(\Omega')$ での不等式 $K_1 \leqq K_2 \leqq K_3$ をみたすならば実は K_2 は $\Omega\times\Omega$ まで解析接続できて $\mathcal{H}(\Omega)$ での不等式 $K_1 \leqq K_2 \leqq K_3$ をみたす。

不等号 $\geqq$ が解析接続できるという事実は一般にはあまりよく知られていないが非常に興味深い事実である。証明は S. Bergman による2重直交基底の存在定理［2］を使うと比較的楽である。

$\Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{C}^n$を領域対として $F_j(z) \in \mathcal{O}(\Omega')$ $j=1,\ldots,N$ に対し，$E(z,w) = \sum_{j=1}^{N} F_j(z)\overline{F_j(w)}$ を考える。その時，$E(z,w)$ が $\Omega\times\Omega$ に解析接続できるとすると上の定理により各 $F_j(z)$ が Ω に接続で

きることがいえる。この様な形の非常に興味深い応用をもっている。さらに有限和の所を一般の測度空間での正値積分におきかえたものも成立することがわかっている。

これらの理論は次の様な形でマイクロ関数の理論に応用される。

<u>定義2.25.</u> $2n$変数 $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ についてのマイクロ関数 $k(x,u)$ が反対角集合 $\Delta^a=\{(x,u;i\xi dx+i\eta du)\in iS^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n);\ x=u,\ \xi+\eta=0\}$ 上の一点 $p_0=(x_0,x_0;i\xi_0(dx-du))$ $(|\xi_0|=1)$ においてエルミートであるとは、$\overline{k(u,x)}=k(x,u)$ が p_0 の近傍で成立する事。これは $\exists K(z,w)\in\mathcal{O}(\{z=x+iy\in\mathbb{C}^n;\ |z-x_0|<\varepsilon,\ y\in\Gamma\})$ 但し $\Gamma=\{y\in\mathbb{R}^n;\ \langle y,\xi_0\rangle-\varepsilon\sqrt{|y|^2-\langle y,\xi_0\rangle^2}>0\}$ s.t.

$$k(x,u)=[K(x+i0\Gamma,\overline{u-i0\Gamma})]$$

が p_0 の近傍で成立することと同値（∵ $k(x,u)=\frac{1}{2}(k(x,u)+\overline{k(u,x)})$）。さらにこの時 $k(x,u)$ が p_0 において半正定値であるとは上の $K(z,w)$ として半正定値のものがとれることとする。

<u>定理2.26.</u> $p_0\in\Delta^a$ の近傍で定義されたエルミートなマイクロ関数に対し上の半正定値性によって順序が入る。すなわち $k(x,u)$ が p_0 で半正定値であり同時に $-k(x,u)$ も p_0 で半正定値ならば k は p_0 で 0 になる。

この定理によってマイクロ関数の理論が2次形式の理論にまで発展させられることがわかる。応用など詳しくは別の機会に譲る。

参考文献

[1]. Andersson, K.G., Analytic wave front sets for solutions of linear partial differential equations of principal type. Trans. Amer. Math. Soc., 176 (1973), 5-22.

[2] Bergman, S., The Kernel Function and Conformal Mapping. Mathematical surveys No. 5, Amer. Math. Soc., New York (1950).

[3] Bochner, S., A theorem on analytic continuation of functions in several variables, Ann. Math. 39 (1938), 14-19.

[4] Bochner, S., Martin, T., Several Complex Variables, Princeton (1948).

[5] Bogolyubov, N.N., Shirkov, D.V., Introduction to the Theory of Quantized Fields, GITTL, Mosow, (1957); Engl. transl. Interscience, New York, (1959).

[6] Bony, J.M., Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs differentiels a coefficients analytiques, Astérisque 34-35 (1976), 43-92.

[7] Bros, J., Iagolnitzer, D., Causality and local analyticity,

mathematical study, Ann. Inst. Henri Poincaré 18 (1973), 147-184.

[8] Bros, J., Iagolnitzer, D., Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert, Sém. Goulaouic-Lions-Schwartz (1975), n°16.

[9] Bros, J., Iagolnitzer, D., Support essentiel et structure analytique des distributions, Sém. Goulaouic-Lions-Schwartz (1975), n°18.

[10] Hill, C.D., On the singular spectrum of a distribution, Talks at RIMS Symposium, Kyoto, April (1976).

[11] Hörmander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 671-704.

[12] Kaneko, A., Remarks on hyperfunctions with analytic parameters, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), 371-407.

[13] 金子晃，定数係数線型偏微分方程式，岩波講座基礎数学，(1976).

[14] 金子晃，超函数入門，上，UP応用数学選書1，東大出版会，(1980)。

[15] 片岡清臣，超関数のラドン変換とその応用，東京大学理学部，修士論文 (1976)。

[16] Kataoka, K., On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, to appear in J. Fac. Sci. Math. Univ. Tokyo.

[17] Kataoka, K., Micro-local theory of boundary value problems I, — Theory of mild hyperfunctions and Green's formula —, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 27 (1980), 355–399。

[18] Kataoka, K., Micro-local theory of boundary value problems II, — Theorems on regularity up to the boundary for reflective and diffractive operators —, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 28 (1981), 31–56。

[19] 片岡清臣, 代数解析におけるエネルギー法, 『微分方程式の超局所解析』数理研研究集会 (1981), (講究録に掲載予定), 京都大学.

[20] 柏原正樹, 超関数論の代数的基礎, 数理研講究録 No.108, 京大 (1969), 58–71。

[21] 柏原正樹, 層Cの flabbiness, 数理研講究録 No.114, 京大 (1970), 1–4。

[22] Kashiwara, M., Kawai, T., Pseudodifferential operators in the theory of hyperfunctions, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 1130–1134.

[23] 柏原正樹, 河合隆裕, 木村達夫, 代数解析の基礎, 紀伊国屋書店, (1980).

[24] 小松彦三郎, 佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式, 東大セミナリーノート, 東京 (1968)。

[25] Komatsu, H., A local version of Bochner's tube theorem,

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 19 (1972), 201-214.

[26] Komatsu, H., Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 20 (1973), 25-105.

[27] Martineau, A., Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proc. Intern. Summer Course on the Theory of Distributions, Lisbon (1964), 195-326.

[28] Martineau, A., Théorèmes sur le prolongment analytique du type 'Edge of the Wedge Theorem', Sém. Bourbaki, 20 (1967-68), No. 340.

[29] Morimoto, M., Sur les ultradistributions cohomologiques, Ann. Inst. Fourier, 19-2 (1969), 129-153.

[30] Morimoto, M., Une remarque sur le théorème de 'edge of the wedge' de A. Martineau, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 446-448.

[31] Morimoto, M., Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, 17 (1970), 215-239.

[32] 森本光生, 佐藤超函数入门, 共立出版, (1976).

[33] Nishiwada, K., On local characterization of wave front sets in terms of boundary values of holomorphic functions, Publ. R.I.M.S, Kyoto Univ. 14 (1978), 309-320.

[34] Sato, M., Theory of hyperfunctions II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo

Sect. I, 8(1960), 387-437.

[35] Sato, M., Structure of hyperfunctions, 数学の歩み, 15(1970), 9-72 (柏原正樹記).

[36] Sato, M., 代数解析入門, 数理研講究録, 126(1971), 京大

[37] Sato, M., Kawai, T., Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lect. Notes Math. No. 287, Springer(1973), 265-529.

[38] Sjöstrand, J., Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, C.P.D.E., 5(1)(1980), 41-94.

[39] Sjöstrand, J., Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems II, C.P.D.E., 5(2)(1980), 187-207.

[40] Sjöstrand, J., Analytic singularities and Microhyperbolic boundary value problems, Math. Ann. 254, (1980), 211-256.

[41] Stein, K., Zur theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Regularitätshüllen niederdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 114(1937), 543-569.

[42] Vladimirov, V.S., On the edge of the wedge theorem of Bogolyubov, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 26(1962), 825-838.