数理解析研究所講究録
第451巻 1982年 182-186

コロナ定理

茨城大・理　藪田公三

複素平面上の単位円板 U に対して，U 上の正則有界函数 f の全体は，ノルム $\|f\|_\infty = \sup_{z\in U}|f(z)|$ を入れると，1 を持った可換 Banach algebra $H^\infty(U)$ になる。このとき，U 内の各点 z は，対応：$f \longrightarrow f(z)$ が $H^\infty(U)$ 上の連続乗法的線形汎函数になることにより，$H^\infty(U)$ の maximal ideal space $\mathfrak{M}$ 上の点と同一視できる。$\mathfrak{M}$ には weak* 位相 $(\sigma(H^\infty(U)', H^\infty(U)))$ が入っているとすると，$\mathfrak{M}$ はコンパクトである。さて，"U が $\mathfrak{M}$ で dense か" というのが 1941 年角谷によって生まれた問題で，形からコロナ問題と呼ばれた。この問題は，容易に解るように，次と同値である。

$f_1, f_2, \cdots, f_k \in H^\infty(U)$ で $\inf_{z\in U}\{|f_1(z)| + \cdots + |f_k(z)|\} > 0$ なら

$$f_1(z)g_1(z) + \cdots + f_k(z)g_k(z) = 1$$

となる $g_1, g_2, \cdots, g_k \in H^\infty(U)$ が存在するか。

1962年，この問題は，L. Carleson により，次の，より強い形で肯定的に解かれた（即ち，コロナは存在しない）。

$k \in \mathbb{N}$, $1 > \delta > 0$ が与えられると，次のような正数 $C(k,\delta)$ が存在する。

$f_1, \cdots, f_k \in H^\infty(U)$, $\|f_j\|_\infty \leqq 1$, $|f_1(z)|+\cdots+|f_k(z)| > \delta$ $(z \in U)$

ならば、

$f_1(z)g_1(z)+\cdots+f_k(z)g_k(z)=1$

かつ $\|g_j\|_\infty \leqq C(k,\delta)$, $j=1,\cdots,k$

となる $g_j \in H^\infty(U)$ が存在する。

この証明は後に L. Hörmander により少し見通しよくされた。又, 1979年 T. Wolff が比較的簡単な別証を与えた。最近, 内山明人氏がこの二つの証明をひろくして, 可算個の f_j についてもコロナ定理が成立することを示した。その中で, 上の $C(k,\delta)$ が k に無関係にとれることを示している。ここでは以下で Carleson-Hörmander 及び Wolff の証明の大筋を説明することとする。まず

I. f_j が $\overline{U}$ の近傍で正則なことを仮定してよいこと。

$f_{\rho,j}(z) \equiv f_j(\rho z)$ $\quad 0<\rho<1$

とおけば, $f_{\rho,j}$ は $|z|<\frac{1}{\rho}$ で正則で定理の仮定もみたす。よって, このときに定理が成立するならば,

$\exists\, g_{\rho,j} \in H^\infty(U)$ s.t.

$$\sum_{j=1}^{k} f_{\rho,j}\, g_{\rho,j} = 1 \quad , \|g_{\rho,j}\|_\infty \leqq C(\delta,k).$$

よって, $\rho_n \uparrow 1$ となる部分列で, $g_{\rho,j}(z) \to g_j(z)$ となるものが正規族の議論によってとれる。このとき

$g_j \in H^\infty(U)$, $\sum f_j(z)g_j(z)=1$, $\|g_j\|_\infty \leqq C(\delta,k)$ である。

II. 適当な1の分解.

$\frac{\delta}{k} > \varepsilon$ となる適当な ε に対し

$V_j = \{ z \in U \,;\, |f_j(z)| > \varepsilon \}$ としたときの $V_1, V_2, \cdots V_k$ に対する1の分解: $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ を

Carleson-Hörmander では

$$\gamma(\nabla\varphi_j \, dxdy) \leqq C(k,\delta)$$

Wolff では $\displaystyle h_{jn} = \frac{\varphi_n \bar{\partial}\varphi_j}{f_n f_j}$ とおいたとき

$$\gamma\left(|h_{n,j}(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dxdy\right) \leqq C(k,\delta) \qquad 1 \leqq n,j \leqq k$$

$$\gamma\left(|\partial h_{n,j}(z)| \log\frac{1}{|z|}\, dxdy\right) \leqq C(k,\delta) \qquad 1 \leqq n,j \leqq k$$

となるように見付ける。ここで

$$\gamma(\mu) = \sup_{\substack{0<h<\pi \\ 0 \leqq a < 2\pi}} \frac{1}{2h} \int_{\substack{a-h<\theta<a+h \\ 1-\frac{h}{\pi}<r<1}} |d\mu(r,\theta)| .$$

III. $\bar{\partial}$ equation を解くこと。

IIより $\displaystyle \sum f_j \frac{\varphi_j}{f_j} = 1$ であるから $\displaystyle \frac{\varphi_j}{f_j}$ を変形して正則な g_j を

$$g_j(z) = \frac{\varphi_j}{f_j} + \sum_{n=1}^{k} (a_{jn}(z) - a_{nj}(z)) f_n(z)$$

の形でうまく見付ければよい。このとき、必然的に $\sum g_j f_j = 1$ となる。

このためには、Carleson-Hörmander では

① $\displaystyle \bar{\partial} a_{jn} = \frac{\bar{f_j}\, \bar{\partial}\varphi_n}{f_n \sum |f_l|^2}$, Wolffでは

① $'$ $\quad \bar{\partial} a_{jn} = \dfrac{\varphi_n \bar{\partial} \varphi_j}{f_n f_j}$

をうまく解けばよい。

実際 II のような $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ に対しては，いずれの場合も，

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |a_{jn}(re^{i\theta})| d\theta < +\infty \quad \text{かつ} \quad \|a_{jn}\|_\infty \leqq C(n, \delta)$$

をみたすように解ける。そうすると，g_j は Hardy 空間 $H^1(U)$ に属し，境界値は有界函数であるから，Hardy 空間の一般論から

$$g_j \in H^\infty(U) \quad \text{かつ} \quad \|g_j\|_\infty \leqq C'(n, \delta)$$

となり，証明が終る。□

最後に，Wolff の詳しい証明は Koosis [7] の Appendix にある。又 Gamelin [3] は Wolff の証明をさらに巧妙に H^p theory と Green の公式だけを使って改良している。そこにはもっと一般な領域の場合どうなるかの簡単な解説もある。

このように Wolff の方法でコロナ定理の証明は簡単になるとはいえ，内山 [8] の結果から見ると，$C(n, \delta)$ の評価をよくするには，Carleson-Hörmander の方法の方がよいようである。Varopoulos [6] では $\mathbb{C}^n$ $(n \geqq 2)$ の単位球，あるいは強擬凸領域で，Carleson-Hörmander の方法でどこまで attack できるか試みているが不成功である。

参考文献

1. L. Carleson, Interpolation by bounded analytic functions and the corona theorem, Ann. of Math. 76 (1962), 547-559.
2. L. Carleson, The corona theorem, Lecture Notes in Math. 118 (1968), 121-132.
3. T.W. Gamelin, Wolff's proof of the corona theorem, Israel J. Math. 37 (1980), 113-119.
4. L. Hörmander, Generators for some rings of analytic functions, Bull.Amer. Math. Soc. 73(1967), 943-949.
5. L. Hörmander, L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions, Math. Scand. 20 (1967), 65-78.
6. N. Varopoulos, BMO functions and the $\bar{\partial}$-equation, Pacific J. Math. 71 (1977), 221-273.
7. P. Koosis, Introduction to H^p spaces, Lec. Notes Ser. 40, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press, 1980.
8. A. Uchiyama, Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions, to appear.