数理解析研究所講究録
第 453 巻 1982 年 197-210

激しい振動積分 $\int_{-1}^{1} e^{i\omega t} f(t)\,dt$ の求積法

名大 工学部　長谷川武光
鳥居 達生

1. はじめに

有限フーリエ積分

$$I = \int_a^l f(x)\cos\omega x\,dx \quad \left(\text{または} \int_a^l f(x)\sin\omega x\,dx\right), \quad (1)$$

の近似値を求める問題は，工学や物理でしばしば生ずる．振動数ωの値が大きいとき，被積分関数が激しく振動するので通常の数値積分法ではこの問題は扱えない．特別の手法が必要となる．関数$f(x)$が滑らかと仮定すると，$f(x)$のチェビシェフ展開は収束が速いので，これを項別積分することが能率的な自動積分法を作る一つの手段となる．ところで，チェビシェフ展開を項別積分する際に必要な重み係数 $C_{2n}=\int_{-1}^{1} T_{2n}(x)\cos\omega x\,dx$（または $S_{2n+1}=\int_{-1}^{1} T_{2n+1}(x)\sin\omega x\,dx$，ここで$T_n(x)$は$n$次のチェビシェフ多項式）を漸化式に従って計算しようとすると，丸め誤差が急速に増大して不安定になる(

3項漸化式の最小解の不安定性）．十分大きい整数Mに対して $C_{2M}=C_{2(M+1)}=0$ とおいて漸化式を逆向きに計算すれば安定であることが知られている（Miller[1] の算法）．しかし，要求精度εに対して M(ε) を決定することが従来困難であったため，この手法は自動積分法に使えなかった．

本論文では，この困難を克服し自動的に M(ε) を決定すると共に，通常行われるFFTを用いて倍々と項数を増してチェビシェフ展開する方法の代りに，$\sqrt{2}$ 倍的に項数を増すことによって，要求精度εに対してできるだけ無駄な標本点数を少なくした能率的な自動積分法を示す．

2．$\sqrt{2}$ 倍的に項数を増すチェビシェフ展開

変数変換により積分区間 [a, b] を [−1, 1] に移すと (1)は

$$I=\alpha\left[\int_{-1}^{1}F(t)\cos\xi t\,dt\cos\eta-\int_{-1}^{1}F(t)\sin\xi t\,dt\sin\eta\right],\quad(2)$$

となる．ここで，$F(t)=f(\alpha t+\beta)$，$\alpha=(b-a)/2$，$\beta=(b+a)/2$，$\xi=\alpha\omega$，$\eta=\beta\omega$ である．$N=2^n$，$n=1,2,\cdots$，とおき $F(t)$ をチェビシェフ展開すると

$$F(t)\cong\frac{1}{2}a_0^N+a_1^NT_1(t)+\cdots+a_{N-1}^NT_{N-1}(t)+\frac{1}{2}a_N^NT_N(t)=\sum_{n=0}^{N}{}''a_n^NT_n(t).\quad(3)$$

もし $f(x)$ が，すなわち $F(t)$ が滑らかならば，a_n^N は n と共

に急速に0に収束する．係数 a_n^N は，クレンショー・カーチス[2)] が用いた分点，すなわち $T_{N+1}(t)-T_{N-1}(t)=0$ の根 $t_j=\cos\pi j/N$, $j=0,1,2,\cdots,N$, 上でチェビシェフ展開が $F(t)$ の補間式となるように決定される．

$$F(t_j)=\sum_{n=0}^{N}{}'' a_n^N T_n(t_j) \quad , \quad 0\leqq j\leqq N \quad , \quad (4)$$

したがって

$$a_n^N=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N}{}'' F(t_j)T_n(t_j)=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N}{}'' F(\cos\frac{\pi j}{N})\cos\frac{\pi nj}{N}. \quad (5)$$

式(5)の右辺が与えられたとして，次に $T_{N/2}(t)-\cos\pi/4=0$ の $N/2$ 個の根 $u_j=\cos\theta_j$, $\theta_j=4\pi(j+1/8)/N$, $0\leqq j<N/2$, を標本点として追加して $N+N/2$ 項のチェビシェフ展開をする．

$$F(t)\cong\sum_{n=0}^{N}{}'' a_n^N T_n(t)+\sum_{n=1}^{N/2} b_n\left[T_{N-n}(t)-T_{N+n}(t)\right]. \quad (6)$$

ここで $N/2$ 個の係数 b_n は新しい標本点 u_j, $0\leqq j<N/2$ 上で(6)の右辺が $F(t)$ の補間式となるように決定される．すなわち

$$F(u_j)=\sum_{n=0}^{N}{}'' a_n^N T_n(u_j)+\sum_{n=1}^{N/2} b_n\left[T_{N-n}(u_j)-T_{N+n}(u_j)\right], \quad 0\leqq j<N/2 \quad , \quad (7)$$

が成り立つように b_n を決定する． もし $F(u_j)=\sum_{n=0}^{N/2-1}{}' c_n T_n(u_j)$ と展開すると，係数 b_n はこの c_n を用いて次のように表わ

される.

$$b_n = [\sqrt{2}(C_{N/2-n} - a^N_{N/2-n}) + C_n - a^N_n - a^N_{N-n}]/2, \quad 1 \leqq n < \frac{N}{2},$$

$$b_{N/2} = [(C_0 - a^N_0)/\sqrt{2} - a_{N/2}]/2. \tag{8}$$

ここで C_n は $N/2$ 項FFTによる係数 γ_n

$$\gamma_n = \frac{N}{2} \sum_{j=0}^{N/2-1} F(\cos\theta_j)\, e^{-in\theta_j}, \tag{9}$$

から簡単に求められる.

さらに $T_{N/2}(t) + \cos\pi/4 = 0$ の $N/2$ 個の根 $v_j = \cos\psi_j$, $\psi_j = 4\pi(j + 5/8)/N$, $0 \leqq j < N/2$, を標本点として追加すると $2N$ 項のチェビシェフ展開

$$F(t) \cong \sum_{n=0}^{2N}{}'' a^{2N}_n T_n(t), \tag{10}$$

が得られる. ここで, 用いられた全体の標本点は $T_{2N+1}(t) - T_{2N-1}(t) = 0$ の $2N+1$ 個の根となる. これは次の事実による.

$$T_{2N+1}(t) - T_{2N-1}(t) = (T_{N+1}(t) - T_{N-1}(t)) \times (T_{N/2}(t) - \cos\pi/4)(T_{N/2}(t) + \cos\pi/4).$$

いま，B_n，　$0 \leqq n < N$，を

$$B_n = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F(\cos \pi (j+1/2)/N) \cos \pi n (j+1/2)/N, \tag{11}$$

によって定義すると，(10)の係数 a_n^{2N} は

$$a_n^{2N} = (a_n^N + B_n)/2 \quad , \quad 0 \leqq n \leqq N,$$

$$a_{2N-n}^{2N} = (a_n^N - B_n)/2 \quad , \quad 0 \leqq n < N, \tag{12}$$

によって与えられる．ここで(11)の B_n は $N/2$ 項のFFT γ_n と次の $N/2$ 項のFFT δ_n

$$\delta_n = \frac{N}{2}\sum_{j=0}^{N/2-1} F(\cos \psi_j)\, e^{-in\psi_j}, \tag{13}$$

から容易に計算される．以上の方法をくり返すことにより，項数が 3, 5, 7, …, 2^n+1, $3 \cdot 2^{n-1}+1$, $2^{n+1}+1$, …，と$\sqrt{2}$倍的に増すチェビシェフ展開が得られる．

さて N 項チェビシェフ展開 $\sum_{n=0}^{N}{}'' a_n^N T_n(t)$ を(2)の右辺の $F(t)$ に代入すると I の近似値 I_N は

$$I_N = \alpha \left[\sum_{n=0}^{N/2}{}'' a_{2n}^N C_{2n} \cos \eta - \sum_{n=0}^{N/2-1} a_{2n+1}^N S_{2n+1} \sin \eta \right], \tag{14}$$

が得られる．ここで重み係数 C_{2n}，S_{2n+1} は

$$C_{2n} = \int_{-1}^{1} T_{2n}(t) \cos\xi t \, dt \,,$$
$$S_{2n+1} = \int_{-1}^{1} T_{2n+1}(t) \sin\xi t \, dt \,, \tag{15}$$

によって定義される．$N+N/2$ 項のチェビシェフ展開（6）を用いた場合

$$I_{N+N/2} = I_N + \sum_{n=1}^{N/4} b_{2n}(C_{N-2n} - C_{N+2n}) \cos\eta$$
$$+ \sum_{n=0}^{N/4-1} b_{2n+1}(S_{N-2n-1} - S_{N+2n+1}) \sin\eta \,, \tag{16}$$

となる．

次に積分の近似値（15），（16）の打ち切り誤差について述べる．I_N の打ち切り誤差は，N 項チェビシェフ展開の終りの 2 項を用いて

$$|I - I_N| \sim 2\alpha \left[|a_N||C_N||\cos\eta| + |a_{N-1}||S_{N-1}||\sin\eta| \right], \tag{17}$$

で推定する．ここで $|C_N|$，$|S_{N-1}|$ を次のように近似する．

$$|C_N| \sim |S_{N-1}| \sim 1 \quad , \quad N < 2\xi$$
$$|C_N| \sim 2|\cos\xi|/N^2, \quad |S_{N-1}| \sim 2|\sin\xi|/N^2, \quad N > 2\xi$$

$I_{N+N/2}$ の打ち切り誤差の推定は

$$|I-I_{N+N/2}| \sim 7\alpha\left[|a_{N+N/2}||C_{N+N/2}||\cos\eta| + |a_{N+\frac{N}{2}-1}||S_{N+\frac{N}{2}-1}| \times |\sin\eta|\right] . \quad (18)$$

用いられた標本点が通常のクレンショー、カーチスの分点でないことによって誤差が大きくなっている．この(17)(または(18))の誤差推定を用いて，要求精度 ε に対して

$$|I-I_N| < \varepsilon \quad (\text{または} |I-I_{N+N/2}| < \varepsilon)$$

を満足するNまでチェビシェフ展開を進める．

3．重み係数 C_{2n}，S_{2n+1} の計算法

ここでは，ε の精度で(15)で定義された重み係数 C_{2n}，S_{2n+1} を能率的に求める方法について述べる．さて C_{2n} は次の非同次3項漸化式

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_{n+1} = e_n \quad , \quad (19)$$

を満足する．ここで

$$a_n = (2n+1)(n+1)\xi^2, \quad b_n = 4(n^2-1)(8n^2-\xi^2-2),$$

$$c_n = (2n-1)(n-1)\xi^2 \quad , \quad e_n = 12\xi\sin\xi - 16(n^2-1)\cos\xi .$$

S_{2n+1} も類似の漸化式を満足する. n が, $0 \leqq n \leqq [\xi/2]$, の場合には $a_n + c_n > b_n > 0$ であり, 安定に順方向に漸化式 (19) を計算することができるが, $[\xi/2] < n$ なる n に対しては $a_n + c_n < b_n$ となり順方向の漸化式 (19) の計算が不安定となる. これは次の理由による. 漸化式 (19) は 2つの基本解 f_n, g_n と特解 p_n とをもち, 一般解は A, B を任意定数として

$$y_n = Af_n + Bg_n + p_n \quad , \qquad (20)$$

と表わされる. ここで基本解 f_n, g_n と特解 p_n は $n \to \infty$ で漸近的に

$$f_n \sim 2\pi n(4n/e\xi)^{2n} = O((n!)^2) \to \infty \quad ,$$

$$g_n \sim 1/[2\pi n(4n/e\xi)^{2n}] = O((n!)^{-2}) \to 0 \quad ,$$

$$p_n \sim -\cos\xi/(2n^2) = O(n^{-2}) \to 0 \quad ,$$

となる. すなわち

$$g_n/f_n \to 0, \qquad p_n/f_n \to 0 \quad , \qquad n \to \infty$$

ところで，Bg_n+p_n のタイプの解は漸化式 (19) の最小解と呼ばれるが，求めるべき c_{2n} は (19) のこの最小解になっている．有限桁演算で $n>[\xi/2]$ なる n に対して漸化式に従って最小解を求めようとすると，f_n の影響で丸め誤差が急速に増大して不安定になる．

さて，最小解は $n\to\infty$ で 0 に収束するから，Mを十分大きい正の整数とし，$y_M=0$ とおいて漸化式を逆方向に計算すれば安定である（Miller の算法[1]）．ところが要求精度εに対して$M(\varepsilon)$を決定することが従来困難であった．以下では $M(\varepsilon)$ を自動的に決定する方法について述べる．いま $m=[\xi/2]$とおき，c_0, c_2, c_4 を初期値として漸化式 (19) を順方向に計算することにより順に c_{2n}, $3\leq n\leq m$, が安定に求められる．ここで問題を $c_{2(m+1)}$, $c_{2(m+2)}$, …, $c_{2(m+N)}$ をεの精度で求めることとする．漸化式により安定に得られた c_{2m} を用いて $n>m$ なる n に対して漸化式 (19) を次の連立方程式を解く問題におきかえる．

$$A^M y^M = e^M \quad , \qquad (21)$$

ここで $M>N$ として

$$y^M=[y_1^M, y_2^M, \ldots, y_{M-1}^M]^T ,$$

$$\mathbf{e}^M = [e_1 - a_1 C_{2m},\ e_2,\ e_3,\ \cdots,\ e_{M-1}]^T,$$

$$A^M = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & c_{M-2} \\ 0 & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} . \tag{22}$$

ただし，(22)において a_i，$1 \leqq i < M$，は(19)における a_{i+m} を意味する．さらに b_i，c_i，e_i も同様である．すると y_i^M $1 \leqq i \leqq N$ は $C_{2(i+m)}$ の近似値となる．ここで A^M は対角優位 $0 < a_k + c_k < b_k$ である．$M(\varepsilon)$ を決定するために $A^M = L^M U^M$ とLU分解する．

$$L^M = \begin{bmatrix} l_1 & & & 0 \\ a_2 & l_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_{M-1} & l_{M-1} \end{bmatrix}, \quad U^M = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & 0 \\ & 1 & \gamma_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \gamma_{M-2} \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

成分 l_i，γ_i は次の漸化式

$$l_1 = b_1,$$
$$\gamma_{k-1} = c_{k-1}/l_{k-1},$$
$$l_k = b_k - a_k \gamma_{k-1}, \quad k = 2, 3, \cdots, M-1,$$

により順に求められる．　すると(21)を解く問題は

$$L^M x^M = e^M \qquad , \qquad (24)$$

を順代入によって解いて得られたベクトル x^M を次の式

$$U^M y^M = x^M \qquad , \qquad (25)$$

の右辺に用いて，逆代入により y^M を解く問題におきかわる．
いまこのLU分解成分を用いて，順代入により(24)と
$U^{MT} w^L = u^L$ を解く．　ここで u^L は $u_i = 0$，$i \neq L$，
$u_L = 1$ となる単位ベクトルである．具体的にこの2つの
順代入を書くと

$$\begin{aligned}
x_1 &= e_1 - a_0 c_{2m} \\
x_k &= (e_k - a_k x_{k-1})/l_k, \qquad k=2,3,\cdots,M-1, \\
w_L^L &= 1, \\
w_k^L &= -w_{k-1}^L r_{k-1}, \qquad k=L+1, L+2, \cdots, M-1. \qquad (26)
\end{aligned}$$

すると

$$y_L^M = w^{LT} \cdot x^M = \sum_{k=L+1}^{M-1} w_k^L x_k \qquad , \qquad (27)$$

したがって

$$y_L^{M+1} - y_L^{M} = w_M^L x_M \quad , \qquad (28)$$

となる．　よって

$$\max_{1 \leq L \leq N} | w_M^L x_M | < \varepsilon \quad , \qquad (29)$$

を満足するMが求める$M(\varepsilon)$となる．行列A^Mが対角優位であることからw_M^LがLについて増加関数となることが容易に証明されるので，判定(29)は

$$| w_M^N x_M | < \varepsilon \quad , \qquad (30)$$

でおきかわる．　条件(30)を満足するように$M(\varepsilon)$が決定されたら，逆代入により(25)を解くと$y_1^M, y_2^M, \cdots, y_N^M$が$\varepsilon$の精度で求める$C_{2(m+1)}, C_{2(m+2)}, \cdots, C_{2(m+N)}$の近似値となる．

4．数値例

パラメータαを3通りに変えて，次の積分

$$\int_0^1 \frac{\cos 2\pi\omega t}{1-2\alpha\cos\pi t+\alpha^2} dt = \frac{\alpha^{2\omega}}{1-\alpha^2}$$

に対して本方法とPiessens等[3)]の方法の結果との比較を表

1に示す．Piessens等の方法は適応型の手法を用いている．αが1に近い程積分が難かしい．表1からわかるように，3通りのαの全ての値に対して本方法はPiessens等の方法より良い結果を与えている．使用した計算機はFACOM M-200であり，倍精度演算を用いた．

表1 $\int_0^1 \cos 2\pi\omega x/(1-2\alpha\cos\pi x+\alpha^2)\,dx$ に対する標本数と時間

		$\varepsilon_a=10^{-5}$		$\varepsilon_a=10^{-9}$	
α	ω	本方法	Piessens et al	本方法	Piessens et al
0.9	16	65 (2)	117 (3)	129 (5)	221 (6)
	32	65 (2)	117 (3)	129 (4)	195 (5)
	64	65 (2)	143 (4)	129 (4)	195 (5)
0.95	16	129 (4)	143 (4)	129 (4)	273 (8)
	32	129 (5)	143 (5)	193 (7)	273 (7)
	64	129 (5)	143 (3)	193 (7)	273 (7)
	128	129 (5)	169 (5)	193 (7)	273 (7)
0.98	16	129 (4)	195 (6)	257 (9)	403 (12)
	32	193 (7)	195 (6)	257 (9)	377 (11)
	64	193 (7)	195 (5)	257 (9)	325 (9)
	128	193 (7)	195 (5)	257 (9)	325 (9)

( )内は時間，単位はミリ秒，FACOM M-200を使用した

参 考 文 献

1) British Association for the Advancement of Science; Bessel functions, PartII. Mathematical Tables, Vol.10. Cambridge University Press, Cambridge (1952).

2) Clenshaw,C.W. and Curtis,A.R.; A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer. Numer.Math., Vol.2, pp.197-205 (1960).

3) Piessens,R. and Branders,M.; Computation of Oscillating Integrals. J.Comp.Appl.Math. Vol.1, No.3, pp.153-164 (1975).