数理解析研究所講究録
第 453 巻 1982 年 240-264

6個の関数計算による実質的6次のRunge-Kutta法

都立農芸高校　小野令美
千葉大工学部　戸田英雄

1. 問題 1階常微分方程式

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

の6段Kutta型公式

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h,\ y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 2, \cdots, 6$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{6} \mu_i k_i$$

で，公式の変形と f_x, f_y を用いることにより，6次の公式（極限公式と呼ぶ）を導く．さらに，この f_x, f_y を用いて求めた値の精度はあまり要らないということから，f_x, f_y を用いない，6個の関数計算だけによる公式で，

$$O(h^6)\text{の誤差項} \ll O(h^7)\text{の誤差項}$$

となり，丸めの誤差に関しても心配のない，6段で実質的に6次の公式を導く．

2. 公式の位置づけ Luther, Konen[2] の仮定

$$\sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} \alpha_j = \alpha_i^2/2, \quad i = 3, \cdots, 6 \tag{2.1}$$

のもとでの公式である．Cassity[4)] による分類でいえば

$$\mu_2=0\,,\quad \sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j=\alpha_i^2/2$$

の場合にあたる．

3．Kuttaの条件式

3次の条件式は

$$\sum_{i=2}^{6}\mu_i\alpha_i^2=1/3 \tag{3·1}$$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\Big(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\Big)=1/6 \tag{3·2}$$

である．(3·2)に仮定(2·1)を代入すると，(3·1)から

$$\mu_2\alpha_2^2=0 \tag{3·3}$$

となる．5次までの条件式に，(3·3)と仮定(2·1)を代入して整頓すると次の12式となる：

1次　$\sum_{i=1}^{6}\mu_i=1\,,$

2次　$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i=1/2\,,$

3次　$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^2=1/3\,,$

4次　$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^3=1/4\,,$

$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\Big(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\Big)=1/12\,,$

$\sum_{i=4}^{6}\mu_i\Big(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\Big)=1/12\,,$

5次　$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^4=1/5\,,$

$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i\Big(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\Big)=1/15\,,$

$\sum_{i=4}^{6}\mu_i\Big(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\Big(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k^2\Big)\Big)=1/60\,,$

$\sum_{i=4}^{6}\mu_i\Big(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2(\alpha_i+\alpha_j)\Big)=7/60\,,$

$$\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^3\right)=1/20,$$
$$\sum_{i=5}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=4}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=3}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k^2\right)\right)=1/60.$$

この 12 式と (3・3), 仮定 (2・1) の 4 式, および Kutta の条件式が関数 f に無関係になりたつための条件

$$\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}=\alpha_i, \qquad i=2,\cdots,6 \tag{3・4}$$

の 5 式, 計 22 式がなりたつように, パラメタ α_i, $(i=2,\cdots,6)$, μ_i, $(i=1,\cdots,6)$, β_{ij}, $(i=2,\cdots,6,\ j=1,\cdots,i-1)$ の計 26 個を定めればよい.

4. Kutta の条件式の解

(3・3) で $\alpha_2\neq 0$ を仮定すると,

$$\mu_2=0 \tag{4・1}$$

が得られる. 2次から5次までの条件式は, もとの Kutta の条件式と, 条件 (2・1) を適当に組み合わせると, 次の4組の連立方程式となる:

$$\begin{pmatrix}\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6\\ \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2 & \alpha_6^2\\ \alpha_3^3 & \alpha_4^3 & \alpha_5^3 & \alpha_6^3\\ \alpha_3^4 & \alpha_4^4 & \alpha_5^4 & \alpha_6^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_3\\ \mu_4\\ \mu_5\\ \mu_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix} \tag{4・2}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\\ \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2\\ \alpha_3^3 & \alpha_4^3 & \alpha_5^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_4\beta_{43}+\mu_5\beta_{53}+\mu_6\beta_{63}\\ \mu_5\beta_{54}+\mu_6\beta_{64}\\ \mu_6\beta_{65}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{12}\\ \frac{1}{20}\end{pmatrix} \tag{4・3}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_3^2 & \alpha_4^2 & \alpha_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_4\alpha_4\beta_{43}+\mu_5\alpha_5\beta_{53}+\mu_6\alpha_6\beta_{63} \\ \mu_5\alpha_5\beta_{54}+\mu_6\alpha_6\beta_{64} \\ \mu_6\alpha_6\beta_{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{15} \end{bmatrix} \qquad (4\cdot 4)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{43}\alpha_3 & \beta_{53}\alpha_3+\beta_{54}\alpha_4 \\ \beta_{43}\alpha_3^2 & \beta_{53}\alpha_3^2+\beta_{54}\alpha_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_5\beta_{54}+\mu_6\beta_{64} \\ \mu_6\beta_{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} \\ \frac{1}{60} \end{bmatrix} \qquad (4\cdot 5)$$

これらから解がつぎのように求められる.

(4·2) から $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ のとき,

$$\mu_i = \frac{-g_i}{60\alpha_i \prod_{j=3, \neq i}^{6} (\alpha_i - \alpha_j)}, \qquad i = 3, \cdots, 6 \qquad (4\cdot 6)$$

ただし

$$g_i = 30\alpha_l\alpha_m\alpha_n - 20(\alpha_l\alpha_m + \alpha_m\alpha_n + \alpha_n\alpha_l) + 15(\alpha_l+\alpha_m+\alpha_n) - 12,$$

$$l, m, n = 3, \cdots, 6; \neq i.$$

(4·3), (4·4) から

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{65} &= -\frac{\alpha_6(\alpha_6-\alpha_5)(\alpha_6-\alpha_4)(\alpha_6-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4 - 5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}{\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)g_6} \\ \beta_{64} &= -\frac{\alpha_6(\alpha_6-\alpha_4)(\alpha_6-\alpha_3)}{2\alpha_4(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3)g_6} \times \{(-20\alpha_3\alpha_4+10(\alpha_3+\alpha_4)-6)\alpha_6 \\ &\qquad + 20\alpha_3\alpha_5^2 - 10\alpha_5^2 + 14\alpha_5 - 25\alpha_3\alpha_5 + 15\alpha_3\alpha_4 - 8\alpha_4\} \end{aligned} \right. \qquad (4\cdot 7)$$

$$\beta_{54} = -\frac{\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)(20\alpha_3\alpha_6 - 15\alpha_3 - 10\alpha_6 + 8)}{2\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)g_5} \qquad (4\cdot 8)$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mu_4\beta_{43}+\mu_5\beta_{53}+\mu_6\beta_{63}=\frac{10\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_4+\alpha_5)+3}{60\alpha_3(\alpha_5-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)} \\
&\mu_4\alpha_4\beta_{43}+\mu_5\alpha_5\beta_{53}+\mu_6\alpha_6\beta_{63}=\frac{(\alpha_5-\alpha_3)(15\alpha_4-8)+20\alpha_6(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}{120\alpha_3(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_5-\alpha_3)} .
\end{aligned}
\right. \tag{4·9}
$$

(4·7), (4·8)は(4·5)も満足しなければならないことから，条件

$$(1-\alpha_6)(10\alpha_3^2\alpha_4-8\alpha_3\alpha_4-\alpha_3+2\alpha_4)=0 \tag{4·10}$$

が得られる．μ_1は1次の条件式から定まる．$(\beta_{43},\beta_{53},\beta_{63})$は(4·9)から1個を自由なパラメタとして定まるので，$\beta_{i2},(i=3,\cdots,6)$は(2·1)から，$\beta_{i1},(i=2,\cdots,6)$は(3·4)から定まる．$(\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6)$のうち1個は(4·10)から定まる．従って自由なパラメタはα_2, α_5とβ_{i3}のうち1個と，$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6$のうちの2個の，合計5個である．

5. f_x, f_yを用いる6次の公式（極限公式）

5.1 α_iだけで表わされる6次の誤差項の係数

15項ある6次の誤差項のうちの7項で，α_iを用いて

$$
\begin{aligned}
\delta_{61}&=\left\{\textstyle\sum_{i=2}^{6}\mu_i\alpha_i^5-1/6\right\}/120\\
&=-\frac{1}{7200}\Big\{(30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-12)\alpha_6\\
&\qquad -(20\alpha_3\alpha_4\alpha_5-15(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+12(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-10\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{62}&=\left\{\textstyle\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^4\right)-1/30\right\}/24\\
&=\frac{1}{1440}\left\{10\alpha_3\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+3(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{63}&=\left\{\textstyle\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k^3\right)\right)-1/120\right\}/6\\
&=-\frac{1}{720}\Big\{(20\alpha_3\alpha_4\qquad-10\alpha_4)\alpha_6\\
&\qquad -(15\alpha_3\alpha_4+2\alpha_3-8\alpha_4\quad-1)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\delta_{66}=\{\textstyle\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^3)-1/24\}/6$$

$$=\frac{1}{720}\{(20\alpha_3\alpha_4-10(\alpha_3+\alpha_4)+6)\alpha_6$$

$$-(15\alpha_3\alpha_4-8(\alpha_3+\alpha_4)+5)\quad\}$$

$$\delta_{69}=\{\textstyle\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^3(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j)-1/12\}/6=\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^5-1/6\}/12=10\delta_{61}$$

$$\delta_{614}=\{\textstyle\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j)^2-1/24\}/2=\{\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^5-1/6\}/8=15\delta_{61}$$

$$\delta_{615}=\textstyle\sum_{i=4}^{6}\mu_i\alpha_i(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k))-1/48$$

$$=\{\textstyle\sum_{i=4}^{6}\mu_i\alpha_i(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^3)-1/24\}/2$$

$$=\frac{1}{240}\{(20\alpha_3\alpha_4-10(\alpha_3+\alpha_4)+6)\alpha_6$$

$$-(15\alpha_3\alpha_4-8(\alpha_3+\alpha_4)+5)\quad\}=3\delta_{66}$$

と表わされる．条件(4・10)をみたすように $\alpha_6=1$ にとると，

$$\delta_{61}=-\frac{1}{5}\delta_{62}=\frac{1}{10}\delta_{69}=\frac{1}{15}\delta_{614}$$

$$=-\frac{1}{7200}\{10\alpha_3\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+3(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-2\}\qquad(5\cdot1)$$

$$\delta_{63}=-\delta_{66}=\frac{1}{3}\delta_{615}$$

$$=-\frac{1}{720}\{5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1\}\qquad(5\cdot2)$$

となる．そこで，$\alpha_6=1$ のとき (5・2) が 0 となるように，

$$5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1=0\qquad(5\cdot3)$$

とする．すると (5・1) の { } の中は

$$10\alpha_3\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+3(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-2$$

$$=(5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1)(2\alpha_5-1)-(1-\alpha_3-\alpha_4)(1-\alpha_5)$$

と書けるので，これを 0 にするには後の項を 0 にすればよい．

$1-\alpha_3-\alpha_4=0$ にすると β_{54} の分母の因数 g_5 が，$\alpha_6=1$ の時

$$g_5=30\alpha_3\alpha_4\alpha_6-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_6+\alpha_6\alpha_3)+15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6)-12$$
$$=10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3=2(5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1)+1-\alpha_3-\alpha_4=0$$

となるので採用できない．

$1-\alpha_5=0$ にすると，μ_5，μ_6 は分母に $(1-\alpha_5)$ を因数として持つが，$\mu_5+\mu_6$ は分母に因数 $(1-\alpha_5)$ を含まないから，公式の $\mu_5 k_5+\mu_6 k_6$ の部分を

$$\mu_5 k_5+\mu_6 k_6=(\mu_5+\mu_6)k_6+\mu_5(1-\alpha_5)\cdot\frac{k_5-k_6}{1-\alpha_5}$$

と式変形する．そして，$(k_5-k_6)/(1-\alpha_5)$ は Taylor 展開

$$k_5=hf(x_n+\alpha_5 h,\ y_n+\textstyle\sum_{i=1}^{4}\beta_{5i}k_i)$$
$$=hf(\overline{x_n+h}-(1-\alpha_5)h,\ \overline{y_n+\textstyle\sum_{i=1}^{5}\beta_{6i}k_i}+\textstyle\sum_{i=1}^{4}(\beta_{5i}-\beta_{6i})k_i-\beta_{65}k_5)$$
$$=h\Big[f(x_n+h,\ y_n+\textstyle\sum_{i=1}^{5}\beta_{6i}k_i)$$
$$-(1-\alpha_5)hf_x+(1-\alpha_5)\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_{5i}-\beta_{6i}}{1-\alpha_5}k_i-\frac{\beta_{65}}{1-\alpha_5}k_5\Big)\cdot f_y\Big]+\cdots$$

の第1項だけで近似して

$$\frac{k_5-k_6}{1-\alpha_5}\fallingdotseq -h^2 f_x+h\Big(\sum_{i=1}^{4}\frac{\beta_{5i}-\beta_{6i}}{1-\alpha_5}k_i-\frac{\beta_{65}}{1-\alpha_5}k_5\Big)$$

とし，係数はすべて $\alpha_5\to 1$ の極限の値を用いることにすればよい．

このようにして，公式の変形と f_x，f_y を用いることによって，6次の 15 個の誤差項の係数のうち，α_i だけで表わされる 7項は，すべて 0 にすることができる．

5.2 β_{43}を含む式で表わされる6次の誤差項の係数

残りの8項のうち，$\alpha_3, \alpha_4, \beta_{43}$だけで表わされるものは1項で，$\alpha_6=1$のとき，

$$\delta_{65}=\mu_6\beta_{65}\beta_{54}\beta_{53}\beta_{32}\alpha_2-1/720=\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}\right\}$$

となる．

そこで，$\alpha_6=1$のとき，あとの7項を，5・1で 0 とするように決めた因数，$5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1$，$1-\alpha_5$ と，δ_{65}の{ }の因数を含む式の和の形に書くと次のようになる：

$$\delta_{64}=\left\{\sum_{i=5}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=4}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=3}^{j-1}\beta_{jk}\left(\sum_{l=2}^{k-1}\beta_{kl}\alpha_l^2\right)\right)\right)-1/360\right\}/2$$

$$=\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}\right\}-\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

$$\delta_{67}=\left\{\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}(\alpha_i+\alpha_j)\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k^2\right)\right)-1/40\right\}/2$$

$$=\frac{1}{24}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{5}\right\}(1-\alpha_5)-\frac{1}{24}\left\{\frac{\alpha_3(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{2}\right\}\alpha_2(1-\alpha_5)$$

$$-\frac{1}{80}\left\{\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}\right\}+\frac{1}{80}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

$$\delta_{68}=\sum_{i=5}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=4}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=3}^{j-1}\beta_{jk}(\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k)\left(\sum_{l=2}^{k-1}\beta_{kl}\alpha_l\right)\right)\right)-1/60$$

$$=-\frac{1}{240}\left\{5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1\right\}+\frac{1}{24}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{5}\right\}(1-\alpha_5)$$

$$-\frac{1}{80}\left\{\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\delta_{610}=\left\{\textstyle\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}(\alpha_i^2+\alpha_j^2)\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k\right)\right)-2/45\right\}/2$$

$$=\frac{2\alpha_5-1}{240}\left\{5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1\right\}-\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{\alpha_3+\alpha_4}{5}\right\}(1-\alpha_5)$$

$$+\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\delta_{611}=\left\{\textstyle\sum_{i=3}^{6}\mu_i\alpha_i^2\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\right)-1/18\right\}/4$$

$$=-\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_3(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{5}\right\}(1-\alpha_5)+\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{2}\right\}\alpha_2(1-\alpha_5)$$

$$+\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}\right\}-\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

$$\delta_{612}=\left\{\textstyle\sum_{i=3}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j\right)\left(\sum_{j=2}^{i-1}\beta_{ij}\alpha_j^2\right)-1/36\right\}/2=\delta_{611}$$

$$\delta_{613}=\left\{\textstyle\sum_{i=4}^{6}\mu_i\left(\sum_{j=3}^{i-1}\beta_{ij}\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k\right)\left(\sum_{k=2}^{j-1}\beta_{jk}\alpha_k+2\sum_{l=2}^{i-1}\beta_{il}\alpha_l\right)\right)-13/160\right\}/2$$

$$=\frac{2\alpha_5-1}{480}\left\{5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1\right\}-\frac{1}{48}\left\{\frac{\alpha_3^2(1-2\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1+\alpha_3+\alpha_4}{10}\right\}(1-\alpha_5)$$

$$+\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3^2(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-\frac{1}{3}\right\}.$$

そこで δ_{65} の { } の因数を 0 とするように，

$$\beta_{43}=\frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}{3\alpha_3^2(2-5\alpha_3)} \qquad (5.4)$$

にすれば，δ_{65}，δ_{68}，δ_{610}，δ_{613} は 0 となり，残るのは

$$\delta_{64}=-\frac{1}{3}\delta_{67}=\delta_{611}=\delta_{612}$$

$$=-\frac{1}{240}\left\{\frac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1\right\}\alpha_2$$

である．これを 0 にすることを考える．

$\dfrac{\alpha_3(2-5\alpha_3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\beta_{43}-1=0$ にすると (5・4) から $\alpha_3=\frac{1}{3}$，(5・3) から $\alpha_4=1$ となり，$\alpha_6=\alpha_5=1$ なので採用できない．

$\alpha_2=0$ にすると，α_2 は β_{i1}，β_{i2}，$(i=3,\cdots,6)$ の分母の因数であるが，$\beta_{i1}+\beta_{i2}$ の分母には含まれないので，5・1の場合と同様な式変形と f_x，f_y を用い，$\alpha_2\to 0$ の極限で考えればよい．すなわち，

$$\beta_{i1}k_1+\beta_{i2}k_2=(\beta_{i1}+\beta_{i2})k_1+\beta_{i2}\alpha_2\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$$

と式変形し，Taylor 展開

$$\begin{aligned}k_2&=hf(x_n+\alpha_2 h,\ y_n+\beta_{21}k_1)\\&=h\left[f(x_n,y_n)+\alpha_2 hf_x+\beta_{21}k_1f_y+\cdots\right]\end{aligned}$$

の第1項だけで

$$\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}\fallingdotseq h^2(f_x+f\cdot f_y)$$

と近似する．係数は $\alpha_2\to 0$ の極限の値を用いる．

以上が，$\alpha_6=1$ のときの6次の極限公式である．

5．3 極限公式（$O(h^6)$ の誤差項はすべて 0 ）

4個の関数計算と，2個づつの f_x，f_y の計算を含み，係数は $\alpha_2\to 0$，$\alpha_5\to 1$ の極限での値を用いる．自由なパラメタとして，α_3，α_4 のうちの1個が残る．6次の誤差項が 0 になれば，誤差は $O(h^7)$ となるから，残った1個のパラメタは，7次の誤差項の係数の最適化に用いる．

α_3：任意のパラメタ，

$$\alpha_2 = 0\ ,\quad \alpha_4 = \frac{2\alpha_3 - 1}{5\alpha_3 - 2}\ ,\ \alpha_5 = 1\ ,\quad \alpha_6 = 1\ ,\quad \beta_{43} = \frac{\alpha_4(\alpha_4 - \alpha_3)}{3\alpha_3^2(2 - 5\alpha_3)}$$

として，

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2' = h^2\left[f_x(x_n, y_n) + f(x_n, y_n)\cdot f_y(x_n, y_n)\right]$$

$$k_3 = h\ f(x_n + \alpha_3 h,\ y_n + B_{312} k_1 + B_3' k_2')$$

$$k_4 = h\ f(x_n + \alpha_4 h,\ y_n + B_{412} k_1 + B_4' k_2' + \beta_{43} k_3)$$

$$k_5 = h\ f(x_n + h,\ y_n + B_{512} k_1 + B_5' k_2' + \beta_{53} k_3 + \beta_{54} k_4)$$

$$k_5' = h\Big[-h f_x(x_n + h,\ y_{n'}) + f_y(x_n + h,\ y_{n'})$$
$$\times\{B_{5612} k_1 + B_{56} k_2' + B_{563} k_3 + B_{564} k_4 + B_{565} k_5\}\Big]$$

$$y_{n+1} = y_n + \mu_1 k_1 + \mu_3 k_3 + \mu_4 k_4 + M_{56} k_5 + M_5 k_5'\ .$$

ただし，

$$B_{i12} = \lim_{\alpha_2 \to 0}(\beta_{i1} + \beta_{i2})\ ,\quad B_i = \lim_{\alpha_2 \to 0} \beta_{i2}\alpha_2\ ,\ (i = 3, 4, 5)$$

$$B_{5612} = \lim_{\alpha_2 \to 0}\lim_{\alpha_5 \to 1}\left(\frac{\beta_{51} - \beta_{61}}{1 - \alpha_5} + \frac{\beta_{52} - \beta_{62}}{1 - \alpha_5}\right),\quad B_{56} = \lim_{\alpha_2 \to 0}\lim_{\alpha_5 \to 1}\frac{\beta_{52} - \beta_{62}}{1 - \alpha_5}\cdot\alpha_2$$

$$B_{56j} = \lim_{\alpha_5 \to 1}\frac{\beta_{5j} - \beta_{6j}}{1 - \alpha_5},\ (j = 3, 4)\ ,\quad B_{565} = \lim_{\alpha_5 \to 1}\frac{-\beta_{65}}{1 - \alpha_5}\ ,$$

$$y_{n'} = y_n + B_{512} k_1 + B_5 k_2' + \beta_{53} k_3 + \beta_{54} k_4\ ,$$

$$M_{56} = \lim_{\alpha_5 \to 1}(\mu_5 + \mu_6)\ ,\quad M_5 = \lim_{\alpha_5 \to 1}\mu_5(1 - \alpha_5)\ .$$

6．6個の関数計算だけによる実質的に6次の公式

極限公式で用いた k_2'，k_5' の値の精度はあまり要らない．α_2，$1-\alpha_5=\varepsilon$ として $\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$，$\frac{k_5-k_6}{1-\alpha_5}$ を，このまま計算する．ε は，α_2，$1-\alpha_5$ が 0 でないために残る $O(h^6)$ の誤差項の係数が $O(h^7)$ のものと比べて，無視できる程度となるように決める．また，このとき起こる桁落ちによる誤差の見積りも得られ，余程特殊な問題でない限り心配がないことがわかる．

6.1 パラメタの決定と打切り誤差

α_3，α_4 が（5・3）をみたすように，曲線 $5\alpha_3\alpha_4-2(\alpha_3+\alpha_4)+1=0$ 上を動かして $O(h^7)$ の誤差項の係数の変化を調べる．$O(h^7)$ の誤差項 28 項の係数 δ_{7j} が，全部 10^{-3} より小さくなるのは，大体 $0.185<\alpha_3<0.232$ で，$\sqrt{\sum\delta_{7j}^2/28}$ が最小になるのは $\alpha_3\doteqdot 0.2$ である（図-1）．そこで，

$$\alpha_3=\frac{1}{5}\ ,$$

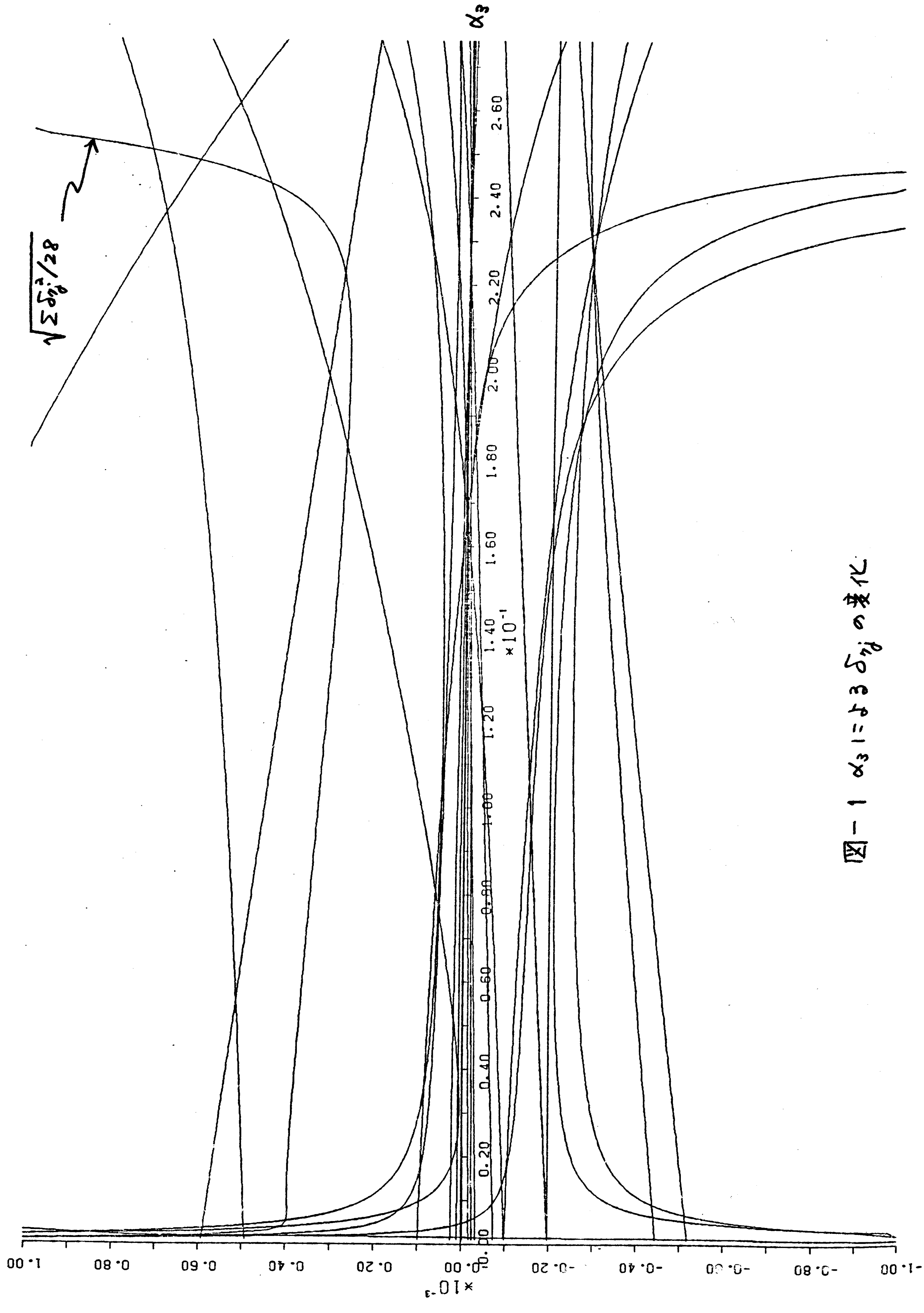
（5・3）から

$$\alpha_4=\frac{3}{5}$$

に決める．

つぎに，ε は，すべての係数の分子，分母が，16進 14 桁以内の整数になるように，

$$\varepsilon=\alpha_2=1-\alpha_5=\frac{1}{2048}$$



図－1　α_3 による δ_{ij} の変化

にする．このときα_iだけで表わされる$O(h^6)$の誤差項の係数は

$$\delta_{63},\ \delta_{66},\ \delta_{6\,15}=0\ ,$$

$$\delta_{614}=15\,\delta_{61}\doteqdot .203_{10}-6\ ,$$

$$\delta_{69}=10\,\delta_{61}\doteqdot .136_{10}-6\ ,$$

$$\delta_{62}=-5\,\delta_{61}\doteqdot -.678_{10}-7\ ,$$

$$\delta_{61}\qquad\qquad\doteqdot .136_{10}-7$$

となる．$\sqrt{\Sigma\delta_{7j}^2/28}\doteqdot .270_{10}-3$ であるから，この程度で十分である．

β_{43}は極限公式と同じに，$\delta_{65}=0$ となるように選べば，$\delta_{68}=0$ となるが，残る6項のうち最大のものは$\delta_{67}\doteqdot .41_{10}-5$となる．そこで$\beta_{43}$を変化させたときの$\delta_{6j}$，($j=4,5,7,8,10,11,12,13$）のようすを調べると，全部がほぼ揃って小さくなり，しかも係数の分子分母が16進14桁以内の整数になるのは

$$\beta_{43}=\frac{2049}{1024}$$

なので，この値に決める（図－2）．誤差は次の通りである．

$$|\delta_{67}|,\ |\delta_{68}|\qquad\doteqdot .204_{10}-5$$

$$|\delta_{64}|,\ |\delta_{65}|,\ |\delta_{611}|,\ |\delta_{612}|\doteqdot .680_{10}-6$$

$$\delta_{613}\qquad\doteqdot .474_{10}-6$$

$$\delta_{610}\qquad\doteqdot .270_{10}-6$$

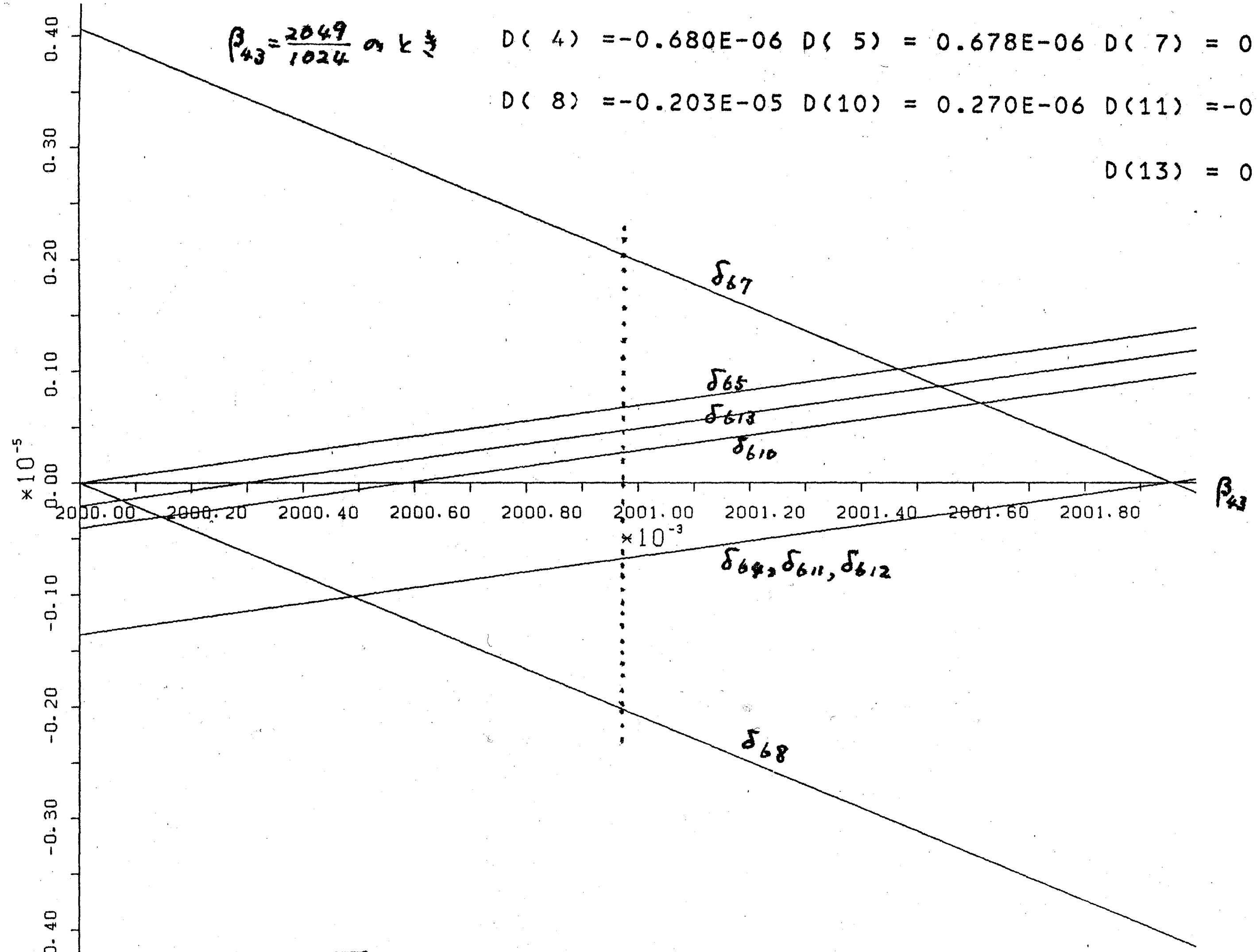


図-2 β_{43} による δ_{6j} の変化

6.2 桁落ちによる誤差

式変形

$$\beta_{i1}k_1+\beta_{i2}k_2=(\beta_{i1}+\beta_{i2})k_1+\beta_{i2}\alpha_2\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$$

$$\mu_5k_5+\mu_6k_6=(\mu_5+\mu_6)k_6+\mu_5(1-\alpha_5)\frac{k_5-k_6}{1-\alpha_5}$$

により，k_2-k_1，k_5-k_6 の計算のところで桁落ちによる精度の減少が起こる．しかし，ここで精度が減っても，全体の精度にはあまり影響しない（つまり k_2-k_1，k_5-k_6 の精度はあまり要らない）ことがつぎのようにしてわかる．

k_3 を求めるとき，f を計算する y 座標を求める式

$$y_n+(\beta_{31}+\beta_{32})k_1+\beta_{32}\alpha_2\cdot\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$$

で，加え合わせる3項のうち，y_n が絶対値最大ならば，m 進法 n 桁演算を行なうとき，和の有効桁数はおよそ

$$\begin{aligned}N_3&=\log_m|y_n|-\log_m\left|\beta_{32}\alpha_2\frac{k_2-k_3}{\alpha_2}\right|+\{n-(\log_m|k_1|-\log_m|k_2-k_1|\}\\&=n-\log_m\beta_{32}\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m\left|\frac{y_n}{k_1}\right|\\&>n-\log_m\beta_{32}\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m\alpha_3\doteqdot n-2.31\ (m=10\text{のとき})\end{aligned}$$

と見積ることができる．また，$(\beta_{31}+\beta_{32})k_1$ が絶対値最大ならば，

$$\begin{aligned}N_3&=\log_m|(\beta_{31}+\beta_{32})k_1|-\log_m\left|\beta_{32}\alpha_2\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}\right|\\&\quad+\{n-(\log_m|k_1|-\log_m|k_2-k_1|\}\\&=n-\log_m\beta_{32}\alpha_2+\log_m\alpha_2+\log_m\alpha_3\doteqdot n-2.31\quad(m=10\text{のとき})\end{aligned}$$

となるから，いずれの場合にも，この計算で失なわれる精度はほぼ10進2.3桁と見積ることができる．fを計算するy座標の後2.3桁のちがいが，fの値にどの位影響するかは，関数fにより異なり一概にいえないが，2.3桁以上のちがいになることはまれであろう．全く同様に考えると，k_4, k_5, k_6のy座標の計算で$n-2.35$，$n-2.44$，$n-2.44$となりy_nの計算では$n-1.69$となる．従って普通の場合には，最悪でも$n-2.44$桁は保証される．

6.3 公式

$\alpha_6=1$のとき変形した公式に必要なパラメタは

$$\mu_1=\frac{30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-10(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+5(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-3}{60\alpha_3\alpha_4\alpha_5},$$

$$\mu_3=\frac{10\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_4+\alpha_5)+3}{60\alpha_3(1-\alpha_3)(\alpha_5-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)},\quad \mu_4=-\frac{10\alpha_3\alpha_5-5(\alpha_3+\alpha_5)+3}{60\alpha_4(1-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)},$$

$$\mu_5+\mu_6=\frac{1}{60\alpha_5(1-\alpha_4)(1-\alpha_3)(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)}\times\Big[(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)(1-\alpha_3-\alpha_4+\alpha_5)$$
$$+(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)\Big\{(30\alpha_3\alpha_4-20(\alpha_3+\alpha_4)+15)\alpha_5+10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3\Big\}\Big],$$

$$\mu_5(1-\alpha_5)=\frac{10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3}{60\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)},$$

$$\beta_{21}=\alpha_2,\quad \beta_{31}+\beta_{32}=\alpha_3,\quad \beta_{32}\alpha_2=\frac{\alpha_3^2}{2},$$

$$\beta_{41}+\beta_{42}=\alpha_4-\beta_{43}\ , \qquad \beta_{42}\alpha_2=\frac{\alpha_4^2}{2}-\alpha_3\beta_{43}\ ,$$

$$\beta_{51}+\beta_{52}=\alpha_5\left\{1-\frac{(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)(5\alpha_3+5\alpha_4-2)}{2\alpha_3\alpha_4(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}-\frac{(\alpha_5-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_5-5(\alpha_3+\alpha_5)+3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}\cdot\beta_{43}\right\},$$

$$\beta_{52}\alpha_2=\frac{-5\alpha_5^2+10\alpha_3\alpha_4\alpha_5+3\alpha_5-5\alpha_3\alpha_4}{2\,(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}-\frac{\alpha_3\alpha_5(\alpha_5-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_5-5(\alpha_3+\alpha_5)+3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}\cdot\beta_{43}\ ,$$

$$\beta_{53}=\alpha_5\left\{\frac{(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)(5\alpha_4-2)}{2\alpha_3(\alpha_4-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}+\frac{(\alpha_5-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_5-5(\alpha_3+\alpha_5)+3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}\cdot\beta_{43}\right\},$$

$$\beta_{54}=\frac{\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_3)(2-5\alpha_3)}{2\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}\ ,$$

$$\beta_{61}+\beta_{62}=1+\frac{(1-\alpha_3)}{\alpha_4\,(30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-12)}$$

$$\times\left\{\frac{(1-\alpha_4)(15\alpha_3+15\alpha_4-8)}{2\alpha_3}+\frac{(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}{\alpha_3\alpha_5}\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_5(1-\alpha_4)(10\alpha_3+10\alpha_4-5)}{\alpha_3}-\frac{10\alpha_3\alpha_5-5(\alpha_3+\alpha_5)+3}{\alpha_4-\alpha_3}\cdot\beta_{43}\right\},$$

$$\beta_{62}\alpha_2=\frac{1}{30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-12}$$

$$\times\left\{\frac{(10\alpha_3\alpha_4-5)\alpha_5-5\alpha_3\alpha_4+3}{2}-\frac{\alpha_3(1-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_5-5(\alpha_3+\alpha_5)+3)}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_3)}\cdot\beta_{43}\right\},$$

$$\beta_{63}=\frac{(1-\alpha_3)}{(\alpha_4-\alpha_3)(30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-12)}$$

$$\times\left\{\frac{(1-\alpha_4)(15\alpha_4-8)}{2\alpha_3}-\frac{(1-\alpha_4)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}{\alpha_3(\alpha_5-\alpha_3)}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_5(1-\alpha_4)(10\alpha_4\alpha_5-5(\alpha_4+\alpha_5)+3)}{\alpha_3(\alpha_5-\alpha_3)}+\frac{10\alpha_3\alpha_5-5(\alpha_3+\alpha_5)+3}{\alpha_4}\cdot\beta_{43}\right\},$$

$$\beta_{64}=\frac{(1-\alpha_4)(1-\alpha_3)\{(-20\alpha_3+10)\alpha_5^2+(25\alpha_3-14)\alpha_5+5\alpha_3\alpha_4-2\alpha_4-10\alpha_3+6\}}{2\alpha_4(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3)(30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-12)},$$

$$\beta_{65}=\frac{-(1-\alpha_5)(1-\alpha_4)(1-\alpha_3)(10\alpha_3\alpha_4-5(\alpha_3+\alpha_4)+3)}{\alpha_5(\alpha_5-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3)(30\alpha_3\alpha_4\alpha_5-20(\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_5+\alpha_5\alpha_3)+15(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-12)},$$

である．そこで，6·1で決めた値を代入すると，パラメタと公式はつぎのようになる．

公式

$$k_1=h\,f(x_n,y_n)$$

$$k_2=h\,f(x_n+\alpha_2h,\ y_n+\beta_{21}k_1)$$

$$k_3=h\,f(x_n+\alpha_3h,\ y_n+(\beta_{31}+\beta_{32})k_1+\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}$$

$$k_4=h\,f(x_n+\alpha_4h,\ y_n+(\beta_{41}+\beta_{42})k_1+\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}+\beta_{43}k_3)$$

$$k_5=h\,f(x_n+\alpha_5h,\ y_n+(\beta_{51}+\beta_{52})k_1+\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}+\beta_{53}k_3+\beta_{54}k_4)$$

$$k_6=h\,f(x_n+h,\ y_n+(\beta_{61}+\beta_{62})k_1+\frac{k_2-k_1}{\alpha_2}+\beta_{63}k_3+\beta_{64}k_4+\beta_{65}k_5)$$

$$y_{n+1}=y_n+\mu_1k_1+\mu_3k_3+\mu_4k_4+(\mu_5+\mu_6)k_6+\mu_5(1-\alpha_5)\frac{k_5-k_6}{1-\alpha_5}$$

ここで，

$$\alpha_2=\frac{1}{2048},\qquad \alpha_3=\frac{1}{5},\qquad \alpha_4=\frac{3}{5},\qquad \alpha_5=\frac{2047}{2048},$$

$$\mu_1=\frac{4093}{73692},\qquad \mu_3=\frac{2\ 55875}{7\ 85952},\qquad \mu_4=\frac{2\ 55625}{5\ 89104},$$

$$\mu_5+\mu_6=\frac{121\ 74695\ 54363}{658\ 17797\ 56704},\qquad \mu_5(1-\alpha_5)=\frac{21474\ 83648}{20\ 56806\ 17397},$$

$$\beta_{21}=\alpha_2,\quad \beta_{31}+\beta_{32}=\frac{1}{5},\quad \beta_{32}\alpha_2=\frac{1}{50},$$

$$\beta_{41}+\beta_{42}=-\frac{7173}{5120},\quad \beta_{42}\alpha_2=-\frac{5637}{25600},\quad \beta_{43}=\frac{2049}{1024},$$

$$\beta_{51}+\beta_{52}=\frac{36875\ 44391\ 63779}{1759\ 21860\ 44416},\quad \beta_{52}\alpha_2=\frac{5561\ 97902\ 16167}{1759\ 21860\ 44416},$$

$$\beta_{53}=-\frac{40967\ 55520\ 02435}{1759\ 21860\ 44416},\quad \beta_{54}=\frac{11\ 42670\ 09665}{3\ 43597\ 38368},$$

$$\beta_{61}+\beta_{62}=\frac{13\ 51089\ 25003}{63984\ 30720},\quad \beta_{62}\alpha_2=\frac{33\ 18523}{10\ 41920},$$

$$\beta_{63}=-\frac{4\ 00269\ 25081}{17060\ 39808},\quad \beta_{64}=\frac{167\ 15836}{49\ 95111},$$

$$\beta_{65}=-\frac{6\ 87194\ 76736}{13952\ 00188\ 00965}$$

である．これらの値を倍精度実数にしたものを表-1に示す．

7. 誤差と公式の評価

$O(h^6)$と$O(h^7)$の誤差項の係数はつぎのようになる．

$O(h^6)$の誤差項の係数：

$$\delta_{61}=.136_{10}-7,\qquad \delta_{62}=-5\delta_{61}=-.678_{10}-7,$$

$$\delta_{63}=\delta_{66}=\delta_{615}=0,\qquad \delta_{64}=-.680_{10}-6,$$

$$\delta_{65}=.678_{10}-6,\qquad \delta_{67}=.204_{10}-5,$$

$$\delta_{68}=-.203_{10}-5,\qquad \delta_{69}=10\delta_{61}=.136_{10}-6,$$

$$\delta_{610}=.270_{10}-6,\qquad \delta_{611}=\delta_{612}=-.678_{10}-6,$$

$$\delta_{613}=.474_{10}-6,\qquad \delta_{614}=15\delta_{61}=.203_{10}-6.$$

$O(h^7)$ の誤差項の係数：

$\delta_{71}= -.256_{10}-6$,　$\delta_{72}= .155_{10}-5$,　$\delta_{73}= -.397_{10}-5$,　$\delta_{74}= -.106_{10}-3$,

$\delta_{75}= -.198_{10}-3$,　$\delta_{76}= -.198_{10}-3$,　$\delta_{77}= .390_{10}-5$,　$\delta_{78}= .317_{10}-3$,

$\delta_{79}= .631_{10}-3$,　$\delta_{710}= .319_{10}-3$,　$\delta_{711}= -.384_{10}-5$,　$\delta_{712}= .294_{10}-4$,

$\delta_{713}= -.264_{10}-3$,　$\delta_{714}= .126_{10}-4$,　$\delta_{715}= -.236_{10}-3$,　$\delta_{716}= -.106_{10}-3$,

$\delta_{717}= -.293_{10}-3$,　$\delta_{718}= -.106_{10}-3$,　$\delta_{719}= .379_{10}-4$,　$\delta_{720}= -.315_{10}-3$,

$\delta_{721}= -.377_{10}-4$,　$\delta_{722}= .909_{10}-3$,　$\delta_{723}= -.115_{10}-4$,　$\delta_{724}= .648_{10}-4$,

$\delta_{725}= -.305_{10}-3$,　$\delta_{726}= -.292_{10}-3$,　$\delta_{727}= -.384_{10}-5$,　$\delta_{728}= -.389_{10}-4$.

公式の評価を行なうために，関数 f によらない，これらの誤差項の係数による次の三つの尺度を用いる．$\sqrt{\Sigma\,\delta_{6j}^2/15}$，$\Sigma|\delta_{6j}|$，Lotkin 和．Shanks[3] が実質6次の公式として与えたものと比較してみると次のようになる．

尺度 / 公式	$\sqrt{\sum_j \delta_{6j}^2/15}$	$\sum_j \lvert\delta_{6j}\rvert$	Lotkin 和	$\sqrt{\sum_j \delta_{7j}^2/28}$	$\sum_j \lvert\delta_{7j}\rvert$
実質6次	.836 -6	.795 -5	.441 -4	.270 -3	.484 -2
Shanks[3]	.196 -4	.187 -3	.104 -2	.253 -3	.466 -2

この表から，どの尺度でみても，$O(h^6)$ の誤差項は $O(h^7)$ のものに比べて無視できる程度であることがわかる．従って余程特殊な問題でない限り，打切り誤差の主要項は $O(h^7)$ となり，実質的に6次の公式といえる．

8. 数値例

例題で公式の比較をすることは，Kutta も夙に述べているように，問題を選んだ時点で，ある特定の公式に有利になってしまう．7次の誤差項が Shanks の公式で 0 にしてある2項だけのものや，刻み幅 h が，真の関数の Taylor 展開の収束半径より大きいものなど，ごく特殊な問題を除けば，大体同じような傾向である．田中正次の問題から2例を選び表－2に示す．

数値解の下線の部分は，真の解 $y(x_n)$ とのちがいを，実質6次の▲印は，極限公式（6次の誤差項は完全に 0 ）とのちがいを表わす．

9. 結論

6個の関数計算を用いる Kutta 型公式をもとに，式変形と極限を考えることによって，$\alpha_6=1$ のとき，4個の関数計算と4個の微係数の計算を用いる6次の極限公式が導びかれる．しかし，微係数を用いて計算した値の精度はあまり要らないことと，$O(h^6)$ の誤差は $O(h^7)$ の誤差に比べ無視できる程度であればよいことから，6個の関数計算だけで，極限公式と実質的に同等な公式が得られる．数値例でもわかるように6次の誤差は完全に7次の誤差の範囲内にあり，桁落ちに関しても全く心配がない．

表 − 1

```
M1 = 4093.0D0 / 73692.0D0
M3 = 255875.0D0 / 785952.0D0
M4 = 255625.0D0 / 589104.0D0
M56 = 1217469554363.0D0 / 6581779756704.0D0
M51MA5 = 2147483648.0D0 / 205680617397.0D0
B312 = 1.0D0 / 5.0D0
B32A2 = 1.0D0 / 50.0D0
B412 = -7173.0D0 / 5120.0D0
B42A2 =-5637.0D0 / 25600.0D0
B43 = 2049.0D0 / 1024.0D0
B512 = 368754439163779.0D0 / 17592186044416.0D0
B52A2 = 55619790216167.0D0 / 17592186044416.0D0
B53 = - 409675552002435.0D0 / 17592186044416.0D0
B54 = 114267009665.0D0 / 34359738368.0D0
B612 = 135108925003.0D0 / 6398430720.0D0
B62A2 = 3318523.0D0 / 1041920.0D0
B63 = - 40026925081.0D0 / 1706039808.0D0
B64 = 16715836.0D0 / 4995111.0D0
B65 = - 68719476736.0D0 / 139520018800965.0D0
```

α_i

0.4882812500000000D-03	0.2000000000000000	0.6000000000000000	0.9995117187500000

μ_i

0.5554198556152635D-01	0.0	0.3255605940311876	0.4339216844563948
0.1849757359508912	0.1044086543096560D-01		

β_{ij} , $\beta_{i1}+\beta_{i2}$, $\beta_{i2}\alpha_2$

0.4882812500000000D-03			
0.2000000000000000	0.2000000000000000D-01		
-1.400976562500000	-0.2201953125000000	2.000976562500000	
20.96126304216904	3.161619032207852	-23.28735899950715	3.325607676088111
21.11594716196286	3.185007486179361	-23.46189396830300	3.346439348394860
-0.4925420547285985D-03			

表－2

例1) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2y^2}{3}$, $y(2)=1$, $h=0.1$, $y(x)=\dfrac{9}{1+x^3}$

	x_n	y_n	$y_n - y(x_n)$
実値6次	2.10	0.8771074973636819	0.2967D-08
極限		0.8771074972738272	0.2878D-08
Shanks		0.8771075016091511	0.7213D-08
$y(x_n)$		0.8771074943962579	
	2.20	0.7726648373145431	0.2150D-08
		0.7726648372514301	0.2087D-08
		0.7726648403653626	0.5201D-08
		0.7726648351648352	

例2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^x(y^3+xy^3+1)}{3y^2(xe^x-6)}$, $y(0)=1$, $h=0.1$, $y(x)=\left(\dfrac{e^x+5}{6-xe^x}\right)^{\frac{1}{3}}$

	x_n	y_n	$y_n - y(x_n)$
実値6次	0.10	1.012061460169105	-0.2546D-11
極限		1.012061460169008	-0.2643D-11
Shanks		1.012061460187909	0.1626D-10
$y(x_n)$		1.012061460171651	
	0.20	1.026272992591286	-0.4549D-11
		1.026272992591137	-0.4698D-11
		1.026272992621081	0.2525D-10
		1.026272992595835	

参 考 文 献

1) W. Kutta, Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen, Z. Math. Phys., 46, pp.435-453 (1901).

2) H. A. Luther and H. P. Konen, Some fifth-order classical Runge-Kutta formulas, SIAM Review, Vol.7, No.4, Oct., pp.551-558 (1965).

3) E. B. Shanks, Solutions of differential equations by evaluations of functions, Math. Comp., 20,pp.21-38 (1966).

4) C. R. Cassity, Solutions of the fifth-order Runge-Kutta equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol.3, No.4, pp.598-606 (1966).

5) C. R. Cassity, The complete solution of the fifth order Runge-Kutta equations, SIAM. J. Numer. Anal, Vol.6, No.3, pp.432-436 (1969).

6) 戸田英雄,Runge-Kutta 系のある極限公式の打切り誤差について,情報処理学会論文誌, Vol.21, No.4, pp.285-296 (1980).

7) 田中正次，5次陽的 Runge-Kutta法の特性の比較と最適化，京都大学数理解析研究所講究録 442, pp. 37-58 (1981).

8) 戸田英雄・小野令美，5個の関数計算による実質的に5次のRunge-Kutta法，情報処理学会論文誌, Vol.22, No.2, pp.89-98 (1981).