数理解析研究所講究録
第456巻 1982年 19-25

Vinogradovの方法と篩

日本大学理工学部
本橋洋一

この講演の目的は，具体的な結果とか方法についてではなく，研究でつかれた私の頭脳に生じた妄想みたいな，「ボンヤリとした何か本質的かもしれないこと」についてとりとめなくのべさせていただくことであり，皆様が，どこか変ではあるけど面白そうなことがありそうだと感じ取って下さるといいのですが ----

Vinogradovの方法をめぐってまじめにはじめるつもりですが，次第に話は発散する予定です。

Vinogradovの方法はいうまでもなく三角和の理論に入るわけですが，この理論は，典型的な例で示して分類すると，次のような，四類に分けられるとおもいます。

(i) $$\sum_{M \le n < M+N} e^{2\pi i n x} \ll \min\left\{ \frac{1}{\{x\}}, N \right\},$$

(ii) $$\int_0^1 \Big| \sum_n a_n e^{2\pi i n x} \Big|^2 dx = \sum_n |a_n|^2,$$

(iii) $$\sum_{M \le n < M+N} g(n) e^{2\pi i f(n)} \sim \int_M^N g(x) e^{2\pi i f(x)} dx,$$

(iv) $$\sum_{\substack{x=1 \\ x\bar{x} \equiv 1 \pmod q}}^{q} \exp\left(\frac{2\pi i}{q}(ax + b\bar{x})\right) \ll (b, q)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

(i)は自明ですが，これは best な評価であり，Vinogradov の方法は，大略，この形に評価すべき和を帰着させる方法といえると思います。(ii)は Parseval 等式ですが，これを効果的に離散化したものと，その dual が Large sieve といわれるものの本体でありましょう。(iii)は，g, f について条件がいる訳ですが，それはひとまずおくとして，一般に van der Corput の方法といわれ，漸近式の残余項の評価に彼の重要な寄与があるわけです。しかし，そこにつかわれているのは，才二平均値の定理であり，そのすじからもとをただせば，(i)に帰着されるべきものでもあります。(iv)は有名な Kloosterman 和についての A. Weil の結果ですが，これは方法上 (i)〜(iii) とは全く異り代数的なものであります。今日では，組み合せ論的に証明できるわけですが，それもやはり代数的と分類すべきものとおもわれます。Gauss 和等も勿論この系列に入るわけです。

さて，現今の篩の理論においては，各問題について必ずある種の残余項の評価が中心課題となるのであるが，そこできわめて重要なことは，(i)〜(iv)全てが実際に援用されているという点であります。たとえば，(ii)は Large sieve を通じて，Golbach予想や，Brun-Titchmarsh定理の改良に寄与し，(iii)は(i)とあいまって，$\zeta(s)$，$L(s,\chi)$ の理論を通じて，短区間，短算術級数における素数分布に関連し，さらにまた，(iv)は，たとえば，Linnik の「dispersion method」を通じて，一次元篩の種々の応用になくてはならぬものであります。

しかし，これはある意味では当然のことかもしれません。なぜならば，篩の応用場面ばかりではなく，広く解析的整数論全体において，無数の和の評価が行われ，それらは直接，あるいは間接に，何らかの指数和と関連できるからであります。具体的には，これは，ほとんどの場合残余項は Fourier 級数（狭義，広義ともに）で表示できるということであり，そこに解析的整数論の底辺がある訳でありましょう。Bombieri 流に云うと，我々の科学は $\mathbb{Z}$ 上の調和解析である，となりますが，これは大変に適切な表現であるとおもわれます。

しかしながら，問題が本当に発生するのは，「$\mathbb{Z}$ 上の調和解析を行って，残余項」を Fourier 級数で表示してからであります。解析的整数論の底辺はそこにあるにしても，この

分野の真ずいは，これらの指数和の評価と，そこへ問題を還元する技法により多く存在すると言うべきでありましょう。実際，上記でのべた各方法は，全てそのような努力の中で発見されたわけであります。これは，広義の Fourier 級数である Dirichlet 級数とそれへの函数論の応用ということも勿論ふくめて言っていることであります。

では，もう少し話を具体的にして，Vinogradov の方法（あるいは Vinogradov の平均値定理の応用）をめぐる私の印象をのべさせていただきます。Vinogradov の方法は，Waring の問題及び，和 $\sum n^{it}$ の評価に大変な効力を有するものですが，ここでは，後者をめぐる点に話を限定いたします。

Vinogradov の方法において注目すべき点は，和 $\sum n^{it}$ の評価にあたって，それをまず「非常に高い巾」にあげてから考察することであります。これは高巾に移ることにより，「コントラスト」を強めてみることとも言えましょう。実は，このような手法は，きわめて似た形で

(a) Turán の巾和理論

(b) 残余項つき素数定理の初等的証明

の中にもみいだされます。最近の zero-density 理論に於る Jutila による 'raising to high powers' の方法もこの系列に入れてもよいでしょう。

少し話のピントがずれるのですが、(a), (b) の比較をしてみると、単なる類似性だけでなく、何か本質的関連がそこにあるような感じがします。Turán の方法は $\zeta(s)$, $L(s,\chi)$ に応用されるのですが、そこにおいては、これら函数の対数微分の高次微分が考察され、これらが outstanding なゼロ点によって支配される様が、「巾和理論」によってみちびかれる訳です。一方、Bombieri - Diamond - Steinig による素数定理の初等的証明においても、理論の背景には、これら高次微分があるのであって、それらを特殊な関係式にそう入することにより、上記とは別の意味で outstanding な部分、すなわちある種の和の主項をとり出すわけであります。この process を解析的なものに焼きなおしてみると、Turán の方法と酷似しているのがよくわかります。

さて、後者の理論における主項のとり出し方は、実は篩の方法の一つであります。これは、Selberg の local sieve といわれるものの発展した形のものであり、その重要な性質は、他の篩の方法とちがって、とりあつかう種々の評価が全て漸近等式で得られることであります。ここにおいて解析的（あるいは複素函数論ないしは非初等的）方法と篩の方法の一断面が本質的に連結しているようにおもえてなりません。Selberg の local sieve と Wirsing の Tauber 型定理を中心にそ

えて，素数分布論全体を算術化するのも夢ではないとおもわれます。そのためにはまず Siegel-Walfisz の素数定理の初等的証明を考察すべきでありましょう。

実は，素数分布論の中心部は大略初等化されているのです。Vinogradov の zero-free region，Page-Landau-Siegel の定理，Deuring-Heilbronn 現象などは Selberg の篩によって簡明かつ初等的に証明され得ます。そういう訳で，ただ一つ残っているのが Siegel-Walfisz の素数定理であります。もしもそれが初等化できれば，Bombieri の平均素数定理はただちに初等化され，おそらく「Chen の定理」も算術化できるでありましょう。更には Linnik の最小素数定理の算術化も目前となります。実際この定理の証明のほとんどが既に算術化されております。

同様に，Vinogradov の平均値定理から Vinogradov の zero-free region への道すじは完全に初等化されているのですが，それから先の Vinogradov の素数定理への道程は一体どのようにして算術化するのか，きわめて大きな問題の一つであるとおもいます。Selberg はあるとき，

$$\pi(x) = li\, x + O\left(x \exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

の初等化は，もしそれが出来れば驚くべきことである，と言っておりましたが，私には決っして不可能なことのように

は思えません。おそらく，その初等化においては，幾通りかの篩の方法と，何かのVinogradov型の指数和の理論が決定的な役割をはたすにちがいありません。

一方，問題を逆にして，では一体 Turán の方法はいかなる篩効果をもたらすのであろうか。これも深くきわめるべき問題とおもえます。

更にはまた，一次元篩をめぐる combinatorial sieve の方法は，逆流して $\zeta(s)$，$L(s,\chi)$ の理論に何をもたらすでしょうか。Kloosterman 和は合同式ゼータのゼロ点と関連があり，それが combinatorial に証明できることは，すなわち「篩 (mod p)」で証明できたのだ，と言ってしまってはあまりに突飛すぎましょうか。何かがこのあたりにあるように思えてなりません。

乗法的諸性質を分解してみせるために用いられる切断用のかなり鋭いナイフが篩の方法であるのですから，それらが，ζ や L に何かをもたらすのは不思議ではありません。実事，Selberg の方法は，彼自身による ζ 理論についての研究の中で生れた手段であり，これは決して忘れるべきことではないと思います。