数理解析研究所講究録
第456巻 1982年 132-138

加重一様分布の条件

市立習志野高
大久保　幸夫

§1、(a_n)は、非減少な自然数列で、ギャップを持たないものとする。即ち、

$$(a_n) = (\underbrace{0,0,\cdots,0}_{l_0},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{l_1},\cdots,\underbrace{i,i,\cdots,i}_{l_i},\cdots)$$

ここに、a_nは、値iをl_i個とるものとする$(l_i \geqq 1)$。

さて、この数列(a_n)に対して次の問題が考えられる。

$(a_n x)$がすべての無理数xに対して、mod 1で一様分布するのは、(a_n)がいかなる条件を満たすときか？

また、いかなる実数xに対しても$(a_n x)$が一様分布しないのは、(a_n)がどんな数列のときか？

これらの問題を扱ったのが、Dress [1] と Topuzoğlu [2] である。Dressは次の結果を得ている。

定理A、(a_n)は非減少な自然数列で、

$$a_n = o(\log n)$$

を満たすならば、いかなる実数xに対しても、$(a_n x)$は、mod 1で一様分布することはない。

<u>定理B.</u> $f(n)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$は実数値関数で、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\log n} = \infty$$

を満たすならば、ある非減少な整数列(a_n)が存在し、$a_n = O(f(n))$で、すべての無理数xに対して、$(a_n x)$はmod 1で一様分布する。

定理A.を一般化したTopuzoğlu [2]による次の結果がある。

<u>定理C.</u> (a_n)は非減少な自然数列で、

$$a_n = O(\log n)$$

を満たすならば、$(a_n x)$は、いかなる実数xに対しても、mod 1で一様分布することはない。

この結果は、Dressによる定理Bの意味から最良であることがわかる。

§2. 我々は定理B, Cを加重一様分布の場合に一般化する。

(p_n)は次の条件を満たす数列とする。

$$p_n \geqq 0, \quad p_1 > 0$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty のとき)$$

この時、(x_n)が(M, p_n)－一様分布（mod 1）（以後(M, p_n)－u.d. mod 1 と略記する。）であるとは、すべての$0 \leqq x \leqq 1$に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k C_x(\{x_k\}) = x$$

が成り立つことである。ここに、$\{x_k\}$はx_kの小数部分を$C_x(t)$は$[0, x)$の特性関数を表すものとする。

Weyl の基準にあたる次の結果がある。

定理D. (x_n)が(M, p_n)－u.d. mod 1 であるための必要十分条件は、すべての$h \in \mathbb{N}^+$に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k e^{2\pi i h x_k} = 0$$

が成り立つことである。

さて、実数値関数$p(t)$は次の条件を満たすとする。

i)　$p(t) > 0$

ii)　$p(t)$は、tに関して非増加。

iii)　$p'(t)$は、$1 \leqq t < \infty$に対して連続。

iv)　$t\,p(t) = O(1)$

v)　$\int_1^\infty p(t)\,dt = \infty$

この$p(t)$について、$P_n = p(n)$とおき、(M, p_n)－一様分布（mod 1）について考察する。

我々は次の結果を得る。

定理 1. $g(t)$ は $1 \leqq t < \infty$ で定義され、正数値をとる連続関数で、次の条件を満たす。

i) $g(t)$ は増加する凹関数。

ii) $g(t) \to \infty$ （$t \to \infty$ のとき）

iii) $g'(t) \neq 0$ （$t \in [1, \infty) - E$）

iv) $g'(t) \to 0$ （$[1, \infty) - E$ を通り、$t \to \infty$ のとき）

v) $g'(t)/p(t)$ は単調 （$t \in [1, \infty) - E$）

vi) $\dfrac{g'(t)}{p(t)} \displaystyle\int_1^t p(x)\,dx \longrightarrow \infty$ （$[1, \infty) - E$ を通り、$t \to \infty$ のとき）

ここに、$E = \{ 1 \leqq t < \infty : g'(t)$ は存在しない$\}$ とする。

このとき、$([g(n)]x)$ は、すべての無理数 x に対して、(M, P_n)-u.d. mod 1 である。

また、定理 B に対応する結果として、

定理 2. $f(n)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ は、実数値関数で

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{\log \log n} = \infty$$

を満たすならば、ある非減少な整数列 (a_n) が存在し、

$$a_n = O(f(n))$$

を満たす。更に、$(a_n x)$ はすべての無理数 x に対して、$(M, 1/n)$-u.d. mod 1 である。

定理3. kは2以上の整数とする。$f(n)$ $(n \in \mathbb{N}^{+})$は、実数値関数で、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{\log_{k+1} n} = \infty$$

(ここに、$\log_1 n = \log n$, $\log_{k+1} n = \log(\log_k n)$ ($k \geq 1$に対して) と定義する。) を満たすならば、ある非減少な整数列(a_n)が存在し、$a_n = O(f(n))$を満たし、更に、$(a_n x)$は、すべての無理数xに対して、$(M, 1/n \log n \cdots \log_{k-1} n)$-u.d. mod 1である。

一方、Topuzoğluによる定理Cに対応する結果として、我々は次の定理を得る。

定理4. (a_n)は非減少の自然数列で、

$$a_n = O(\log \log n)$$

を満たすとする。このとき、いかなる実数xに対しても、$(a_n x)$は$(M, 1/n)$-u.d. mod 1でない。

定理4′ kを2以上の整数とする。(a_n)は非減少な自然数列で、

$$a_n = O(\log_{k+1} n)$$

を満たすならば、いかなる実数xに対しても、$(a_n x)$は$(M, 1/n \log n \cdots \log_{k-1} n)$-u.d. mod 1でない。

定理4，4′は、定理2，3の意味でそれぞれ最良の結果と言える。

最後に、（$[g(n)]x$）がすべての無理数xに対して、（M，$g'(n)$）－u.d. mod 1 となるための十分条件と、その応用例を与える。

定理5. $g(t)$は、$1 \leqq t < \infty$で定義された正値の増加関数で、

i) $g'(t)$は連続。

ii) $g(t) \to \infty$ （$t \to \infty$のとき）

iii) $g'(t) \to 0$ （tに関して単調）

iv) $t\,g'(t) = O(1)$

を満たすならば、すべての無理数xに対して、（$[g(n)]x$）は、（M，$g'(n)$）－u.d. mod 1 である。

例1. （$[\log n]x$）は、すべての無理数xに対して、（M，$1/n$）－u.d. mod 1 である。

例2. kを2以上の整数とする。そのとき、すべての無理数xに対して、（$[\log_k n]x$）は、（M，$1/n \log n \cdots \log_{k-1} n$）－u.d. mod 1 である。

参考文献

[1] F. Dress : Sur l'équirépartition de certaines

suites $(x\lambda n)$, Acta Arithmetica. XIV (1968), 169-175.

[2] A. Topuzoğlu : On u.d. mod 1 of sequence $(a_n x)$, Indag. Math. 43 (1981), 231-236.