数理解析研究所講究録
第 458 巻 1982 年 20-29

等価性判定問題が可解であるdpdaの一つの部分クラスについて

三菱電機(株) 情報電子研究所　　関本 彰次

1. 用語と記法

決定性プッシュダウンオートマトン(dpda)Mを

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \Delta, c_s, F)$$

で表わす。但し, Qは状態集合, Γはスタック記号集合, Σは入力記号集合, Δは遷移規則集合, Fは受理モード集合, そしてc_sは初期コンフィグレーションであり$c_s = (q_s, Z_s)$のように表わす(なお, $q_s \in Q$, 且つ, $Z_s \in \Gamma$)。そしてdpdaからなるクラスをDで表わす。

$Q \times \Gamma^*$の要素であるコンフィグレーションcのモードを$m(c)$で表わす. $c, c' \in Q \times \Gamma^*$, 且つ, $t \in \Sigma^*$において, cから出発してc'に到る入力列tによる遷移を$c \xrightarrow[M]{t} c'$ (又は$c \xrightarrow{t} c'$)で表わす. 上の遷移$c \xrightarrow[M]{t} c'$において, ある自然数定数mが存在して, その遷移の過程に現れる任意のコンフィグレーションc''の高さ|c''|について|c''|≧|c|−m が成立するとき

には，$c \xrightarrow[M]{t} c'$ のことを $c \uparrow\text{-}m(t)_M c'$ とも書く。又，$c \xrightarrow[M]{t} c'$ の途中に現れる任意の c'' について $|c''| \geqq |c'|$ のときはその遷移のことを $c \downarrow (t)_M c'$ とも書く。Mの初期コンフィグレーション c_S からの遷移により到達可能なコンフィグレーションの全体を $\mathfrak{M}_M = \{c \mid c_S \xrightarrow[M]{t} c \in Q\times\Gamma^*, t\in\Sigma^*\}$，コンフィグレーション c により受理される部分語集合を $L(c)=\{t \mid c\xrightarrow[M]{t} c', m(c')\in F, t\in\Sigma^*\}$ で表わす。特に $L(c_S)$，即ち，Mにより受理される言語のことを $L(M)$ で表わす。$M_1\equiv M_2$ により dpda M_1 と M_2 が等価なことを，そして $c_1\equiv c_2$ によりコンフィグレーション c_1 と c_2 が等価なことをそれぞれ表わす。

以下では dpda のクラス D の代りにそれと等価な言語を定義する次のような D の部分クラス D' を対象とする。[21,22] 即ち，D' に属する M については，$\Delta\subseteq Q\times\Gamma\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times Q\times(\{\varepsilon\}\cup\Gamma\cup\Gamma^2)$ が成立する（但し，ε は空記号列）。又，Δ の要素である遷移規則 p を $p=(q,Z)\xrightarrow[M]{\pi}(q',\omega)$（但し，$q,q'\in Q$, $\omega\in\{\varepsilon\}\cup\Gamma\cup\Gamma^2$, $Z\in\Gamma$，且つ，$\pi\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$）で表わすとき，$\pi=\varepsilon$ ならば $\omega=\varepsilon$ が成立する。又，$F\subseteq \mathcal{D}_R\cup Q\times\{\varepsilon\}$ である。但し，$\mathcal{D}_R=\{(q,Z)\mid p\in\Delta, p=(q,Z)\xrightarrow[M]{\pi}(q',\omega), \pi\in\Sigma^*\}$（なお，M が dpda であることから，$\mathcal{D}_\varepsilon=\{(q,Z)\mid p\in\Delta, p=(q,Z)\xrightarrow[M]{\varepsilon}(q',\omega)\}$ とするとき，$\mathcal{D}_R\cap\mathcal{D}_\varepsilon=\phi$ である）。更に，$L(M)\neq\phi$ である M については，$|c|>0$ である任意の $c\in\mathfrak{M}_M$ について $L(c)\neq\phi$，

且つ，$\rho_M(c) = \{q \mid c \overset{t}{\underset{M}{\vdash}} (q, \varepsilon),\ t \in \Sigma^*,\ q \in Q\} \neq \phi$ が成立する。

2．正準的 dpda のクラス

正準的 dpda のクラスは，先に Ukkonen[13] が固有的（proper）と呼ぶ dpda を定義する際に用いたコンフィグレーション c の重み $W_g(c)$ を用いて定義される。そこで先ず c の重み $W_g(c)$ を文献(13)にもとづいて示して置く。

$M \in D'$，$q \in Q$，$\omega \in \Gamma^*$，且つ，$Z \in \Gamma$ につき次を定義する。

$B(Z, q, \omega) = \{t \mid (q', Z) \overset{t}{\underset{M}{\vdash}} (q'', \varepsilon),\ q' \in \rho_M(q, \omega),\ q'' \in Q,\ t \in \Sigma^*\}$

そして，$c = (q, \omega' Z \omega) \in \mathcal{M}_M$ において，$B(Z, q, \omega) = \{\varepsilon\}$，又は $L(c) = \phi$（この場合は，$M \in D'$ から $L(M) = \phi$ のときに限られる）のときは，$\omega' Z \omega$ で示される位置にあるスタック記号 Z は c 中から除去される対象となりうる（略記して，c 中で除去対象的）という。そこで c 中にあってしかも c 中において除去対象的でないスタック記号のことを c 中で実語生成可能なスタック記号と呼ぶ。以上に基づき，$c \in \mathcal{M}_M$ の重み $W_g(c)$ は，c 中に含まれる実語生成可能なスタック記号の数であると定義する。

正準的 dpda を定義するに先立ち，Ukkonen による固有的 dpda の定義を示して置く。

［定義1］[13] dpda M が固有的（proper）であるとは，次の性質を持つときにいう。即ち，Σ^* の任意の部分集合 L に関し

て，ある $c\in\mathfrak{M}_M$ が存在して $L=L(c)$ ならば，dpda M と集合Lに依る最小の定数（自然数）$\mu_{(L,M)}$ が存在して，任意の $c'\in\mathfrak{M}_M$ に関して，もし $c'\equiv c$ ならば次の関係が成立する。

$W_g(c')\leqq\mu_{(L,M)}$ （定義終）

D' に属し，且つ，固有的なdpdaのクラスを P' で表わす。

次に本論文の対象となる正準的と呼ぶdpdaを定義する。

［定義2］ dpda Mは，次の性質を持つ，M自身に依る最小定数（自然数）J_M を持つとき，且つ，そのときに限り正準的であると呼ばれる。即ち，$c\in\mathfrak{M}_M$，$t\in\Sigma^*$ に関して，

$c\downarrow(t)_M c'$，且つ，$W_g(c)-W_g(c')\geqq J_M$

であるならば，$\bar{c}\equiv c$ である $\mathfrak{M}_M$ に属する任意の $\bar{c}$ について

$\bar{c}\xrightarrow[M]{t}\bar{c}'$ ならば $W_g(\bar{c})>W_g(\bar{c}')$

が成立する。 （定義終）

D' に属し，且つ，正準的なdpdaのクラスを P'_A で表わす。

$M\in D'$，$c\in\mathfrak{M}_M$，$c=(q,\omega'Z\omega)$，且つ，c中に示す位置にあるZがc中において実語生成可能なスタック記号とする。このとき，$t\in\Sigma^*$，且つ，$t=t_1t_2t_3$ である入力記号列tにより，

$c\downarrow(t_1)c_1=(q_1,\omega'Z)$，$c_1\downarrow(t_2)c_2=(q_2,\omega')$，且つ，$c_2\xrightarrow{t_3}c'$

であって，しかも $|t_2|>0$ であるならばそのときに限りc中の上記Zは遷移 $c\xrightarrow{t}c'$ により実語生成的にポップアップされるという。

〔補題1〕 自然数nと$c \in \mathcal{M}_M$（但し，$M \in D'$）に関して，

$$W_g(c) > (|Q|+1)^n$$

が成立するならば，ある$t \in \Sigma^*$が存在してc中の実語生成可能なスタック記号のうち少なくともn個のものが遷移$c \xrightarrow{t} c'$により実語生成的にポップアップされる．

補題1を用いることにより，正準的な$dpda$のクラスP'_AはP'の部分クラスであることを示しうる。即ち，次の補題2が成立する。

〔補題2〕 $P'_A \subset P'$である．

3. P'_Aにおける等価性の判定可能性

クラスP'_Aに属するMは，次の補題3と補題4で示される基本的性質をもつ。

〔補題3〕 $M \in P'_A$，$c_1, c_2 \in \mathcal{M}_M$，$c_1 \equiv c_2$とする。このとき，$t \in \Sigma^*$による遷移$c_1 \downarrow (t) c'_1$において$c_1$中の$n$個のスタック記号が実語生成的にポップアップされ，且つ，nがMに依る定数σ_Mに対して$n > \sigma_M$であるならば，入力記号列tによるc_2からの遷移$c_2 \xrightarrow{t} c'_2$，且つ，$m(c'_2) \in \mathcal{D}_R$において，常に

$$|c_2| - |c'_2| > 0$$

が成立する。

〔補題4〕 $M \in P'_A$，$c_1, c_2 \in \mathcal{M}_M$，$c_1 \equiv c_2$，$c_2 = (g_2, \varpi Z')$，且つ，$Z' \in \Gamma$とする。このとき，$t \in \Sigma^*$に関して，

$c_1 \downarrow (t) c_1'$，且つ，$c_2 \uparrow (t) c_2' = (g_2', \varpi \omega_2)$

ならば，Mに依る定数S_Mが存在して，$W_g(g_2', \omega_2) < S_M$が成立する。但し，$W_g(g_2', \omega_2)$は，$W_g(c_2')$中での実語生成可能なスタック記号の内で$\omega_2$に含まれるものの数とする。

以下に，D'に属するMが一般に持つ性質である次の補題5及び補題6を示す。そのためにまず次のことを定義して置く。

$M \in D'$，$c \in \mathfrak{M}_M$，$c = (g, \bar{\varpi} \varpi \omega)$，$\omega, \varpi, \bar{\varpi} \in \Gamma^*$，且つ，$P_M(g, \omega) = P_M(g, \varpi \omega)$であってしかもc中において$\varpi$の部分に含まれる記号は全て除去対象的であるとする。このとき，次の条件a)とb)が共に満足されるとき，且つ，そのときに限りϖはc中から除去可能なスタック記号列である（又はϖはc中から除去可能である）という。

a) ある$t = t_1 t_2 t_3 \in \Sigma^*$が存在して，次の遷移が成立する。

$$c_S \uparrow (t_1) c_1 = (g_1, \varpi Z') \uparrow (t_2) c_2 = (g_1, \bar{\varpi} \varpi Z') \uparrow (t_3) c$$

b) $g' \in P_M(g, \omega)$ならば，$(g', \varpi) \xrightarrow{\varepsilon} (g', \varepsilon)$である。

以上から，$c = (g, \bar{\varpi} \varpi \omega) \in \mathfrak{M}_M$において$\varpi$が除去可能ならば，$c' = (g, \bar{\varpi} \omega) \in \mathfrak{M}_M$，且つ，$c' \equiv c$が成立する。又，c中において$\varpi$に含まれる各々のスタック記号が除去対象的であるかどうかは，文献(13)で述べられているように，識別可能である[(4),(13),(18)]しかも文献(4)の結果を用いることにより次の補題5及び補題6が成立する[(4),(13),(18)]。

[補題5][(4),(13)] $M\in D'$, $c\in \mathcal{M}_M$, $c=(q,\varpi\varpi\omega)$, 且つ, $\varpi\in\Gamma^*$ とする。このとき, ϖがc中において除去可能かどうかは判定可能である。

[補題6][(4),(13)] $M\in D'$, $L(M)\neq\phi$, $c\in\mathcal{M}_M$, $c=(q,\omega''\omega'\omega)$, 且つ, $\omega,\omega',\omega''\in\Gamma^*$ とする。さらにc中に示されるスタック記号列ω'に含まれる任意のスタック記号がc中において除去対象的であり, 且つ, ω'の長さが$|\omega'|>|Q|\cdot|\Gamma|^2\cdot 2^{|Q|^3}$であるとする。このとき, cと$\omega'$について常に次のことが成立する。
即ち, $\omega'=\varpi''\varpi'\varpi$ (但し, $\varpi,\varpi',\varpi''\in\Gamma^*$)で表わされ, 且つ, $|\varpi'|>0$である記号列ϖ'が存在して, しかもこのϖ'はc中から除去可能である。

P_A'で上記の補題3及び補題4が成立すること, そしてD'で補題5及び補題6が成立することから, *Valiant*[(1),(2)]による併行スタック（*alternate* 又は *parallel stack*）を用いた模擬機械の概念及び大山口, 稲垣, 本多[(10),(11)]のB'-変換の概念を用いた次のような模擬機械$\bar{M}$を構成しうる。即ち, $\bar{M}$は任意の$M_1\in D'$と$M_2\in P_A'$の動作を同時に模擬する機械であって, $M_1\equiv M_2$のとき, 且つ, そのときに限って$\bar{M}$の受理する言語は$L(\bar{M})=\phi$となる。しかも$M_1\equiv M_2$であるならば$\bar{M}$はプッシュダウンオートマトンとして定義される。このことにより次の定理1が成立する。

［定理1］ $M_1 \in D'$ と $M_2 \in P'_A$ において，関係 $M_1 \equiv M_2$ が成立するかどうかの判定は可能である。

正準的 dpda により受理される言語のクラスは，simple dpda[6]，deterministic one counter automaton[3),(11]，nonsingular dpda[1),(8]，stack uniform dpda[12] 及び real-time strict dpda[10),(15] のそれぞれにより受理される言語，そして文献(16)における条件Sを満たす dpda により受理される言語，さらに文献(17)，(19)及び(23)等で示される dpda により受理される言語の各クラスを何れも含む。有限ターン dpda[2),(11),(13),(21] については，それと等価な固有的 dpda が存在するときはそれと等価な有限ターンであって，且つ，固有的な dpda が存在する。有限ターン，且つ，固有的な dpda は次に示す弱正準的と呼ぶ性質を持つ。弱正準的な dpda のクラスにおいても，P'_A の補題3と補題4に対応する性質が存在し，このクラスにおける等価性判定問題が可解であることを示しうる。

［定義3］ $M \in D'$ における任意の $c_0 \in \mathcal{M}_M$ について，c_0 にのみ依存する次の性質をもつ最小定数（自然数）J_{c_0} を持つとき，且つ，そのときに限り，Mは弱正準的であると呼ばれる。

t_1, t_2 は Σ^* の任意の要素であり，しかも $c_0 \xrightarrow{t_1} c \downarrow (t_2) c'$，且つ，$W_g(c) - W_g(c') \geqq J_{c_0}$ とする。このとき，$\bar{c}_0 \equiv c_0$ である $\bar{c}_0 \in \mathcal{M}_M$ において $\bar{c}_0 \xrightarrow{t_1} \bar{c} \xrightarrow{t_2} \bar{c}'$ ならば，常に $W_g(\bar{c}) > W_g(\bar{c}')$ が成立

する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（定義終）

謝辞　本研究を通じ適切な御教示，御助言を頂いた大阪大学基礎工学部嵩忠雄教授，都倉信樹教授及び谷口健一助教授に深謝致します。　本研究を進めるに当り適切な教示唆を頂いた電気通信大学通信工学科富田悦次助教授に深謝致します。

本研究の機会を与えられ，励ましを頂いた当社情報電子研究所情報処理開発部長首藤勝博士に深謝致します．

参考文献

(1) Valiant,L.G.: “Decision procedures for families of deterministic pushdown automata ”, Ph.D.Thesis,Univ.of.Warwick,1973.

(2) Valiant,L.G.: “The equivalence problem for deterministic finite-turn pushdown automata ”,Inform.Contr.25(1974),pp.123-133.

(3) Valiant,L.G. and Paterson,M.S.: “Deterministic one counter automata”, J.Comput.System Sci.10(1975),pp.340-350.

(4) Valiant,L.G.: “Regularity and related problem for deterministic pushdown automata ”,J.ACM 22(1975),pp.1-10.

(5) Harrison,M.A. and Havel,L.M.: “Real-Time strict deterministic languages”,SIAM J.Comput.1(1972),pp.333-349.

(6) Korenjak,A.J. and Hopcroft,J.E.: “Simple deterministic languages”, In:Proc.IEEE 7th Annual Symp.on Switching and Automata Theory,Berkley, Calif.1966,pp.36-46.

(7) Rosenkrantz,D.J. and Strearns,R.E.: “Properties of deterministic topdown grammars ”,Inform.Contr.17(1970),pp.226-256.

(8) Taniguchi,K. and Kasami,T.: “A result on the equivalence problem for deterministic pushdown automata ”,J.Comput.System Sci.13(1976),pp.38-50.

(9) Oyamaguchi,M. and Honda,N.: “The decidability of equivalence for deterministic stateless pushdown automata”,Inform.Contr.38(1978),pp.367-376.

(10) Oyamaguchi,M.,Honda,N. and Inagaki,Y.: “The equivalence problem for real-time strict deterministic languages”,Inform.Contr.45(1980),pp.90-115.

(11) 大山口，稲垣，本多: “決定性プッシュダウンオートマトンの部分クラスの等価性判定問題”，信学技報，ＡＬ８０－３０（１９８０）．

(１２) Linna,M.: "Two decidability results for deterministic pushdown automata", J.Comput.System Sci.18(1979),pp.92-107.
(１３) Ukkonen,E.: "The equivalence problem for some non-real-time deterministic pushdown automata",The 12th ACM Symposium on Theory of Computing, Los Angels,1980.
(１４) 片山, 土屋, 榎本: "決定性プッシュダウン変換器の等価性判定について", 信学論 (D), ５８－D, １２ (１９７５), ｐｐ．７６０－７６７．
(１５) 富田悦次: "分岐アルゴリズムによる決定性プッシュダウンオートマトン (クラス $D_0:R_0$) の等価性判定", 信学論 (D), Ｊ６１－D, １０ (１９７８), ｐｐ．７５９－７６６．
(１６) 富田悦次: "決定性プッシュダウンオートマトンの等価性判定が可解であるためのある充分条件", 信学論 (D), Ｊ６４－D, １ (１９８１), ｐｐ．９－１６．
(１７) 関本彰次: "入力先読形式ボトムアップ形ＤＰＤＡの等価性判定問題の一結果", 信学論 (D), Ｊ６３－D, ６ (１９８０), ｐｐ．４６１－４６８．
(１８) 関本彰次: "入力先読形式ボトムアップ形ＤＰＤＡ (ＬＲ) の特性化", 信学論 (D), Ｊ６３－D, ６ (１９８０), ｐｐ．４６９－４７６．
(１９) 関本彰次: "単調ε-遷移的ＬＲマシンの等価性判定問題について", 信学論 (D), Ｊ, ６３－D, １１ (１９８０), ｐｐ．９７０－９７７．
(２０) 関本彰次: "単調ε-遷移的ＬＲマシンの等価性判定問題の一拡張", 信学論 (D), Ｊ６４－D, ５ (１９８１), ｐｐ．４１９－４２６．
(２１) 関本彰次: "決定性有限ターンプッシュダウンオートマトンの等価性判定問題について", 信学論 (D), Ｊ６４－D, ６ (１９８１), ｐｐ．４６３－４７０．
(２２) 関本彰次: "決定性プッシュダウンオートマトンの等価性判定問題の一結果", 信学論 (D), Ｊ６４－D, ８ (１９８１), ｐｐ．６６１－６６８．
(２３) 関本彰次: "実時間空スタック到着的ｄｐｄａの等価性判定問題について", 信学技報, ＡＬ８１－１９ (１９８１)．

10/10