数理解析研究所講究録
第458巻 1982年 40-46

二部グラフの最長初等道と最長初等閉路について

都留文科大学　　植村　憲治

1 はじめに

$G(V, E) = B(n, n)$を各々の部分がn頂点をもつ二部グラフとする。Vの全ての頂点の次数が$n/2$より大きい時にはGがハミルトン閉路を持つ事は容易に示される[1]。

本稿では頂点の次数が$n/2$以上の時最長初等道，最長初等閉路の長さについて述べ，又ハミルトン道，ハミルトン閉路が存在するための必要十分条件を示す。

2 ハミルトン道を持つための必要十分条件

nが奇数の時には[1]に帰着するので今後$G(V, E) = B(2n, 2n)$とする。又$V = X \cup Y$，$X \cap Y = \phi$，Gの全ての辺はXの頂点とYの頂点を結ぶものとする。断らない限りGの各頂点の次数はn以上とする。

[補題1]　$B(2n, 2n)$の最長初等道の長さは$2n-1$以上である。　証明はあきらかゆえ省略。

[補題2]　B(2n, 2n)の長さ$2l$の初等道に対して長さ$2l+1$以上の初等道が存在する。

証明　$x_1y_1x_2y_2\cdots x_ly_lx_{l+1}$が長さ$2l$の初等道とする（$x_i\in X$, $y_i\in Y$）。もしx_1y_{l+1}, $x_{l+1}y_{l+1}$のどちらかがGの辺であれば、補題は成り立つ。よってこれらはEの元でないとしてよい。この時添字が$\{2,3,\cdots,l,l+2,\cdots,2n\}$のどれかであるn個以上の$x_i$が$y_{l+1}$と辺を成している。一方$x_{l+1}y_j$（$j\geq l+1$）が辺の時も補題が成り立つ。よって（$x_{l+1}y_1$が辺となる場合を考えて）添字が$\{2,3,\cdots l\}$のどれかである$n-1$個の$y_i$と$x_{l+1}$が辺をなしている。よって$x_{l+1}y_m$, $x_{m+1}y_{l+1}\in E$となる数m（$m<l$）が存在する。この時$y_{l+1}x_{m+1}y_{m+1}\cdots x_ly_l x_{l+1}y_mx_my_{m-1}x_{m-1}\cdots y_1x_1$は長さ$2l+1$の初等道である。証終

この補題よりB(2n, 2n)の最長初等道の長さは奇数であることがわかる。

[補題3]　$P=x_1y_1x_2y_2\cdots x_ly_l$（$n\leq l\leq 2n-1$）がB(2n, 2n)の最長初等道であれば長さ$2l$の初等閉路が存在する。

証明　Pが最長であるからx_1は$Y-\{y_1,\cdots,y_l\}$の元とは隣接していない。即ちx_1は$\{y_1,\cdots,y_l\}$の少くともn個の元と隣接している。同じことがy_lについていえてy_lは$\{x_1,\cdots,x_l\}$の少くともn個の元と隣接している。$l\leq 2n-1$より

$x_1 y_m, x_m y_l \in E$ となる数 m が存在する。

この時 $x_1 y_1 \cdots y_{m-1} x_m y_l x_l y_{l-1} x_{l-1} \cdots y_{m+1} x_{m+1} y_m$ は長さ $2l$ の初等閉路である．

[補題4] $x_1 y_1 x_2 \cdots x_l y_l$ $(n < l \le 2n-1)$ が $B(2n, 2n)$ の初等閉路であれば長さ $2l+1$ の初等道が存在する．

証明 $X' = \{x_1, x_2, \cdots, x_l\}$, $Y' = \{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ とする．
$x \in X - X'$ の時 $l > n$ より x は Y' の元と隣接している。
即ち $x y_i \in E$ for some $y_i \in Y'$．この時 $x y_i x_{i+1} \cdots x_l y_l x_1 y_1 \cdots x_i$ は長さ $2l$ の初等道となり，補題2より長さ $2l+1$ の初等道が存在する。

補題3，4より次の定理が導びかれる。

[定理1] $B(2n, 2n)$ が各頂点の次数が n 以上の二部グラフとする。この時最長初等道の長さは $2n-1$ 又は $4n-1$（ハミルトン道）であり，最長初等閉路の長さは，$2n$, $4n-2$, 又は $4n$（ハミルトン閉路）である．

簡単な事実として $G = B(2n, 2n)$ が連結でないのは $G = K_{n,n} \cup K_{n,n}$ の時だけである事が連結成分にふくまれる頂点の数を考えれば分る。

この事より次の定理が得られる．

[定理2] $B(2n, 2n)$ が各頂点の次数が n 以上の二部グラフとする．この時ハミルトン道を持つための必要十分

条件は$B(2n,2n)$が$K_{n,n} \cup K_{n,n}$に同型でない事である．

証明　必要性は明らか。　十分性を調べるのに$B(2n,2n)$の最長初等閉路の長さが$2n$の時を考えればよい．$K_{n,n} \cup K_{n,n}$に同型でない事より連結であり、最長初等閉路の外の頂点と隣接する閉路内の点がある。即ち長さ$2n$以上の初等道があり，定理1より最長初等道の長さは$4n-1$となる。

［系1］　$B(2n,2n)$がハミルトン道を持つ必要十分条件は連結である事である．

3　ハミルトン閉路を持つための必要十分条件

［補題5］　$P=x_1y_1x_2y_2\cdots x_{2n}y_{2n}$，$P'=x_1'y_1'x_2'y_2'\cdots x_{2n}'y_{2n}'$が$B(2n,2n)$の2つのハミルトン道とする。$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$の元が$\{y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_{2n}\}$の元と隣接していないなら

$$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{x_1',x_2',\cdots,x_n'\}$$ である。

証明　$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$の元は$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$の元としか隣接していないから，P'の中に表われるx_i $(1\leq i\leq n)$に対してその直前の元も直後の元も$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$の元になる。よって$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{x_1',x_2',\cdots,x_n'\}$

［定理3］　$P=x_1y_1x_2y_2\cdots x_{2n}y_{2n}$が$G=B(2n,2n)$ $(n\geq 3)$のハミルトン道とする。$B(2n,2n)$がハミルトン閉路をもつための必要十分条件は　$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$の元のうちで$\{y_{n+1},y_{n+2},\cdots y_{2n}\}$と隣接しているものが存在する事である。

証明 必要性．対偶を示す．$P'=x_1'y_1'x_2'y_2'\cdots x_{2n}'y_{2n}'$ をハミルトン道とする。補題5より $\{x_1',\cdots,x_n'\}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ $\{y_{n+1}',\cdots,y_{2n}'\}=\{y_{n+1},\cdots,y_{2n}\}$．よって $x_1'y_{2n}'$ は辺でない。即ちハミルトン閉路は存在しない，

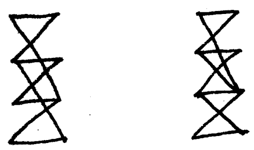
十分性 x_1 が $\{y_{n+1},y_{n+2},\cdots y_{2n}\}$ のどの元とも隣接していなく，x_i $(2\leq i\leq n)$ がそれらのどれかと隣接しているとする。この時 $x_i y_{i-1}x_{i-1}\cdots y_1 x_1 y_i x_{i+1}y_{i+1}\cdots x_{2n}y_{2n}$ も又ハミルトン道になる。よって x_1 が $\{y_{n+1},y_{n+2}\cdots y_{2n}\}$ のどれかと隣接しているとしてよい。同様に y_{2n} が $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ のどれかと隣接しているとしてよい。x_1y_l，x_ly_{2n} が辺となる l が存在する時は $x_l y_{l-1}x_{l-1}\cdots y_1 x_1 y_l x_{l+1}y_{l+1}\cdots x_{2n}y_{2n}$ がハミルトン閉路となる。よってすべての i $(1\leq i\leq 2n)$ に対して $x_1y_i\in E$ か $x_iy_{2n}\in E$ のどちらか1つのみがかならず成り立つとしてよい。$x_1y_k\in E$，$x_k y_{2n}\in E$，$k\geq n+1$，$k\leq n$ をみたす k，k が存在することより，$x_1y_{j+1}\in E$，$x_jy_{2n}\in E$ をみたす数 j が存在する．この時 $C=x_1y_1x_2y_2\cdots x_jy_{2n}x_{2n}y_{2n-1}x_{2n-1}\cdots y_{j+2}x_{j+2}y_{j+1}$ は長さ $4n-2$ の初等閉路であり，これに含まれない2点 y_j，x_{j+1} は隣接している．y_j と隣接しているCの頂点のうちでCにおける直前，又は直後の頂点が x_{j+1} と隣接しているものが存在する時にはハミルトン閉路が存在する。そうでない時にこの点に留意して番号をつけ直す．

$C = x_2'y_2'x_3'y_3'\cdots x_{2n}'y_{2n}'$　$x_1'y_j' \in E$　$1 \le j \le n-1$, $x_i'y_1' \in E$　$n+1 \le i \le 2n$　ここでx_3'の代りにx_1'を用いてもCと同様の閉路ができ，$x_3'y_1' \notin E$より，閉路に含まれない２点x_3', y_1'は辺になっていない．よってこの２点と隣接する点の中には互いに隣接するものが存在する。以上によりさらに番号を付け直す。$C' = y_1''x_2''y_2''\cdots x_{2n-1}''y_{2n-1}''x_{2n}''$　$x_1''y_1'' \in E$　$x_{2n}''y_{2n}'' \in E$．よって$x_1''y_1''\cdots x_{2n}''y_{2n}''$は初等道であり，補題5より $\{x_1'', x_2'', \cdots, x_n''\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\{y_{n+1}'', y_{n+2}'', \cdots y_{2n}''\} = \{y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{2n}\}$.

よって$x_i''y_k'' \in E$となる$1 \le i \le n$, $n+1 \le k \le 2n-1$が存在し，この証明の最初の部分と同様にして$x_1''y_k'' \in E$としてよい．同様に$y_{2n}''x_h'' \in E$となる$2 \le h \le n$が存在するとしてよい．又hをその様な最小の数とすると$x_1''y_{h-1}'' \in E$であり，kをその様な最大の数とすると$x_{k+1}''y_{2n}'' \in E$である．この時$x_1''y_k''x_k''y_{k-1}''x_{k-1}''\cdots y_h''x_h''y_{2n}''x_{k+1}''y_{k+1}''\cdots x_{2n}''y_1''x_2''y_2''\cdots y_{h-1}''$はハミルトン閉路となっている．

注　$n=2$ の時には次の様な例外がある



定理4　$P=x_1y_1x_2y_2\cdots x_{2n}y_{2n}$ が $B(2n,2n)$ のハミルトン道とする．最長初等閉路の長さが $4n-2$ であるための必要十分条件は，定理3の条件を満たさず，かつ $\{y_1,y_2,\cdots y_n\}$ と $\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n}\}$ の間の辺で独立な2本の辺が存在することである．

証明．必要性は明らか．十分性．定理3の条件を満たさないから y_i $(1\leq i\leq n)$ はすべての x_j $(1\leq j\leq n)$ に隣接しており，又 x_k $(n+1\leq k\leq 2n)$ はすべての y_k $(n+1\leq k\leq 2n)$ に隣接しており，これより容易にわかる．

文献

[1] J. Moon & L. Moser, On Hamiltonian bipartite graphs. Israel J. Math. 1. (1963) P163−165.