数理解析研究所講究録
第458巻 1982年 54-63

最小切点集合を求めるための $O(n^2)$ アルゴリズム

電通大　　戸田　誠之助
笠井　琢美

1. 序論

有限有向グラフによって定式化される計算機のプログラムなどの解析に於いて，切点集合と呼ばれる頂点の集合が必要となる。また，切点集合の頂点の数を減らすことによって，より単純で効率のよい解析法を導くことができる。しかし，最小切点集合を求める問題はNP完全であることが知られている。[4] また，可約グラフ[5]と呼ばれるクラスに対しては，線型時間アルゴリズムが知られている。しかし，プログラムの解析などでは，可約グラフのクラスでは制限が強すぎると考えられる。従って，本論文では，可約グラフやモジュラグラフ[7]などのグラフを含む弱可約グラフと呼ばれるより広いクラスを導入し，このクラスに対して効率のよいアルゴリズムを与える。このアルゴリズムの中心的役割を演ずるのはグラフ間の変換規則であり，変換規則の基本的性質を用いて弱可約グ

ラフのクラスが定義される。変換規則を$O(n^2)$アルゴリズムとして実現できる。ここで，nは頂点の数である。

2．　最小切点集合

本節では，グラフ理論の基本的概念を述べ，最小切点集合，変換規則及びグラフ間の関係を定義する。また，変換規則の重要な性質について述べる。

［定義２．１］　有限有向グラフ（以後，単にグラフと呼ぶ）Gを対（V，A）で表わす。ここで，Vは頂点の集合，Aは辺の集合である。頂点v，wに対し，辺(v, w)が存在するならば，vをwの前者，wをvの後者と呼ぶ。頂点vの入次数indeg(v)はvに入る辺の数であり，vの出次数outdeg(v)はvから出ている辺の数である。辺(v_0, v_1)，(v_1, v_2)，(v_2, v_3)，…，(v_{k-1}, v_k)，$k>0$，が存在するとき，頂点の系列$(v_0, v_1, \cdots, v_k)$を長さkの路と呼ぶ。閉路は$v_0=v_k$なる路である。閉路$(v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}, v_0)$が単純であるとは，$v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$が全て異なるときをいう。長さ１の閉路$(v, v)$をループと呼び，このとき頂点$v$はループを持つという。頂点の集合Vが空集合であるとき，グラフGを空グラフと呼び$\emptyset$で表わす。　■

［定義２．２］　グラフ$G=(V, A)$の単純閉路の全体を$S(G)$で表わす。路Pに含まれる頂点の集合をλ_Pで表わす。

頂点の集合 $K \subseteq V$ が切点集合であるとは，Gの任意の単純閉路がKの少なくとも1つの頂点を含む(すなわち，$(\forall c \in S(G))\ \lambda c \cap K \neq \phi$) ときをいう。Gの切点集合で要素数が最小のものをGの最小切点集合と呼ぶ。 ■

次に，与えられたグラフに対して適用される変換規則を定義する。以後の議論で Σ を可算無限集合とし，任意の頂点の集合は Σ の部分集合とする。

［定義２．３］　$G=(V, A)$ をグラフとし，Kを頂点の集合とする。変換規則 $R_i\ (1 \leq i \leq 5)$ はG及びKに対して次のように適用される。

(R_1) $indeg(v)=0$ なる頂点 v が存在するとき，v をVから削除し，v から出ている辺をAから削除する。

(R_2) $outdeg(v)=0$ なる頂点 v が存在するとき，v をVから削除し，v に入る辺をAから削除する。

(R_3) ループを持つ頂点 v が存在するとき，v をKに加えてVから削除する。また，v に入る辺，v から出ている辺をAから削除する。

(R_4) $outdeg(v)=1$ でかつループを持たない頂点 v が存在するとき，v の唯一の後者を v^S とすると，v の任意の前者から v^S への辺をAに加える。また，v をVから削除し，v に入る辺及び辺 (v, v^S) をAから削除する。

(R5) $\mathrm{indeg}(v)=1$でかつループを持たない頂点vが存在するとき，vの唯一の前者をv^pとすると，v^pからvの任意の後者への辺をAに加える。また，vをVから削除しvから出ている辺及び辺(v^p, v)をAから削除する。 ■

［定義２．４］　$G=(V, A)$をグラフとし，Kを頂点の集合とする。$V \cap K = \phi$のとき，対(G, K)を適用可能な対と呼ぶ。 ■

定義２．３から明らかなように，変換規則は適用可能な対に対して適用される。次に，適用可能な対の間の関係を定義する。

［定義２．５］　ある集合X上の２項関係R，R'に対し，RとR'の和$R \cup R'$を$x(R \cup R')y \leftrightarrow xRy \vee xR'y$で定める。また，$R$の巾$R^i (i \geq 0)$を$xR^0y \leftrightarrow x=y$，$i \geq 1$に対し$xR^iy \leftrightarrow (\exists z \in X)\, xR^{i-1}z \wedge zRy$で定め，$R$の反射的推移的閉包$R^*$を$xR^*y \leftrightarrow x(R^0 \cup R \cup R^2 \cup \cdots)y$で定める。$R$の完備化$\hat{R}$は，$x\hat{R}y \leftrightarrow xR^*y \wedge (\forall z \in X)\, y \not R z$で定義される。対$(X, R)$が有限であるとは，任意の要素$x \in X$に対し，$xR^iy$ならば$i \leq k_x$なる整数$k_x$が存在するときをいう。■

［定義２．６］　(G, K)，(G', K')を適用可能な対とする。(G, K)に変換規則を適用して(G', K')が得られるとき，$(G, K) \Rightarrow (G', K')$で表わす。とくに，規則$R_j (1 \leq j \leq 5)$を

明記するときは，$(G, K) \underset{s}{\Rightarrow} (G', K')$で表わす。更に，適用された頂点をも明記するときは，$(G, K) \underset{s(v)}{\Rightarrow} (G', K')$で表わす。また，$\overset{i}{\Rightarrow}$，$\overset{*}{\Rightarrow}$，$\overset{\wedge}{\Rightarrow}$ については定義２．５に従う。 ■

最後に，変換規則の重要な性質を示す。以後，グラフGとG'が同形であることを$G \simeq G'$で表わす。

〈補題２．１〉 適用可能な対の間の関係$\Rightarrow$に対し，次が成り立つ。

(1) Πを適用可能な対の全体とすると，対$(\Pi, \Rightarrow)$は有限である。 (2) (G_i, K_i) $(1 \leq i \leq 4)$を適用可能な対とする。任意のグラフGに対し，$(G, \phi) \Rightarrow (G_1, K_1)$かつ$(G, \phi) \Rightarrow (G_2, K_2)$ならば$(G_1, K_1) \overset{*}{\Rightarrow} (G_3, K_3)$かつ$(G_2, K_2) \overset{*}{\Rightarrow} (G_4, K_4)$かつ$G_3 \simeq G_4$なる$(G_3, K_3)$，$(G_4, K_4)$が存在する。

(3) また，任意のグラフGに対し，$(G, \phi) \Rightarrow (G_1, K_1)$かつ$(G, \phi) \Rightarrow (G_2, K_2)$ならば$(G_1, K_1) \overset{\wedge}{\Rightarrow} (G_3, K_3)$かつ$(G_2, K_2) \overset{\wedge}{\Rightarrow} (G_4, K_4)$かつ$G_3 \simeq G_4$なる$(G_3, K_3)$，$(G_4, K_4)$が存在する。

（証明略） □

〈定理２．１〉 任意のグラフGに対し，$(G, \phi) \overset{\wedge}{\Rightarrow} (G_1, K_1)$かつ$(G, \phi) \overset{\wedge}{\Rightarrow} (G_2, K_2)$ならば$G_1 \simeq G_2$である。

（証明略） □

3．弱可約グラフ

本節では，弱可約グラフと呼ばれるクラスを導入し，このクラスに含まれるグラフに関して変換規則が最小切点集合を与えることを示す。

［定義3．1］ グラフGに対し，$(G, \phi) \overset{*}{\Rightarrow} (G', K')$ なるとき，G′をGの<u>極限グラフ</u>，K′をGの<u>極限集合</u>と呼ぶ。グラフGが<u>弱可約</u>であるとは，Gの極限グラフが空グラフΦであるときをいう。 ■

〈補題3．1〉 (G, K)，(G', K') を適用可能な対とする。$(G, K) \underset{i(v)}{\Rightarrow} (G', K')$ $(1 \leq i \leq 5)$ のとき次が成り立つ。

(1) $i \neq 3$ のとき，任意の閉路 $c \in S(G)$ に対し $\lambda_c = \lambda_{c'}$ かまたは $\lambda_c = \lambda_{c'} \cup \{v\}$ なる閉路 $c' \in S(G')$ が存在する。(2) 逆に，任意の閉路 $c' \in S(G')$ に対し，$\lambda_{c'} = \lambda_c$ かまたは $\lambda_{c'} \cup \{v\} = \lambda_c$ なる閉路 $c \in S(G)$ が存在する。

（証明略） □

〈補題3．2〉 (G, K)，(G', K') を適用可能な対とする。$(G, K) \underset{i}{\Rightarrow} (G', K')$ $(i \neq 3)$ のとき，次が成り立つ。

(1) $K = K'$ (2) G′の切点集合 $\tilde{K}'$ はGの切点集合である。

（略証）(1) 変換規則の定義より明らか。(2) 補題3．1の(1)よりGの任意の閉路 c に対し $\lambda_{c'} \subseteq \lambda_c$ なる閉路 $c' \in S(G')$ が存在する。よって，$\phi \neq \lambda_{c'} \cap \tilde{K}' \subseteq \lambda_c \cap \tilde{K}'$ となり，

$\tilde{K}'$はGの切点集合である。 □

〈定理3．1〉　$G=(V,A)$，$G'=(V',A')$をグラフとし，(G',K')を適用可能な対とする。$(G,\phi)\overset{*}{\Rightarrow}(G',K')$なるとき，$G'$の切点集合を$\tilde{K}'$とすると，$\tilde{K}'\cup K'$はGの切点集合である。

（略証）変換規則の適用回数に関する帰納法で証明する。(i) $(G,\phi)=(G',K')$のときは明らか。(ii) $(G,\phi)\overset{*}{\Rightarrow}(G_1,K_1)\underset{i(v)}{\Rightarrow}(G',K')$ $(1\leq i\leq 5,\ v\in V)$とする。G_1の切点集合を$\tilde{K}_1$とするとき$\tilde{K}_1\cup K_1$はGの切点集合であると仮定する。$i\neq 3$ならば，補題3．2より，明らかに$\tilde{K}'\cup K'$はGの切点集合である。$i=3$のとき，$S(G')=S(G_1)-\{C\in S(G_1);\ v\in\lambda C\}$となるので，$\tilde{K}'\cup\{v\}$は$G_1$の切点集合である。また，$K'=K_1\cup\{v\}$であるから，$\tilde{K}'\cup K'=(\tilde{K}'\cup\{v\})\cup K_1$となり，$\tilde{K}'\cup K'$はGの切点集合である。 □

〈系〉　弱可約グラフGの極限集合$K\phi$はGの切点集合である。 □

以上より，弱可約グラフGに変換規則を適用することにより，Gの切点集合$K\phi$が得られることが示された。以下では，$K\phi$がGの最小切点集合であることを示す。以後，Gの最小切点集合の要素数を$\nu(G)$で表わす。

〈補題3．3〉　(G,K)，(G',K')を適用可能な対とする。$(G,K)\underset{i(v)}{\Rightarrow}(G',K')$ $(1\leq i\leq 5)$なるとき，次が成り立つ。

(1) $i=3$ のとき，$\nu(G)=\nu(G')+1$

(2) $i\neq 3$ のとき，$\nu(G)=\nu(G')$

（略証）Gの最小切点集合を$\tilde{K}$とする。

(1) 頂点vはGに於いてループを持つので$v\in\tilde{K}$である。また，$S(G')=S(G)-\{c\in S(G);\ v\in\lambda c\}$であるから，$\tilde{K}-\{v\}$は$G'$の最小切点集合である。よって，$\nu(G)=\nu(G')+1$。

(2) $i=1,2$のとき明らか。$i=4$のとき，補題3．2より$\nu(G)\leq\nu(G')$である。また，$v\notin\tilde{K}$ならば$\tilde{K}$はG'の切点集合である。一方，このような$\tilde{K}$が少なくとも1つは存在する（$\because$ $v\in\tilde{K}$ならば，$(\tilde{K}-\{v\})\cup\{v^s\}$はGの最小切点集合である。ここで，$v^s$は$v$のGに於ける唯一の後者である）。よって$\nu(G)\geq\nu(G')$となる。以上より，$\nu(G)=\nu(G')$。□

＜定理3．2＞ 弱可約グラフGの極限集合K_ϕはGの最小切点集合である。

（略証） 補題3．3より，$\nu(G)=\nu(\Phi)+|K_\phi|$である。一方，$\nu(\Phi)=0$であるから，$\nu(G)=|K_\phi|$となり，$K_\phi$はGの最小切点集合である。 □

4． 結 論

有限有向グラフに対し適用される変換規則を定義し，変換規則の重要な性質を導いた。この性質をもとに，弱可約グラ

フと呼ばれるクラスを定義し，変換規則が弱可約グラフに対して最小切点集合を与えることを示した。現在，変換規則をもとに $O(|V|^2)$ アルゴリズムが考えられている。

興味ある問題として，弱可約グラフであるための必要十分条件を求めることが残されている。また，任意のグラフに対し最小切点集合の近似解を求めるアルゴリズムを設計することなども考えられる。

［謝　辞］　本論文を書くにあたり，有益な助言を与え，また文献(10)の存在をいち早く知らせて致だいた　電気通大学　町田元さんに心から感謝します。

〈参考文献〉

(1)　Adachi, A., T. Kasai and E. Moriya : "A theoretical study on the time analisis of programs", Lecture Notes in Computer Science 74, pp 201 − 207, 1979.

(2)　Even, S., "Graph Algorithms", Computer Science Press, Inc., pp 223 − 224, 1979.

(3)　Floyd, R. W. : "Assigning meanings to programs", proc. symp. Appl. Math., 19, pp 19 − 32, 1967.

(4) Grarey, M. R. and D. S. Johnson: "Computer and Intractability", A Guide to Theory of NP-completeness, W.H. Freeman and Company, pp 191-192, 1979.

(5) Hecht, M.S. and J.D. Ullman: "Flow Graph Reducibility", SIAM J. Comput, Vol.1, No.2, pp 188-202, 1972.

(6) Iwata, S.: "Programs with minimal goto statement", Inf & Control., Vol.37, No.1, pp 105-114, 1978.

(7) Kasai, T.,: "Translatability of flowcharts into while programs", J. Comput & System Sci., Vol.9, No.2, pp 177-195, 1974.

(8) Kasai, T. et al: "An automatic time analysis system - TIMER", Technical Rept., RIMS-335, Research Institute for Math. Sci., Kyoto Univ., 1980.

(9) Manna, Z.: "Mathematical and Theory of Computation", McGraw-Hill Inc, 1974.

(10) Shamir, A.: "A linear Time Algorithm for Finding Minimum Cutsets in Reducible Graphs.", SIAM J. Comput, Vol.8, No.4, pp 645-655, 1979.