数理解析研究所講究録
第458巻 1982年 64-73

グラフの枝短絡除去問題

豊橋技術科学大学　平田 富夫
東京大学　工学部　浅野 孝夫

あらまし　πをグラフの性質とするとき，πに関する枝短絡除去問題とは，与えられたグラフからπを満たすグラフを得るために行わなければならない枝短絡除去の回数を求める問題である。本論文では，性質πが縮約グラフに関して遺伝的であり，かつ，2－連結成分によって決定されるならば，πに関する枝短絡除去問題はNP－困難であることを示す。

1. はじめに

近年，NP－完全（困難）問題を統一的に取扱おうという試み，即ち，各問題の個別の性質ではなく，幾つかの問題に共通な性質に対してNP－完全（困難）性を証明しようとする試みがなされている。グラフの点除去問題（与えられたグラフから，ある性質πを満たすグラフを得るために除去しなければならない点の個数を求める問題）に関して，Krishna－

moorthy と Deo は幾つかの π についてそれぞれのＮＰ－完全性が類似の手法を用いて証明できることを示した[7]。それをうけて，Lewis と Yannakakis は点除去問題のかなり広いクラスに対しＮＰ－困難性を示した。即ち，π が誘導部分グラフに関して遺伝的（ hereditary on induced subgraphs ）ならば π に関する点除去問題がＮＰ－困難となることを示した[8,9,11]。π が誘導部分グラフ（部分グラフ，縮約グラフ）に関して遺伝的であるというのは，グラフ G が π を満たすならば，G の誘導部分グラフ（部分グラフ，縮約グラフ）も π を満たすときをいう。一方，枝除去問題の場合には，点除去問題のような統一的な取扱いはできないであろうと思われていた[9,11,12]。それに対し，渡辺らは性質 π が３－連結グラフにより有限的に規定できるならば，π に関する枝開放除去問題と枝短絡除去問題がＮＰ－困難となることを示した[10]。ここで，π が３－連結グラフにより有限的に規定できるというのは，ある３－連結グラフの有限集合 $\mathcal{S}(\pi)$ が存在し，グラフ G が π を満たすための必要十分条件が，G が $\mathcal{S}(\pi)$ の元を縮約部分グラフとして含まないことをいう。浅野は渡辺らの結果を更に発展させ，π が部分グラフ（縮約グラフ）に関して遺伝的であり，かつ，３－連結成分によって決定される（ determined by 3-connected components ）ならば，π に

関する枝削放除去問題（枝短絡除去問題）がNP－困難になることを示した[2,3]。ここで，πが3－連結成分（2－連結成分）によって決定されるというのは，グラフGがπを満たすための必要十分条件がGのすべての3－連結成分（2－連結成分）がそれぞれπを満たすことであるときをいう。

本論文では，性質πが縮約グラフに関して遺伝的であり，かつ，2－連結成分によって決定されるならば，πに関する枝短絡除去問題がNP－困難であることを示す。

2. 準備

本章では以下の議論に必要な諸定義と説明を与える。特に断らない用語や記法については文献（1，5，6）を参照されたい。G＝（V，E）を単純無向グラフとする。Vは点の集合，E⊂V×Vは枝の集合である。Gの点集合と枝集合をそれぞれV（G），E（G）と表わすことがある。Gの枝（u，v）∈Eを短絡除去するというのは，点uと点vを同一視（identify）することによってGを変形することをいう。このとき，並列枝やループが生じるときは、それらは除去する。枝の短絡除去をくり返してGの点uとvが同一視されたなら，uはvに（又は，vはuに）縮約されたという。uとvが同一視されてできた点を再びu（又は，v）と呼ぶことがある。

グラフGに枝の短絡除去をくり返して得られるグラフをGの縮約グラフ（a contraction of G）という。$A \subset V$のとき，$G=(V, E)$の部分木でAの点をすべて含むものをAに対するGのスタイナー木と呼ぶ。

$V' \subset V$が$G=(V, E)$の連結点被覆であるというのは，V'で誘導されるGの誘導部分グラフが連結で，しかも，すべての枝$(u, v) \in E$について$\{u, v\} \cap V' \neq \phi$が成立しているときをいう。グラフGと非負整数kが与えられたとき，Gに大きさk以下の連結点被覆が存在するか否かを決定する問題を連結点被覆問題（connected vertex cover problem）と呼ぶ。この問題はNP－完全であることが知られている[4]。

πをグラフの自明でない性質とする（即ち，πを満たすグラフとπを満たさないグラフが存在する。以下，本論文では自明でない性質のみを取扱う）。グラフGと非負整数kが与えられたとき，Gにk回以下の枝の短絡除去を行いπを満たすグラフを得ることができるか否かを決定する問題を，πに関する枝短絡除去問題（edge-contraction problem with respect to π）と呼ぶ。

本論文で取扱う性質πは，縮約グラフに関して遺伝的であり，かつ，2－連結成分によって決定されるものである。このとき，$K_2 \in \pi$（K_2がπを満たすことを$K_2 \in \pi$と記述

する）としてよい。なぜなら，K_2 を π とすると，枝を少なくとも一本含むようなグラフはすべてπを満たさないことになり，そのような性質πに関する枝短絡除去問題は明らかに多項式時間で解けるからである。

3. 枝短絡除去問題のNP－困難性

NP－完全であることが既に知られている連結点被覆問題が枝短絡除去問題に多項式時間で帰着できることを示すことにより，枝短絡除去問題のかなり広いクラスに対しNP－困難性を証明する。

〔定理1〕　πが縮約グラフに関して遺伝的で，かつ，2－連結成分によって決定されるならば，πに関する枝短絡除去問題はNP－困難である。

（証明）　(G, k) を連結点被覆問題の入力とする。Gは連結であるとしてよい。Gの各枝を長さ2の道で置き替えて得られるグラフを$G(2)$とする。Gに新らたに加えられた点の集合をAとする。即ち，$A = V(G(2)) - V(G)$ である。このとき，Gに大きさk以下の連結点被覆が存在するとき，そしてそのときだけ$G(2)$においてAに対する大きさ$k_1 = m + k - 1$ 以下のスタイナー木が存在することが知られている[4,11]。ここで，mはGの枝の個数であり，木の大きさと

はそこに含まれる枝の個数である。$G(2)$ と k_1 とから以下のようにしてグラフ G' を構成する。まず，π を満たさないグラフで点の個数が最小のものを1個任意に選ぶ。それを M とする。π が2－連結成分によって決定されることより，M は2－連結グラフである。M の枝を任意に1個選ぶ。それを（u，v）とする。M から（u，v）を開放除去して得られるグラフを M_d とする。$G(2)$ において，A の点を任意に選ぶ。それを α とする。α 以外の A の各点 β に対し，次のことを行う。k_1+1 個の M_d のコピーを用意し，各 M_d の点 v を β に，点 u を α に同一視する。従って，$(m-1)\times(k_1+1)$ 個の M_d のコピーが $G(2)$ に付加されることになる。こうして得られたグラフが G' である。図1を参照されたい。この構成法のもとで次の補題が成立する。

〔補題〕　$G(2)$ において A に対する大きさ k_1 以下のスタイナー木が存在するとき，そしてそのときだけ G' において k_1 回以下の枝の短絡除去を行なって π を満たすグラフを得ることができる。

（補題の証明）$G(2)$ において A に対する大きさ k_1 以下のスタイナー木があるとする。それを T_A と記述する。G' において T_A の枝をすべて短絡除去して得られたグラフを G'' とすると，G'' は π を満たしている。なぜなら，G'' において点 α

は切断点（cut point）であり，α に隣接している各2－連結成分は K_2 又は M の点 u と v を同一視して得られたグラフ（u と v を同一視した際に M が2個以上の2－連結成分に分かれるときにはその2－連結成分）である。従って，G'' の2－連結成分はすべて M よりも小さい。ここで，2－連結成分の大きさとは，そこに含まれる点の個数のことである。M の選び方より，これらの2－連結成分はすべて π を満たす。π が2－連結成分により決定されることから G'' は π を満たす。

次に，G' において k_1 回以下の枝の短絡除去により π を満たすグラフが得られたとする。そのグラフを G'_π とすると G'_π において A の点はすべて α に縮約されていなければならない。なぜなら，もし α に縮約されていない点 $\beta \in A$ があったとすると，G' において α と β に付加された k_1+1 個の M_d のうち少なくとも1個は無傷のままで（即ち，変形されずに）G'_π に残っている。従って，G'_π は M を縮約グラフとして持つ。π が縮約グラフに関して遺伝的であることと，M が π を満たさないことから，G'_π は π を満たさない。これは最初の仮定に反する。よって，G'_π において A のすべての点は α に縮約されている。従って，G' において k_1 回以下の枝の短絡除去を行って A のすべての点を α に縮約できることになる。今，α 以外の A の各点 β について，$G(2)$ における α からの

距離（αからの最短の道の長さ）が小さい順に次のことを行う。（Aの2個の点がαから同じ距離にあるときには，それらのあいだの順序は任意でよい。）βをαに縮約させるために短絡除去した枝がM_dの枝であれば（そのような枝があるとすれば2本以上のはずである。M_dにおいて，αとβを直接に結ぶ枝がないことに注意されたい），それらの枝を短絡除去するかわりに，E（G（2））の枝のみをG'から除去してβをαに縮約させる。このとき短絡される枝は高々2本で十分である。なぜなら，G（2）において，Aの各点からαへの道は、1個おきにAの点を含んでいるからである。このようにして，G'において，k_1回以下、E（G（2））の枝を短絡除去することによりAのすべての点を1点に縮約できることがわかった。このことは，G（2）には，Aの点をすべて含む連結サブグラフでk_1回以下の枝の短絡除去によって1点に縮約されるものが存在することを意味する。1回の短絡除去によってグラフの点の個数はちょうど1個減るから、このサブグラフの点の個数は高々k_1+1個である。従って，G（2）にはAに対する大きさk_1以下のスタイナー木が存在する。（補題証明終り）

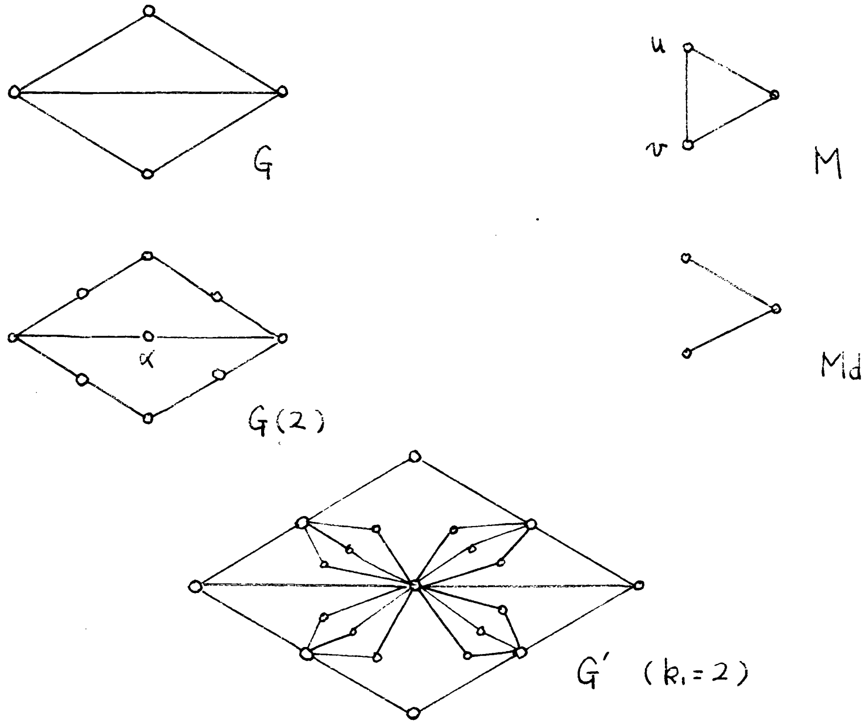

図1　G′の構成法

文　献

1. Aho,A.V.,Hopcroft, J.E., and Ullman, J.D. :The design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1974).
2. Asano, T. : private communication
3. Asano, T. and Hirata, T. :Edge-deletion and Edge-contraction Problems, Proc. 14th Annual ACM Sump. on Theory of Computing (1982). to appear
4. Garey,M.R. and Johnson, D.S. : The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete, SIAM J. Math., 32 (1977) 826-834.
5. Garey, N.R. and Johnson, D.S. : Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1979).
6. Harary, F. :Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass.(1969)

7. Krishnamoorthy, M.S. and Deo, N. :Node-deletion NP-complete problems, SIAM J. Comput., 8 (1979) 619-625.
8. Lewis, J.M. :On the Complexity of the Maximum Subgraph Problem, 10th ACM Symp. on Theory of Computing (1978)265-274.
9. Lewis, J.M. and Yannakakis, M. :The Node-Deletion Problem for Hereditary Properties is NP-Complete, JCSS, 20 (1980)219-230.
10. Watanabe, T., Ae, T. and Nakamura, A. :On the removal of forbidden graphs by edge-deletion or edge-contraction, Discrete Appl. Math., 3 (1981) 151-153.
11. Yannakakis, M. :Node- and edge-deletion NP-complete problems, Proc. 10th Annual ACM Symp. on Theory of Computing (1978) 253-264.
12. Yannakakis, M. :Edge-deletion problems, SIAM J. Comput., 10 (1981) 297-309.