

線型セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチ

東洋大学 工学部

佐藤 忠一

1. まえがき

セル構造オートマトンの局所関数が線型の時、線型セル構造オートマトンという。ここでは、セルの取り得る状態集合として Z_m や有限可換環 R を考える。

Z_m 上と R 上の線型セル構造オートマトンは、多くの共通の性質を持ち、それらの間にはある種の対応が存在する。 Z_m 上の諸結果を R 上に対応させるには、 Z_m 上の概念をイデアル論的な表現に書き直す必要がある。

2. 準備

R 上の線型セル構造オートマトンは、 (Z^k, R, N, f) で与えられ、 Z は整数の集合、 Z^k はセルの集合、 R は各セルが取り得る状態の集合で有限可換環、 N は Z^k の有限部

分集合で, $N = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. N は近傍を表わす。 f は, $R^n \rightarrow R$ の線型写像で $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ である。 f は線型局所関数と呼ばれる。

\mathbb{Z}^k から R への写像を様相という。様相の集合を C と書く。 f に対して、写像 $f_\infty : C \rightarrow C$ を次のように定める。
 $x, y \in C$ に対して、

$$f_\infty(x) = y \Leftrightarrow y(r) = \sum_{j=1}^n a_j x(r+v_j)$$

ここで、 $r+v_1, \dots, r+v_n$ なる n 個のセルは、セル $r \in \mathbb{Z}^k$ の近傍と呼ばれる。 f_∞ を線型並列写像又は線型全域関数と言う。

定義 1

$$f \text{ が単射} \Leftrightarrow f_\infty \text{ が単射}$$

$$f \text{ が全射} \Leftrightarrow f_\infty \text{ が全射}$$

$$f_\infty \text{ が位数有限} \Leftrightarrow \exists n > 0, f_\infty^n = I \text{ (I は恒等写像)}$$

$$f_\infty \text{ が位数無限} \Leftrightarrow f_\infty \text{ は単射かつ } \forall n, f_\infty^n \neq I$$

$$f \text{ が位数有限} \Leftrightarrow \exists \text{ 近傍 } N, f_\infty \text{ が } N \text{ 上で位数有限}$$

$$f \text{ が位数無限} \Leftrightarrow \forall \text{ 近傍 } N, f_\infty \text{ が } N \text{ 上で位数無限}$$

3. 線型局所関数の単射性, 全射性

以下の左側に \mathbb{Z}_m 上の, 右側に R 上の線型セル構造が一

トマトンの結果を並記する。

Σ_m 上のセル構造オートマトン

定義 2 $m = P_1^{r_1} \cdots P_k^{r_k}$ とする。

$f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して θ_j を

$$\theta_j = \{i \mid P_i \nmid a_j\}$$

とする。 $P_i \nmid a_j$ は、 a_j は P_i で割り切れないことを示す。

定理 1 $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が全射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

となることである。

定理 2 $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が単射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \text{ かつ}$$

$i \neq j$ ならば $\theta_i \cap \theta_j = \emptyset$

R 上のセル構造オートマトン

定義 2' R のすべての極大

イデアルを A_1, \dots, A_l とする。

$f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して θ_j を

$$\theta_j = \{i \mid a_j \notin A_i\}$$

とする。

定理 1' $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が全射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

となることである。

定理 2' $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ に対して

f が単射になるための必要十分条件は

$$\bigcup_{j=1}^n \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \text{ かつ}$$

$i \neq j$ ならば $\theta_i \cap \theta_j = \emptyset$

となることである。

となることである。

定理3 $f = \sum_{j=1}^m a_j x_j$ に対して
 f が位数有限になるための
 必要十分条件は、

$$\exists j, \quad \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

かつ $i \neq j$ ならば、 $\theta_i = \emptyset$
 となることである。

定理3' $f = \sum_{j=1}^m a_j x_j$ に対して
 f が位数有限になるための
 必要十分条件は、

$$\exists j, \quad \theta_j = \{1, 2, \dots, l\}$$

かつ $i \neq j$ ならば、 $\theta_i = \emptyset$
 となることである。

定理4 $f = \sum_{j=1}^m a_j x_j$ に対して
 f が位数無限になるための
 必要十分条件は、

$$\bigcup_{j=1}^m \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \quad \text{かつ}$$

$i \neq j$ ならば、 $\theta_i \cap \theta_j = \emptyset$ かつ
 各 θ_j に対して、 $|\theta_j| < l$

定理4' $f = \sum_{j=1}^m a_j x_j$ に対して
 f が位数無限になるための
 必要十分条件は、

$$\bigcup_{j=1}^m \theta_j = \{1, 2, \dots, l\} \quad \text{かつ}$$

$i \neq j$ ならば、 $\theta_i \cap \theta_j = \emptyset$ かつ
 各 θ_j に対して、 $|\theta_j| < l$

系1 $m = p^r$ とする。

この時、単射である線型局所
 関数はすべて位数有限である。

系1' R を局所環とする。

この時、単射である線型局所
 関数はすべて位数有限である。

系2 $m = p_1 p_2 \dots p_\ell$ ($\ell > 1$)

系2' R を2個以上の有

とする。この時、スコープ中
2以上の線型局所関数は、
すべて位数無限である。

定理5 スコープ中 n 以下
の全射である線型局所関数
の個数 $\varphi_n(m)$ は次式で与え
られる。

$$\varphi_n(m) = m^n \prod_{i=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{p_i^n}\right)$$

定理6 スコープ中 n 以下
の単射である線型局所関数
の個数 $\psi_n(m)$ は次式で与え
られる。

$$\psi_n(m) = n^{\ell} \left(\frac{m}{\prod_{i=1}^{\ell} p_i}\right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (p_i - 1)$$

定理7 スコープ中 n 以下
の位数有限の線型局所関数
の個数 $F_n(m)$ は次式で与え
られる。

限体からなる直和環とする。
この時、スコープ中2以上の
線型局所関数は、すべて
位数無限である。

定理5' スコープ中 n 以下
の全射である線型局所関数
の個数 $\varphi_n(R)$ は次式で与え
られる。

$$\varphi_n(R) = |R|^n \prod_{i=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{|R/\mathcal{A}_i|^n}\right)$$

定理6' スコープ中 n 以下
の単射である線型局所関数
の個数 $\psi_n(R)$ は次式で与え
られる。

$$\psi_n(R) = n^{\ell} \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^{\ell} |R/\mathcal{A}_i|}\right)^n \prod_{i=1}^{\ell} (|R/\mathcal{A}_i| - 1)$$

定理7' スコープ中 n 以下
の位数有限の線型局所関数
の個数 $F_n(R)$ は次式で与えら
れる。

$$F_n(m) = n \left(\frac{m}{\prod_{i=1}^r p_i} \right)^n \prod_{i=1}^r (p_i - 1)$$

系 3 スコープ中 n 以下の位数無限の線型局所関数の個数 $I_n(m)$ は次式で与えられる。

$$I_n(m) = (n^e - n) \left(\frac{m}{\prod_{i=1}^r p_i} \right)^n \prod_{i=1}^r (p_i - 1)$$

系 4 位数無限の線型局所関数が存在しないための必要十分条件は、スコープ中が 1 であるか又は $m = p^r$ かのいずれかが成立する。

系 5 スコープ中 n 以下の単射、全射の線型局所関数の個数の比は次式で与えられる。

$$\frac{\psi_n(m)}{\varphi_n(m)} = \frac{n^e}{\prod_{i=1}^r (1 + p_i + \dots + p_i^{n-1})}$$

系 6 次式が成立する。

$$F_n(R) = n \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^r |R_{A_i}|} \right)^n \prod_{i=1}^r (|R_{A_i}| - 1)$$

系 3' スコープ中 n 以下の位数無限の線型局所関数の個数 $I_n(R)$ は次式で与えられる。

$$I_n(R) = (n^e - n) \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^r |R_{A_i}|} \right)^n \prod_{i=1}^r (|R_{A_i}| - 1)$$

系 4' 位数無限の線型局所関数が存在しないための必要十分条件は、スコープ中が 1 であるか又は R が局所環であるかのいずれかが成立する。

系 5' スコープ中 n 以下の単射、全射の線型局所関数の個数の比は次式で与えられる。

$$\frac{\psi_n(R)}{\varphi_n(R)} = \frac{n^e}{\prod_{i=1}^r (1 + |R_{A_i}| + \dots + |R_{A_i}|^{n-1})}$$

系 6' 次式が成立する。

$$F_n(m) / \gamma_n(m) = \frac{1}{n^{e-1}}$$

性質 1 $m = p_1^{r_1} \cdots p_e^{r_e}$ とする。

Z_m においてイデアル $(p_i^{r_i})$

はべき等イデアルであり

$$(p_i) \supseteq (p_i)^2 \supseteq \cdots \supseteq (p_i)^{r_i} = (p_i)^{r_i+1}$$

である。

定理 8 1次元セル空間に

において、全射である $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$

に対して、その並列写像は

定数対1写像であり、この

定数を $|f|_m$ で表わすと $|f|_m$

は次式によって与えられる。

$$|f|_m = \prod_{i=1}^e (p_i^{r_i})^{n_i-1}$$

但し、 n_i は $\text{mod } p_i$ における

f のスコープ中である。

定理 9 1次元セル空間に

において、 $K = \prod_{i=1}^e (p_i^{r_i})^{n_i-1}$ とする。

K 対1写像となるスコープ中

$$F_n(R) / \gamma_n(R) = \frac{1}{n^{e-1}}$$

定義 3' R の極大イデアル A_i

に対して、 A_i によって生成されるべき等イデアル B_i とは

$$A_i \supseteq A_i^2 \supseteq \cdots \supseteq A_i^s = A_i^{s+1}$$

なる時の A_i^s を表わす。

定理 8' 1次元セル空間に

において、全射である $f = \sum_{j=1}^n a_j x_j$

に対して、その並列写像は

定数対1写像であり、この

定数を $|f|_R$ で表わすと $|f|_R$

は次式によって与えられる。

$$|f|_R = \prod_{i=1}^e |R/B_i|^{n_i-1}$$

但し、 n_i は R/A_i における f の

スコープ中である。

定理 9' 1次元セル空間に

において、正の整数 K に対して

$(n_1^{\sharp}, n_2^{\sharp}, \dots, n_e^{\sharp})$ を次式を満足

n 以下の線型局所関数の個数は次式で与えられる。

$$\left(\frac{m}{\prod_{i=1}^l p_i}\right)^n \prod_{i=1}^l (n-n_i+1)(p_i-1) p_i^{2-\lceil \frac{1}{p_i} \rceil \frac{n_i-2+n_i-2}{2}}$$

ここで $\lceil \cdot \rceil$ は ガウス記号

定理10 2次元以上のセル空間において、 f を全射である線型局所関数とする時、次の(1)~(4)は互いに等価である。

- (1) f は単射である
- (2) $|f|_m < \infty$
- (3) $\forall x \in C, |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$
- (4) $\exists x \in C, |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$

する S 個の正の整数の l 組とする。 $1 \leq j \leq S$

$$K = \prod_{i=1}^l |R/B_i|^{n_i^j-1}$$

この時 K 対1写像となるスコープ中 n 以下の線型局所関数の個数は次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^S \left(\frac{|R|}{\prod_{i=1}^l |R_{A_i}|}\right)^n \prod_{i=1}^l (n-n_i^j+1)(|R_{A_i}|-1) |R_{A_i}|^{2-\lceil \frac{1}{p_i} \rceil \frac{n_i^j-2+n_i^j-2}{2}}$$

ここで $\lceil \cdot \rceil$ はガウス記号

定理10' 2次元以上のセル空間において、 f を全射である線型局所関数とする時、次の(1)~(4)は互いに等価である。

- (1) f は単射である
- (2) $|f|_R < \infty$
- (3) $\forall x \in C, |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$
- (4) $\exists x \in C, |f_\infty^{-1}(x)| < \infty$

4. まとめ

\mathbb{Z}_m 上と R 上の線型セル構造オートマトンは、次のような対応が考えられる。

\mathbb{Z}_m	R
$m = p_1^{r_1} \dots p_l^{r_l}$	$ R $
(p_i)	A_i (極大イデアル)
p_i	$ R/A_i $
$(p_i^{r_i})$	B_i (べき等イデアル)
$p_i^{r_i}$	$ R/B_i $
l	R の極大イデアルの個数
n (スコープ中)	n (スコープ中)
$p_i a_j$	$a_j \in A_i$

5. 結論 \mathbb{Z}_m 上の線型セル構造オートマトンを調べれば、 R 上のそれは、ほぼ推定される。