数理解析研究所講究録
第 458 巻 1982 年 266-275

二値画像に対する並列形処理と逐次形処理

豊橋技術科学大学　山下雅史
本多波雄
北橋忠宏
名古屋大学工学部　稲垣康善

1. まえがき　画像を局所的な演算を用いて処理する場合，その処理方法には，画像上の各点を同時に処理する並列形と，画像上の各点をある定まった順序で順に処理する逐次形とがある．従来から，画像，特に二値画像に対する種々の並列形あるいは逐次形処理アルゴリズムが提案されてきたが，両者の間の関係に対する一般論はほとんど展開されていない．そこで我々は，二値画像に対する並列形処理と逐次形処理の関係を考察し，いくつかの結果を得たので報告する．

2. 諸定義と準備　〔記法1〕 i)整数の集合を $\mathbb{Z}$，非負整数の集合を $\mathbb{N}$，自然数の集合を $\mathbb{N}^+$，$[n] = \{1, \cdots, n\}$，$\mathbb{B} = \{0, 1\}$，によって表わす．

ii)領域 X から値域 Y への全域関数の集合を $[X \to Y]$，によ

って表わす． □

〔定義1〕大きさnの二値画像は関数$X : [n]^2 \to \mathbb{B}$である．$X(i,j)$をX_{ij}，$(X)_{ij}$などと書く．$\mathcal{B}_n = [[n]^2 \to \mathbb{B}]$，$\mathcal{B} = \biguplus_n \mathcal{B}_n$． □

〔定義2〕位数mの近傍形はm項組$P = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle$である．ここに，$p_i \in \mathbb{Z}^2$，$p_i \neq p_j \ (i \neq j)$，$p_i \neq (0,0)$．近傍位数$m$の近傍形の集合を$\mathcal{P}_m$，$\mathcal{P} = \biguplus_m \mathcal{P}_m$とする． □

〔記法2〕零ベクトルを$\mathbf{0}$，特に$p_0 = (0,0)$と表わす． □

〔定義3〕近傍位数mの局所関数の集合$\mathcal{F}_m$を$\mathcal{F}_m = [\mathbb{B}^{m+1} \to \mathbb{B}]$とする．$\mathcal{F} = \biguplus_m \mathcal{F}_m$． □

〔定義4〕走査とは関数$S : \mathbb{N}^+ \to [\mathbb{N}^+ \to (\mathbb{N}^+)^2]$である．ここに，$S(n) : [n^2] \to [n]^2$は全単射である． □

〔定義5〕走査Sが近傍$P = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle$に対して正則であるとは，次の条件を満たすことである．

『$\exists M (\subseteq [m]) \forall n (\in \mathbb{N}^+) \forall i (\in [n^2]) \forall j (\in [m]) [S(n)(i) + p_j \in [n]^2 \Rightarrow (j \in M \Leftrightarrow S(n)^{-1}(S(n)(i) + p_j) < i)]$』． □

本稿では，走査は近傍に対して正則なものだけを考察の対象とする．近傍Pに対し正則な走査の集合を$\mathcal{S}(P)$と表わす．

〔記法3〕近傍を$P = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle$，$S \in \mathcal{S}(P)$とする．

$\mathrm{pre}(P, S) = \{ p_k \mid S(n)^{-1}(S(n)(i) + p_k) < i \}$，

$\mathrm{post}(P, S) = \{ p_k \mid S(n)^{-1}(S(n)(i) + p_k) > i \}$, とする. ▯

[定義6] $f \in \mathcal{F}_m$, $P = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$ によって定義される画像の<u>並列変換</u> $\mathrm{Par}(f, P)$ は次のように定義される.
$\forall X \in \mathcal{B}_n$ に対して, $Y = \mathrm{Par}(f, P)(X)$. ここに,
$Y_{ij} = f(X_{ij}, X_{i+\mu_1 j+\nu_1}, \cdots, X_{i+\mu_m j+\nu_m})$, $p_k = (\mu_k, \nu_k)$,
$\forall k (\in [m]) [(i+\mu_k, j+\nu_k) \notin [n]^2 \Rightarrow X_{i+\mu_k j+\nu_k} = 0]$.

又, $\tau^m_{\mathrm{Par}} = \{ \mathrm{Par}(f, P) \mid f \in \mathcal{F}_m, P \in \mathcal{P}_m \}$, $\tau_{\mathrm{Par}} = \bigcup_m \tau^m_{\mathrm{Par}}$, とする. ▯

[定義7] $f \in \mathcal{F}_m$, $P = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$, $S \in \mathcal{S}(P)$ によって定義される画像の<u>逐次変換</u> $\mathrm{Seq}(f, P, S)$ は次のように定義される. $\forall X \in \mathcal{B}_n$ に対して, $Y = \mathrm{Seq}(f, P, S)(X)$.
ここに, Y は以下の手続によって定義される.

<u>for</u> $i := 1$ <u>until</u> n^2 <u>do</u>
　$X_{S(n)(i)} := f(X_{S(n)(i)}, X_{S(n)(i)+p_1}, \cdots, X_{S(n)(i)+p_m})$;
$Y := X$;

ここに, $\forall k (\in [m]) [S(n)(i) + p_k \notin [n]^2 \Rightarrow X_{S(n)(i)+p_k} = 0]$, である.

又, $\tau^m_{\mathrm{Seq}} = \{ \mathrm{Seq}(f, P, S) \mid f \in \mathcal{F}_m, P \in \mathcal{P}_m, S \in \mathcal{S}(P) \}$, $\tau_{\mathrm{Seq}} = \bigcup_m \tau^m_{\mathrm{Seq}}$, とする. ▯

$\mathrm{Seq}(f, P, S)(X)$ は, X の各要素を走査 S に従って, 次々と更新してゆくことによって定義される. 今, X_{ij} を更新

する直前の X を $Seq(f, P, S)_{(i,j)}(X)$ と表わす．

〔性質〕 i) $\forall X_1, X_2 (\in B_n) [Seq(f, P, S)_{(i,j)}(X_1) = Seq(f, P, S)_{(i,j)}(X_2) \Rightarrow Seq(f, P, S)(X_1) = Seq(f, P, S)(X_2)]$．

ii) $\forall S_1, S_2 (\in \mathcal{S}(P)) [pre(P, S_1) = pre(P, S_2) \Rightarrow Seq(f, P, S_1) = Seq(f, P, S_2)]$． ▯

性質(ii)から，逐次変換を決定する上で重要な役割を演ずるのは，走査 S の形ではなく，S によって決定される $pre(P, S)$ であることが理解される．そこで，以下では，近傍 P とその部分集合 L を与えたときに，$pre(P, S) = L$ となる $S \in \mathcal{S}(P)$ が存在するか否かを決定する手続を与える．

〔補題 1〕 $P = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$，$L \subseteq P$ とする．$pre(P, S) = L$ となる $S \in \mathcal{S}(P)$ が存在するか否かは可解である．

（略証） $L = \{p_1, \cdots, p_t\}$ とする．x_i に関する 3 つの方程式を，

$$\sum_{i=1}^{t} p_i x_i = 0 \quad \text{——— (1)}$$

$$\sum_{i=t+1}^{m} p_i x_i = 0 \quad \text{——— (2)}$$

$$\sum_{i=1}^{t} p_i x_i = \sum_{i=t+1}^{m} p_i x_i \quad \text{— (3)}$$

，とするとき，$pre(P, S) = L$ となる $S \in \mathcal{S}(P)$ が存在するための必要十分条件は，方程式(1)～(3)が自明でない非負整数解を持たないことである．

必要性の証明は容易であるので，十分性だけを証明する．

PとLが与えられたとき，$S(n)$ を以下のように構成する．集合 $[n]^2$ 上に半順序 $<_{pre}$ と $<_{post}$ を $\forall j_1, j_2 (\in [n]^2)[((j_1 <_{pre} j_2 \Leftrightarrow \exists (x_1, \cdots, x_t)(\in \mathbb{N}^t - \{0\})[j_1 = j_2 + \sum_{i=1}^{t} P_i x_i]) \wedge (j_1 <_{post} j_2 \Leftrightarrow \exists (x_{t+1}, \cdots, x_m)(\in \mathbb{N}^{m-t} - \{0\})[j_2 = j_1 + \sum_{i=t+1}^{m} P_i x_i]))]$ によって定める．(1)，(2) が非負整数解を持たないから，半順序集合 $([n]^2, <_{pre})$，$([n]^2, <_{post})$ は矛盾なく定まる．又，(3)が非負整数解を持たないから，$(j_1 <_{pre} j_2) \wedge (j_2 <_{post} j_1)$ となる j_1, j_2 は存在しない．そこで，$S(n)$ を，$\forall j_1, j_2 (\in [n]^2)[(j_1 <_{pre} j_2) \vee (j_1 <_{post} j_2) \Rightarrow S(n)^{-1}(j_1) < S(n)^{-1}(j_2)]$ を満足するように構成できる．Sが $pre(P, S) = L$ を満たすことは明らかである．

(1) ～ (3)が自明でない非負整数解を持つか否かは可解である．□

3. 結果

［命題1］ i) $\mathcal{T}^0_{Seq} = \mathcal{T}^0_{Par}$.

ii) $\forall m (\in \mathbb{N})[\mathcal{T}^1_{Seq} \not\subseteq \mathcal{T}^m_{Par}]$.

iii) $\forall m (\in \mathbb{N})[\mathcal{T}^m_{Par} \subsetneq \mathcal{T}^{m+1}_{Par}]$.

（略証） i)，iii) は明らか，ii) について証明する．次のような $Seq(f, P, S) \in \mathcal{T}^1_{Seq}$ を考える．$f(x, y) = x \vee y$，$P = \langle (0, -1) \rangle$，S：TV式走査とする．このとき，$Seq(f, P, S) = Par(g, P')$ となる g, P' は存在しないことを示す．今，$Seq(f, P, S) = Par(g, P')$ を仮定する．明らかに，

$g(0) = 0$ である．$P' = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle$ とし，$n = \max_i \{|p_i|\}$ とする．$X \in \mathcal{B}_{n+1}$ を

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 : & i = j = 1 \\ 0 : & \text{otherwise} \end{cases}$$ と定める．このとき，

$(Seq(f, P, S)(X))_{1\,n+1} \neq (Par(g, P'))_{1\,n+1}$．これは，矛盾である．∎

［命題2］ i) $\mathcal{T}^1_{Par} \subsetneq \mathcal{T}^1_{Seq}$．

ii) $\forall m\ (\in \mathbb{N})\ [\mathcal{T}^2_{Par} \not\subseteq \mathcal{T}^m_{Seq}]$.

iii) $\forall m\ (\in \mathbb{N})\ [\mathcal{T}^m_{Seq} \subsetneq \mathcal{T}^{m+1}_{Seq}]$.

（略証） i) 容易．

ii) 並列変換 $Par(f, P)$ を次のように与える．$f(x, y, z) = x \wedge y \wedge z \in \mathcal{F}_2$，$P = \langle (-1, 0), (1, 0) \rangle \in \mathcal{P}_2$．このとき，$Par(f, P) = Seq(g, P', S)$ となる g, P', S は存在しないことを示す．今，$Par(f, P) = Seq(g, P', S)$ を仮定する．X_1, $X_2 \in \mathcal{B}_{2n-1}$ を，

$$(X_1)_{ij} = \begin{cases} 1 : & (i, j) = (n, n),\ (n \pm 1, n) \\ 0 : & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$(X_2)_{ij} = \begin{cases} 1 : & (i, j) = (n, n),\ (n + 1, n) \\ 0 : & \text{otherwise} \end{cases}$$ ，と定める．

$S(2n-1)$ は，(n, n) を走査した後に $(n \pm 1, n)$ を走査しなければならない．なぜならば，今，$(n-1, n)$ は

(n, n) より先に走査されると仮定すると，$\mathrm{Seq}(g, P', S)_{(n,n)}(X_1) = \mathrm{Seq}(g, P', S)_{(n,n)}(X_2)$．従って，$\mathrm{Seq}(g, P', S)(X_1) = \mathrm{Seq}(g, P', S)(X_2)$．これは，$\mathrm{Par}(f, P)(X_1) \neq \mathrm{Par}(f, P)(X_2)$ に矛盾する．$(n+1, n)$ が (n, n) より先に走査される場合も同様に矛盾が導かれる．従って，$(n \pm 1, n)$ は (n, n) を走査した後に走査される．しかし，この場合も，上の議論の簡単な変形により，矛盾を導くことができる．

iii) $f(x_0, \cdots, x_m) = \bigwedge_i x_i \in \mathcal{F}_m$，$P = \langle p_1, \cdots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$ $(p_i = (1, i-1))$，S : TV 式走査，とする．$\mathrm{Seq}(f, P, S) \notin T^{m-1}_{seq}$ を示す．今，$f' \in \mathcal{F}_{m-1}$，$P' \in \mathcal{P}_{m-1}$，$S' \in \mathcal{S}(P')$ が存在して，$\mathrm{Seq}(f, P, S) = \mathrm{Seq}(f', P', S')$ であると仮定する．今，P' に含まれない P の要素を p_t とする．

X_1，$X_2 \in \mathcal{B}_m$ を

$$(X_1)_{ij} = \begin{cases} 1 : (i, j) = (1, 1), (2, k) \ (k \in [m]) \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases},$$

X_2 : X_1 の $(2, t)$ 要素を 0 に置換えた画像，と定義する．

$\mathrm{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_1)$ と $\mathrm{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_2)$ を比較する．$\mathrm{Seq}(f, P, S)$ の定義から，$\mathrm{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_1)$ と $\mathrm{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_2)$ は $(2, t)$ 要素を除いて等しい．又，$(1, 1)$ 要素に注目しているとき，$(2, t)$ 要素はその近傍

に入らない．従って，$(\mathrm{Seq}(f', P', S')(X_1))_{11} = (\mathrm{Seq}(f', P', S')(X_2))_{11}$．これは，$(\mathrm{Seq}(f, P, S)(X_1))_{11} \neq (\mathrm{Seq}(f, P, S)(X_2))_{11}$ に矛盾する． ∎

次に，並列変換と逐次変換の間の等価変換について考察する．即ち，$f \in \mathcal{F}_m$ と $P \in \mathcal{P}_m$ を与えたとき，$\mathrm{Par}(f, P) = \mathrm{Seq}(g, P, S)$ を満たす g，S が存在するための条件を求める．P とその部分集合 L が与えられたとき，補題1により，$\mathrm{pre}(P, S) = L$ となる S が存在するか否かは可解であったので，考察は S を固定して行なえば十分である．

〔補題2〕 $f \in \mathcal{F}_m$, $P \in \mathcal{P}_m$, $S \in \mathcal{S}(P)$ を与えたとき，$\mathrm{Par}(f, P) = \mathrm{Seq}(g, P, S)$ となる g が存在するか否かは可解である．

（略証） $\mathrm{Par}(f, P) = \mathrm{Seq}(g, P, S)$ となる g が存在するための必要十分条件を与える．$\mathrm{pre}(P, S) = \phi$ ならば容易．従って，$\mathrm{pre}(P, S) = \{p_1, \cdots, p_t\} \neq \phi$ とする．

$\alpha = \{ l\ (\in \mathbb{Z}^2) \mid l = x + y,\ x \in \mathrm{pre}(P, S),\ y \in P \} \cup \mathrm{pre}(P, S)$，$\beta = \mathrm{post}(P, S) \cup \{0\}$，$\gamma = \alpha \cup \beta$，とする．又，$I = \{ (h, i, k, j)\ (\in \mathbb{Z}^4) \mid h, i > 0,\ k, j < 0,\ h - k = i - j \}$ とする．$\xi \in I$ に対して，$w(\xi)$ を，

$w(h, i, k, j) = \{ (\mu, \nu)\ (\in \mathbb{Z}^2) \mid h > \mu > k,\ i > \nu > j \}$ とする．$W = \bigsqcup_{\xi \in I} w(\xi)$．

$\mathbb{U}$（$\in [\gamma \to \mathbb{B}]$），$\ell$（$\in \mathrm{pre}(P, S) \cup \{0\}$）に対して，$\mathbb{U}(\ell) = (u_0, \cdots, u_m)$（$u_i = \mathbb{U}_{\ell + p_i}$）とする．

今，w（$\in \mathbb{W}$）と A（$\in [\beta \to \mathbb{B}]$）を固定する．このとき，$\mathbb{C}(A, w)$（$\subseteq [\gamma \to \mathbb{B}]$）を，

$$\mathbb{C}(A, w) = \{ c \mid (\ell \notin w \Rightarrow c_\ell = 0) \wedge (\ell \in \beta \Rightarrow c_\ell = A_\ell) \}$$

と定める．（$\mathbb{C}(A, w) = \phi$ かもしれない）．更に，

$$\mathcal{R}_b(A, w) = \{ (b_1, \cdots, b_t) (\in \mathbb{B}^t) \mid \exists c \in \mathbb{C}(A, w), f(c(0)) = b, \forall i (\in [t]) [f(c(p_i)) = 1 \wedge p_i \in w \Leftrightarrow b_i = 1 \} (b \in \mathbb{B}),$$

$$\mathcal{R}_b(A) = \bigcup_{w \in \mathbb{W}} \mathcal{R}_b(A, w),$$ と定める．

このとき，g が存在するための必要十分条件は，

『$\forall A$（$\in [\beta \to \mathbb{B}]$）$[\mathcal{R}_0(A) \cap \mathcal{R}_1(A) = \phi]$』，—— (4)

である．

（必要性）命題2（ii）の証明で用いた手法を一般化して適用することにより証明される．

（十分性）（4）を満たす f から g を以下のように構成する．$\forall B = (b_0, \cdots, b_m)$（$\in \mathbb{B}^{m+1}$）に対して，$A$（$\in [\beta \to \mathbb{B}]$）を $A_{p_i} = b_i$（$i = 0, t+1, t+2, \cdots, m$）によって定める．このとき，$g(B)$ の値は，

$$g(B) = \begin{cases} 0 : & (b_1, \cdots, b_t) \in \mathcal{R}_0(A) \\ 1 : & (b_1, \cdots, b_t) \in \mathcal{R}_1(A) \end{cases}$$ ，とする．

このとき，$Par(f, P) = Seq(g, P, S)$ であることは，$R_b(A)$ の定義より明らかである．□

［命題3］ $f \in \mathcal{F}_m$，$P \in \mathcal{P}_m$ を与えたとき，$Par(f, P) = Seq(g, P, S)$ となる g，S が存在するか否かは決定可能である．□

4．あとがき　本稿では，二値画像に対する並列処理および逐次処理によって引起される並列変換と逐次変換の関係を一般的に考察し，

(i) 近傍位数によって分類される，種々の並列変換および逐次変換の族の間の包含関係，

(ii) 並列変換と等価な逐次変換が存在するための必要十分条件，

を与えた．

残された問題としては，逐次変換の等価性判定，多値画像に対する本稿と同種の考察，などがあげられる．

最後に，名古屋大学福村晃夫教授，豊橋技術科学大学鳥脇純一郎教授，平田富夫助手，並びに名古屋大学オートマトン・グループ，パターン認識グループの皆様の御討論に感謝する．