数理解析研究所講究録
第 459 巻 1982 年 10-17

分離正則性について

福岡教育大学　　濃野聖晴

§1. 序.

D, Gをそれぞれ複素空間$\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q$の領域とし，$E\subset D, F\subset G$, $X=(D\times F)\cup(E\times G)$とする。$f(z,w)$を$X$で定義された関数とし，$\{f_m(z,w)\}$, $\mathcal{F}$をそれぞれ$D\times G$で正則な関数列，関数族とする。$H(D\times G)$を$D\times G$で正則な関数全体，$UC(D\times G)$を$D\times G$で広義一様収束する関数列全体，$N(D\times G)$を$D\times G$で正規族である関数族全体とする。

定義1. 各$w\in F$ $(z\in E)$に対して，$f(z,w)$がD (G)で正則であるとき，fはXで分離正則であるといい，$f\in SH(X)$と書く。

定義2. 各$w\in F$ $(z\in E)$に対して，$\{f_m(z,w)\}$がD (G)で広義一様収束するとき，$\{f_m\}$はXで分離広義一様収束するといい，$\{f_m\}\in SUC(X)$と書く。

定義3. 各$w\in F$ $(z\in E)$に対して，$\mathcal{F}$が$D(G)$で正規族であるとき，$\mathcal{F}$はXで分離正規であるといい，$\mathcal{F}\in SN(X)$と書く。

定義1にて$E=D$, $F=G$の場合，

$$\text{“}\ f\in SH(X)\Rightarrow f\in H(D\times G)\ \text{”}$$

が成立する。これはHartogsの正則性定理として良く知られている。定義2, 3にて, $p=q=1$, $E=D$, $F=G$の場合,

$$\text{“} \{f_n\} \in SUC(X) \Rightarrow \{f_n\} \in UC(D \times G) \text{”}$$

$$\text{“} \mathcal{F} \in SN(X) \Rightarrow \mathcal{F} \in N(D \times G) \text{”}$$

が成立する。これはT. Nishino [2] の結果である。次の問題はM. Hukuhara [1] によって差し出された問題である。

問題H1.: 定義1にて, $F=G$の場合,

$$\text{“} f \in SH(X) \Rightarrow f \in H(D \times G) \text{”}$$

なる$E \subset D$を特徴付けよ。

この問題はT. Terada [5], [6] によって解決された。次の問題はJ. Siciak [3] によって差し出され, 解決された。

問題H2: 定義1にて,

“$f \in SH(X) \Rightarrow f$は$X$の近傍$\Omega$に接続出来る。”

なる$E \subset D$, $F \subset G$を特徴付けよ。

定義2, 3に対しても問題H1, H2と類似の問題が考えられる。

問題C1.: 定義2にて, $F=G$の場合,

$$\{f_n\} \in SUC(X) \Rightarrow \{f_n\} \in UC(D \times G)$$

なる$E \subset D$を特徴付けよ。

問題C2.: 定義2において,

$$\{f_n\} \in SUC(X) \Rightarrow {}^{\exists}\Omega : X\text{の近傍}; \{f_n\} \in UC(\Omega)$$

なる$E\subset D$, $F\subset G$を特徴付けよ。

問題N1.:定義3で$F=G$の場合

$$\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow \mathcal{F}\in N(D\times G)$$

なる$E\subset D$を特徴付けよ。

問題N2.:定義3において,

$$\mathcal{F}\in SN(X)\Rightarrow {}^{\exists}\Omega:X\text{の近傍};\ \mathcal{F}\in N(\Omega).$$

なる$E\subset D$, $F\subset G$を特徴付けよ。

問題C1, N1はT. Terada [6]によって既に解決された。ここでは問題C2, N2について言及します。

§2. 定義.

$E\subset\mathbb{C}^q$, $a\in\mathbb{C}^q$とする。各$z\in E$に対して $\sup_{P\in\mathcal{F}}|P(z)|<+\infty$ なる任意の多項式の族$\mathcal{F}$と任意の$\varepsilon>0$に対して,

$$|P(z)|\le Me^{\varepsilon\deg P},\quad |z-a|<\delta,\quad P\in\mathcal{F},$$

を満す定数$M=M(a,\varepsilon)>0$, $\delta=\delta(a,\varepsilon)>0$が存在するとき$E$は$a$で条件$(L_0)$を満すという。任意の正数$r$に対して, $E_r\equiv\{z\in E;\ |z-a|\le r\}$が$a$で$(L_0)$をみたすとき, Eはaで条件(L)をみたすという。EがEの各点で条件(L)をみたすとき$E\in(L)$と書く。

Gを$\mathbb{C}^p$の領域とし, FをGのコンパクト集合とする。

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(G,F)\equiv\{u(w);\ u(w)\text{は}G\text{で多重劣調和関数},\ F\text{上で}\ u(w)\le 0,$$
$$G\text{にて}\ u(w)\le 1\}.$$

$$h_G(w,F) \equiv \varlimsup_{w' \to w} \sup\sup\{u(w') ; u \in \mathfrak{M}\}, \quad w \in G.$$

とする。任意のσ, $0<\sigma<1$に対して, $G_\sigma \equiv \{w \in G ; h_G(w,F)<\sigma\}$が$F \subset G_\sigma \Subset G$をみたすとき, (G,F)は条件(A_0)を満すといい, $(G,F) \in (A_0)$と書く。$G_s \Subset G$, $F \subset G_s \subset G_{s+1}$, $G=\bigcup_{s=1}^{\infty} G_s$, $(G_s,F) \in (A_0)$を満す領域の列$\{G_s\}$が存在するとき, (G,F)は条件(A)をみたすといい, $(G,F) \in (A)$と書く。また$H_G(w,F) \equiv \lim_{s\to\infty} h_{G_s}(w,F)$, $\hat{F}=\hat{F}_G \equiv \{O ; O$は$G-F$の連結成分, $O \Subset G\}$とする。

§3. Siciakの結果

問題H2に関するSiciakの結果を紹介する。

定理S.1. Dを複素平面の領域とし, $E \subset D$をコンパクトGを$\mathbb{C}^g$の領域で, $F \subset G$をコンパクト, $(G,F) \in (A)$とする。このとき, $f \in SH(X)$, $X \equiv (D \times F) \cup (E \times G)$ならば,

(1) $\exists \hat{f} \in H(\Omega)$; $\hat{f}|X = f$, $\Omega \equiv \{(z,w) \in D \times G, H_D(z,E)+H_G(w,F)<1\}$.

(2) ΩはXの正則包である。

定理S.2. D_kを複素平面の領域$(k=1,\cdots,n)$とし, $E_k \subset D_k$を$\partial\hat{E}_k \in (L)$なるコンパクト集合, $X=(D_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) \cup \cdots (E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times D_n)$とする。$f \in SH(X)$ (すなわち, $(z_1,\cdots,z_{k-1},z_{k+1},\cdots z_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_n$に対して$f$は$D_k$で正則, $k=1,\cdots n$) ならば

1°) $^{\exists}\tilde{f} \in H(\Omega)$; $\tilde{f}|X = f$, ただし

$$\Omega \equiv \{(z_1, \cdots, z_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n ;\ h_{D_1}(z_1, E_1) + \cdots + h_{D_n}(z_n, E_n) < 1\}$$

2°) ΩはXの正則包である。

(注) この講演後に判明した事であるが，定理 S.1. において Dが複素空間$\mathbb{C}^p$ ($p \geqq 1$) の場合にSiciak [4]によって問題H2は解決されている。

§4. 問題C2，N2について.

定理1. Dを複素平面の領域とし，$E \subset D$をコンパクト，Gを複素空間$\mathbb{C}^g$の領域，$F \subset G$をコンパクトで $(G, F) \in (A)$ をみたすものとする。このとき $\{f_n(z, w)\} \in SUC(X)$, $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ ならば.

1°) $\{f_n\} \in UC(\Omega)$, $\Omega \equiv \{(z, w) \in D \times G ;\ H_D(z, E) + H_G(w, F) < 1\}$.

2°) ΩはXの正則包である。

定理2. D_kを複素平面の領域 ($k = 1, \cdots, m$) とし，$E_k \subset D_k$を $\partial \hat{E}_k \in (L)$ なるコンパクト集合，$X = (D_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m) \cup \cdots \cup (E_1 \times \cdots \times E_{m-1} \times D_m)$ とする。$\{f_n(z)\} = \{f_n(z_1, \cdots, z_m)\} \in SUC(X)$ (すなわち，$(z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots, z_m) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_m$

に対して，$\{f_m(z_k)\}$ は D_k で広義一様収束する。$(k=1,\cdots,m)$）ならば

1°) $\{f_m\}\in UC(\Omega)$，ただし $\Omega\equiv\{z\in D_1\times\cdots\times D_m;\ h_{D_1}(z_1,E_1)+\cdots+h_{D_m}(z_m,E_m)<1\}$．

2°) Ω は X の正則域である。

定理3．D, E, G, F, X は定理1のものとする。$f\in SN(X)$ ならば次が成り立つ。

1°) $f\in N(\Omega)$，$\Omega\equiv\{(z,w)\in D\times G;\ H_D(z,E)+H_G(w,F)<1\}$

2°) Ω は X の正則域である。

定理4．D_k, E_k $(k=1,\cdots,m)$ X は定理2のものとする。$f\in SN(X)$ ならば，次が成り立つ。

1°) $f\in N(\Omega)$，$\Omega\equiv\{z\in D_1\times\cdots\times D_m;\ h_{D_1}(z_1,E_1)+\cdots+h_{D_m}(z_m,E_m)<1\}$．

2°) Ω は X の正則域である。

定理1～4の証明の概略．

補題1．D を複素空間 $\mathbb{C}^m$ の領域とし，$E\subset D$ を $E\in(L)$ なるコンパクト集合，$\{f_m(z)\}$ を D で正則な関数列で局所一様有界で，E 上で収束するものとする。このとき，$\{f_m\}$ は D で広義一様収束する。

この補題は次の一致の定理を使うことによって、普通のVitaliの定理と同様に示される。

補題2. D, Eは補題1のものとする。$f \in H(D)$のとき、

$$f \equiv 0 \quad (z \in E) \Longrightarrow f \equiv 0 \quad (z \in D).$$

定理1は定理§1で用いられた正則関数の補間多項式近似とベールの定理を使い、補題1の形にもっていき証明される。

補題3. D, E, G, F, X は定理1のものとする。$\mathfrak{F} \in SN(X)$ならば、$\mathfrak{F}$の中の任意の関数列$\{f_n\}$に対して、その部分列$\{g_n\}$で$\{g_n\} \in SUC(X)$なるものが存在する。

この補題は補題1と対角線論法を使うことによって示される。そこで、定理3は補題3と定理1を使うことによって示される。また、定理2, 4は数学的帰納法より示される。

文献

[1] M. Hukuhara, L'extensions du theoréme d'Osgood et de Hartogs, Kansu-hoteisiki oyobi Oyo-kaiseki (1930) P. 48.

[2] T. Nishino, Sur une propriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965) 255-282.

[3] J. Siciak, Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$. Ann. Pol. Mat. 22 (1969) 145-171.

[4] J. Siciak, Extremal plurisubharmonic fonctions in $\mathbb{C}^N$, Ann Pol. Mat. 39. (1981). 175 – 211.

[5] T. Terada, Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe. Publ. of Reser. Inst. for Math. Sci. Vol. 2 (3) (1967) 383 – 395.

[6] T. Terada, Analyticités relatives à chaques variable, J. Math. Kyoto Univ. 12 (2) (1972) 263 – 296.

[7] K. Nôno, Normality of Separately Normal Families, Bull. Fukuoka Univ. of Edu. 31 (3) 13 – 17 (1981).