数理解析研究所講究録
第 459 巻 1982 年 29-57

A型 Gauss-Manin 方程式系

慶応大 理工　石浦信三
上智大 理工　野海正俊

$F(x,t)=x^{\ell}+t_2x^{\ell-2}+\cdots+t_\ell$ $(t=(t_2,\ldots,t_\ell))$ を $A_{\ell-1}$ 型孤立特異点をもつ多項式 x^{ℓ} の versal な変形とし，δ函数の積分 $u=\int\delta(F)dx$ の満たす micro 微分方程式系 — $A_{\ell-1}$ 型 Gauss-Manin 方程式系を考察する。我々は，K. Saito, T. Yano, J. Sekiguchi [5] により導入された flat coordinate system を用いて，その explicit な表示を与える。第1節で，Gauss-Manin 系の構造論を準備したのち，第2節では，A型 flat coordinate system の背後にある分数巾の構造を独立に定式化する。第3節で，前2節の結果を総合して，A型 Gauss-Manin 系の幾つかの表示を与えることにする。ここでは述べられなかったが，第2節の結果を適用して，A型 Gauss-Manin 系の"母函数表示"を構成することができる。これについては，S. Ishiura, M. Noumi [1] を参照されたい。

第1節　Gauss-Manin系の構造

□1.　普遍開折のGauss-Manin系．原点を孤立特異点とする正則函数の芽 $f: X_0=(\mathbb{C}^{n+1},0)\longrightarrow S_0=(\mathbb{C},0)$ の，基底 $T=(\mathbb{C}^{m-1},0)$ 上の開折（unfolding）φ は，可換図式

$$(1.1)\qquad \begin{array}{ccccl} X_0 & \hookrightarrow & X = X_0\times T & & \\ f\downarrow & & \downarrow\varphi & \searrow^{p} & \\ & & & & T \\ S_0 & \hookrightarrow & S = S_0\times T & \nearrow_{q} & \end{array}\qquad p, q \text{ は標準射影.}$$

で，f が φ の埋め込み $S_0\hookrightarrow S$ による引き戻しになるものとして定義される。ここで，X_0 の座標を $x=(x_0,\dots,x_n)$，S_0 の座標を t_1，T の座標を $t'=(t_2,\dots,t_m)$ として，埋め込み写像 $X_0\hookrightarrow X$，$S_0\hookrightarrow S$ は，$t'=0$ で定められるものとする。ファイバー積 $Z=X\times_S T$ を考えれば，図式

$$(1.2)\qquad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q'} & X \\ p'\downarrow & \swarrow\varphi & \downarrow p \\ S & \xrightarrow[q]{} & T \end{array}$$

を得る。φ の t_1-成分を $F_1=F_1(x,t')$ と書くと，$F_1|_{t'=0}=f$ となり，F_1 は f のパラメータ t' についての変形と見做すことができる。

$$(1.3)\qquad F = t_1 - F_1$$

とおく。開折 φ（あるいは，変形 F）が普遍（versal）だと

いうのを，次の infinitesimally versal の条件で定義する：

(1.5) $\left\{\begin{array}{l} \text{偏導函数 } \partial_{t_k}(F)\big|_{t=0} \ (k=1,\dots,m) \text{ が剰余環} \\ \mathcal{O}_{X_0}/(\partial_{x_0}(f),\dots,\partial_{x_n}(f)) \text{ の } \mathbb{C}\text{-線型空間としての} \\ \text{基底をなす。}^{*)} \end{array}\right.$

以下，普遍開折 φ について議論をすすめる。X 上の $(n+1)$-相対微分形式の $\mathcal{O}_X$-加群 $\Omega^{n+1}_{X/T}$ について $\Omega_F=\Omega^{n+1}_{X/T}/dF_1\wedge\Omega^{n}_{X/T}$ とおく。Ω_F の台を，C と書いて，F の <u>critical subset</u> と呼ぶ。偏導函数 $\partial_{x_0}(F_1),\dots,\partial_{x_n}(F_1)$ の生成する $\mathcal{O}_X$ の ideal を I_C とすれば，$\mathcal{O}_C=\mathcal{O}_X/I_C$ で，C は X の部分多様体になっている。一方，S 上の正則ベクトル場のなす $\mathcal{O}_S$-加群 $\mathcal{D}er_S$ について，部分 Lie 環 $\mathfrak{g}=\{\theta\in\mathcal{D}er_S\,;\,[D_{t_1},\theta]=0\}$ を考える。条件 (1.5) は Weierstrass の準備定理を用いて，次の定理に言い換えられる。

<u>**定理**</u> 1. 写像 $\theta\in\mathfrak{g}\mapsto\theta(F)\in\mathcal{O}_X$ は，$\mathcal{O}_T$-同型写像

(1.6) $$\mathfrak{g}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_C\ (\xrightarrow{\sim}\Omega_F,\ \cdot\,dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n)$$

を誘導する。とくに，Ω_F, $\mathcal{O}_C$ は，$\mathcal{O}_T$ 上階数 m の自由加群である。

この定理の系として，$\varphi|_C : C\to S$ は，有限になり，C の φ による像として，F の <u>discriminant</u> D が定まる。D は，S の被約かつ既約な超曲面である。

普遍開折 $\varphi : X\to S$ の Gauss-Manin 系を次の様に定める。

*) 以下，層の記号 $\mathcal{O}_X$, $\Omega^1_{X/T}$ 等で原点での stalk を表わす。

$\varphi|_C$ の有限性から，φ (resp. p') は，${}'T^*S = T^*S - T^*_S S$ 上，T^*X 上の De Rham 系 $\mathcal{O}_X$ (resp. T^*Z 上の $F=0$ に台をもつ代数的 micro 函数の系 $\mathcal{C}_{[F]} = \mathcal{E}_Z \delta(F)$) に関して <u>非特性的</u>である。即ち，$\lambda = (0, dt_1) \in T^*S$ の近傍で，標準写像 $T^*X \xleftarrow{\rho} X \times_S {}'T^*S \xrightarrow{\varpi} {}'T^*S$ (resp. ${}'T^*Z \xleftarrow{\rho'} Z \times_S {}'T^*S \xrightarrow{\varpi'} {}'T^*S$) について

$$(1.7)\qquad \varpi|_{\rho^{-1}(T^*_X X)} : \rho^{-1}(T^*_X X) \longrightarrow {}'T^*S$$
$$(\text{resp. } \varpi'|_{\rho'^{-1}(T^*_{\{F=0\}} Z)} : \rho'^{-1}(T^*_{\{F=0\}} Z) \longrightarrow {}'T^*S)$$

が有限になる。そこで，micro 微分作用素環上の加群 category での <u>直像</u>

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} H_F &= \int_\varphi \mathcal{O}_X \left(= \varpi_*\left(\mathcal{E}_{S\leftarrow X} \underset{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}{\otimes} \pi^{-1}(\mathcal{O}_X)\right)\right) \\ &= \int_{p'} \mathcal{C}_{[F]} = H^{n+1}(\varpi'_* \rho'^{-1} DR^{\bullet}_{Z/S}(\mathcal{C}_{[F]})) \end{aligned}$$

が，λ の近傍で定義できる。H_F を開折 φ (または変形 F) の <u>Gauss-Manin 系</u>という。H_F は，$\mathcal{E}_S$ 上 canonical な生成元 $u = \int \delta(F) dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$ ($\delta(F) dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^{n+1}_{Z/S} \otimes \mathcal{C}_{[F]}$ のコホモロジー類) をもつ，simple holonomic system で，$H_F^{(k)} = \mathcal{E}_S(k)\, u$ ($k \in \mathbb{Z}$) が，その good filtration になる。*) (詳しくは，F. Pham [2] を参照。) このとき，φ の普遍性は，次のシンボルについての定理に言い換えられる。

---

*) 層の記号 H_F, $\mathcal{E}_S$ で $\lambda \in {}'T^*S$ での stalk を表わす。

定理 2. 写像 $\theta \in \mathfrak{g} \longmapsto \theta D_{t_1}^{-1} u \in H_F^{(0)}$ は，$\mathcal{O}_T$-同型写像

(1.9) $\qquad \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)} / H_F^{(-1)}$

を誘導する。とくに，$H_F^{(0)}/H_F^{(-1)}$ は，$\mathcal{O}_T$ 上階数 m の自由加群である。

定理 1, 2 をあわせて

(1.10)
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[dl, "5"'] \arrow[dr, "2"] & \\ H_F^{(0)}/H_F^{(-1)} \arrow[rr, "\sim"] & & \Omega_F \end{tikzcd}$$

という，3つの $\mathcal{O}_T$-加群の同型が，成立するのである。定理 2 の同型を，$H_F^{(0)}$ にもち上げることを考える。シンボル $H_F^{(0)}/H_F^{(-1)}$ が $\mathcal{O}_T$ 上，階数 m の自由加群ということから，micro 微分作用素の準備定理により，H_F (resp. $H_F^{(0)}$) は，$\mathcal{E}_S$ の可換部分環 $\mathcal{O}_T\{\{D_{t_1}^{-1}\}\}[D_{t_1}]$ (resp. $\mathcal{O}_T\{\{D_{t_1}^{-1}\}\}$) の上に，階数 m の自由加群になることが従う。しかも定理 2 により，

(1.11) $\qquad D_{t_k} D_{t_1}^{-1} u \qquad (k=1, \dots, m)$

は，その自由基底を与える。いま，$\mathfrak{g} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} \mathcal{O}_T\{\{D_{t_1}^{-1}\}\}$ の $\mathcal{O}_T\{\{D_{t_1}^{-1}\}\}$-部分加群 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} D_{t_1}^{-1}\{\{D_{t_1}^{-1}\}\}$ を考えよう。$\tilde{\mathfrak{g}}$ の元 P は

(1.12) $\qquad P = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i D_{t_1}^{-i-1} \quad (\theta_i \in \mathfrak{g})$

という表示をもつものである。

定理 3. 写像 $P \in \tilde{\mathfrak{g}} \longmapsto P u \in H_F^{(0)}$ は，$\mathcal{O}_T\{\{D_{t}^{-1}\}\}$-左加群としての同型

(1.13) $\qquad \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)}$

を与え，そのシンボルをとると同型（1.9）が得られる。

こうして得られた同型写像（1.13）が，普遍開折の Gauss-Manin 系の構造を，完全に記述する。

□2. Flatな座標系と，対数的ベクトル場．同型写像 $\tilde{g} \xrightarrow{\sim} H_F^{(0)}$ を通して，g 上に幾つかの演算を導入する。自己準同型写像 $A_k \in End_{\mathcal{O}_T}(g)$，双線型写像 $B_k \in Hom_{\mathbb{C}}(g, g; g)$ $(k \in \mathbb{N})$ を次の様に定める。$\theta, \theta' \in g$ として，

$$(2.1) \quad \begin{cases} t_1 \theta D_{t_1}^{-1} u = \sum_{i=0}^{\infty} A_k(\theta) D_{t_1}^{-k-1} u \\ \theta\theta' D_{t_1}^{-2} u = \sum_{i=0}^{\infty} B_k(\theta, \theta') D_{t_1}^{-k-1} u \end{cases}$$

とおくのである。$A_0(\theta)$, $A_1(\theta)$ を他の A_k $(k \geq 2)$ と区別して，$t_1 * \theta$，$N(\theta)$ と書く。$\mathcal{D}er_S = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_T} g$ により，$\mathcal{D}er_S$ の $\mathcal{O}_S$-自己準同型写像

$$(2.2) \quad \begin{cases} t_1 * : \mathcal{D}er_S \longrightarrow \mathcal{D}er_S \\ N \ : \mathcal{D}er_S \longrightarrow \mathcal{D}er_S \end{cases}$$

に係数拡大する。同様に，$B_0(\theta, \theta')$，$B_1(\theta, \theta')$ を他の B_k $(k \geq 2)$ と区別して，$\theta * \theta'$，$\nabla_\theta(\theta')$ と書くことにする。$*$ について g は $\mathcal{O}_T$-可換環になり，$\nabla : g \times g \to g$ については $a \in \mathcal{O}_T$，$\theta, \theta' \in g$ として，

$$(2.3) \quad \begin{cases} 0) \ \nabla_{a\theta}(\theta') = a \nabla_\theta(\theta') \\ 1) \ \nabla_\theta(a\theta') = \theta(a)\theta' + a \nabla_\theta(\theta') \\ 2) \ \nabla_\theta(\theta') - \nabla_{\theta'}(\theta) = [\theta, \theta'] \end{cases}$$

という性質が確かめられる。$\mathcal{D}er_S = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathfrak{g}$ により，係数拡大して，$*$ について $\mathcal{D}er_S$ は $\mathcal{O}_S$-可換環，$\nabla : \mathcal{D}er_S \times \mathcal{D}er_S \to \mathcal{D}er_S$ は，torsion free な<u>接続</u>（connection）になる。しかも，D_{t_1} は，$\mathcal{D}er_S$ の単位元であり，$\nabla_\theta(D_{t_1}) = 0$ $(\theta \in \mathcal{D}er_S)$ が成り立つ。このとき，次の compatibility が成立する。

<u>命題</u> 1. $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}er_S)$ における関係式として

(2.4)
$$1)\ [\nabla_{\theta_1}, \theta_2 *] - [\nabla_{\theta_2}, \theta_1 *] = [\theta_1, \theta_2] *$$
$$2)\ [\nabla_\theta, t_1 *] + [\theta *, N] = \theta(t_1) - \theta * .$$

ここで，$\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D}er_S$.

接続 ∇ を導入することにより，flat な座標系という概念を明確にすることができる。その基礎となるのは次の命題である。

<u>命題</u> 2. i) $B_2(\theta, \theta') = 0$ $(\theta, \theta' \in \mathfrak{g})$ であれば，∇ は $\mathcal{D}er_S$ 上の積分可能な接続である。即ち

(2.5)
$$[\nabla_\theta, \nabla_{\theta'}] = \nabla_{[\theta, \theta']} \quad (\theta, \theta' \in \mathcal{D}er_S).$$

ii) さらに，$A_2(\theta) = 0$ $(\theta \in \mathfrak{g})$ であれば，

(2.6)
$$[\nabla_\theta, N] = 0 \qquad (\theta \in \mathcal{D}er_S)$$

が成り立つ。

∇ が積分可能であれば，$\mathcal{D}er_S$ の ∇ に関する horizontal subspace $V = \{\theta \in \mathcal{D}er_S ; \nabla_{\theta'}(\theta) = 0\ (\theta' \in \mathcal{D}er_S)\}$ は，$\mathfrak{g}$ に含まれる m 次元 $\mathbb{C}$-線型空間になる。∇ は torsion free なので，

$[V, V] = 0$ となり、$\mathcal{O}_S$ の座標系 $y = (y_1, \dots, y_m)$ で $V = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{C} D_{y_i}$ を満たすものが，$\mathbb{C}$ 上の線型変換を除いて一意に決まる。この様な座標系を，flat な座標系という。（K. Saito [3],[4] を参照。）

次に，$\mathcal{O}_S$-準同型写像 $w \in End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S)$ を，

(2.7) $\quad w(\theta) = t_1\theta - t_1 * \theta \quad (\theta \in \mathcal{D}er_S)$

で導入する。$\Delta := \det(w)$ は，discriminant D の定義方程式を与える。ベクトル場 $\theta \in \mathcal{D}er_S$ は，$\theta(\Delta) \in \mathcal{O}_S \Delta$ となるときに，D に沿って対数的であるといい，その全体を $\mathcal{D}er_S(\log D)$ と記す。このとき，w が，$\mathcal{D}er_S$ から $\mathcal{D}er_S(\log D)$ の上への $\mathcal{O}_S$-同型を与えることを見よう。

そのために，$End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S)$ 上の接続 ∇ を

(2.8) $\quad \nabla_\theta(v) = [\nabla_\theta, v] \quad (\theta \in \mathcal{D}er_S,\ v \in End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S))$

で定めておくことにする。

命題3. $End_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{D}er_S)$ における関係式として

1) $[w, \theta *] = 0$

(2.9) 2) $\nabla_\theta(w) = [\theta *, N] + \theta *$

3) $\nabla_{w(\theta)}(w) = w \circ \nabla_\theta(w) + [w, N \circ \theta *]$

が成り立つ。ここで $\theta \in \mathcal{D}er_S$ である。

以上の定式化の下に，次の定理を示すことができる。

<u>定理</u>4. w と Δ について

(2.10) $$w(\theta)(\Delta) = \theta(\mathrm{tr}(w))\Delta \qquad (\theta \in \mathcal{D}er_S)$$

とくに，wは，$\mathcal{D}er_S$から$\mathcal{D}er_S(\log D)$の上への同型写像である。

<u>付記</u> fが重みつき斉次多項式のときには，$H_F^{(0)}$が$\mathcal{O}_S$上階数mの自由加群となることが知られる。そのときには，写像$\theta \in \mathcal{D}er_S \mapsto \theta D_{t_1}^{-1}u \in H_F^{(0)}$が$\mathcal{O}_S$-同型になるので，$w(\theta)D_{t_1}^{-1}u \in H_F^{(-1)}$ $(\theta \in \mathcal{D}er_S)$から，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}er_S(\log D) & \longrightarrow & \mathcal{D}er_S \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ H_F^{(-1)} & \longrightarrow & H_F^{(0)} \end{array}$$

が可換になり，写像$\theta \in \mathcal{D}er_S(\log D) \mapsto \theta D_{t_1}^{-1}u \in H_F^{(-1)}$も$\mathcal{O}_S$-同型になる。このことは，Gauss-Manin系H_Fと，discriminantの巾Δ^sの満す方程式系の構造上の類似を示唆している。

<u>付記</u>2. □2で展開した議論は，$\lambda = (0, dt_1) \in {}'T^*S$の近傍で定義され，シンボルが$\mathcal{g}$と$\mathcal{O}_T$-同型であるような一般のsimple holonomic systemに対して有効である。

第2節．分数巾の構造とDuality

この節では，A型Gauss-Manin系のflat coordinate systemとflat basisの背後にある分数巾の構造を，"F-系列""F-系列"という概念で抽象し，系統的に論ずる。論理的には他の節とは独立である。

□0. 環$k((x^{-1}))$とresidue． 単位元1をもつ可換環kに不定元xを添加して巾級数環$R=k((x^{-1}))=:k[[x^{-1}]][x]$を考える．$R$は，巾級数

$$(0.1)\qquad \varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i x^{m-i}\qquad(\varphi_i\in k,\ m\in\mathbb{Z})$$

の全体で，表示(0.1)で$\varphi_0\neq 0$のときmをφの次数といい$m=\deg(\varphi)$とかく。また，$\varphi_0=1$のときφはmonicであるという。次数によるフィルターづけ

$$(0.2)\qquad (R(m))_{m\in\mathbb{Z}}\qquad R(m)=k[[x^{-1}]]x^m$$

によって，Rは分離かつ完備な位相環である。従って，φがmonicのとき，$p,q\in\mathbb{Z}$ ($q>0$, $q\mid\deg(\varphi)$)について，$\psi^q=\varphi^p$となるmonicな$\psi\in R$が一通りに求まる。$\psi=\varphi^{\frac{p}{q}}$とかこう。微分型式の$R$-加群$\Omega^1_{R/k}$ $(=R\,dx)$上のresidue symbol $\mathrm{Res}_{R/k}$がつぎの性質で一意に定まる。(表示(0.1)でいえば，$\mathrm{Res}_{R/k}(\varphi\,dx)$は，$x^{-1}$の係数$\varphi_{m+1}$に他ならない。)

(0.3)
R0) $\mathrm{Res}_{R/k} : \Omega^1_{R/k} \to k$ は k-準同型
R1) $\mathrm{Res}_{R/k}(d\varphi) = 0 \quad (\varphi \in R)$
R2) $\mathrm{Res}_{R/k}(\varphi^{-1} d\varphi) = \deg(\varphi) \quad (\varphi \in R^* =$ Rの可逆元全体$)$

この residue については、次の Cauchy 積分表示が成立する。ξを不定元として、

(0.4) $\quad \varphi(x)_+ = \mathrm{Res}_{R((\xi^{-1}))/R}\left(\dfrac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\xi - x}\right) \quad (\varphi \in R)$

ここに、$\varphi(x)_+$ は、展開 (0.1) の x に関する多項式部分 $\sum_{i=0}^{m} \varphi_i x^{m-i}$ である。

□1. <u>Σ-系列と Duality</u>. $e \in A =: k[x]$ を n 次の monic な多項式とする。$a, b \in A$ について

(1.1) $\quad \langle a, b \rangle =: \mathrm{Res}_{R/k}\left(\dfrac{a b\, dx}{e}\right) \in k$

とおくと、$\langle\ \rangle$ は $B =: A/Ae$ 上の perfect pairing $\langle\ \rangle : B \times B \to k$ を誘導する。この双対性に注目し、Bが自己双対的な k-基底を構成することを考える。k-加群としての同型 $A(n-1) = A \cap R(n-1) \cong B$ で、$A(n-1)$ と B とを同一視し、$e_i \in A(n-1)$, $\deg(e_i) = i$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ が、Bの k-基底をなすものとする。$e_i^* \in A(n-1)$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ が $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$ を満すことと、次の等式

(1.2) $\quad \dfrac{e(\xi) - e(x)}{\xi - x} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(x)\, e_i^*(\xi)$

とは同値である。このとき、e_i は i 次で主係数は可逆，e_i^* は $(n-1-i)$ 次で主係数は可逆となる。しかも、$a \in A$ の e

による割算

(1.3) $\quad a = q(a)e + r(a) \qquad q(a) \in A,\ r(a) \in A(n-1)$

は、(e_i) と双対 (e_i^*)、residue symbol を用いて

(1.4) $$\begin{cases} q(a)(x) = (ae^{-1})_+(x) = \mathrm{Res}_{k((\xi^{-1}))/k}\left(\dfrac{a(\xi)\,d\xi}{e(\xi)(\xi - x)}\right) \\ r(a) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \langle a, e_i^* \rangle e_i = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Res}_{B/k}\left(\frac{a e_i^* dx}{e}\right) e_i \end{cases}$$

と表わせる。B の k-基底 (e_i) は、$e_i^* = e_{n-1-i}$ となるときに自己双対的ということにすれば、これは (1.2) により、

(1.5) $$\frac{e(\xi) - e(x)}{\xi - x} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(x) e_{n-1-i}(\xi)$$

が成立することと同等である。自己双対的な基底の概念を、無限系列に延長して次の定義を設ける。

<u>定義</u> 1. $A = k[x]$ の元の系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ が、次の 2 条件を満すとき、$(e_i)_{i=0}^{\infty}$ は <u>E-系列</u> をなすという。

$$\begin{cases} \text{E0)} & e_i \text{ は、} i \text{ 次 monic} \\ \text{E1)} & 0 \leq i, j < k \text{ について } \mathrm{Res}_{B/k}\left(\dfrac{e_i e_j}{e_k}\right) = \delta_{i,\,k-1-j} \end{cases}$$

(条件 E1) は、A/Ae_k で、$e_0, \cdots, e_{k-1}$ が自己双対的ということに他ならない。)

E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ (e_i: i 次 monic の多項式) について、母函数

(1.6) $$E(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(x) \lambda^i \in A[[\lambda]]$$

を用いると、条件 E1) は (1.5) により

(1.7) $$\frac{E(\xi, \lambda) - E(x, \lambda)}{\xi - x} = \lambda E(\xi, \lambda) E(x, \lambda)$$

と書け，(1.7) が成り立てば，$\xi = x$ として，$\partial_x E(x,\lambda) = \lambda E(x,\lambda)^2$ を得る。そこで $Z(x,\lambda) = E(x,\lambda)^{-1} \in A[[\lambda]]$ とおくと，$\partial_x Z(x,\lambda) = -\lambda$ ゆえ，$Z(x,\lambda) = Z(\lambda) - x\lambda$，ただし $Z(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} z_i\lambda^i$ $(z_i \in k)$ と表わせる。逆も言えて，

命題1. A の monic な多項式の系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ $(\deg e_i = i)$ が E-系列をなす必要十分条件は，k の元の系列 $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ があり，

$$e_i(x) = (Z(\lambda) - x\lambda)^{-1} \text{ の } \lambda^i \text{ の係数}$$

と表わせることである。

E-系列は，このように $(z_i)_{i=0}^{\infty}$ でパラメータづけられる。この $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ が "flat coordinate system" と呼ぶべきものであるが，次節以降で再定式化する。

□2. F-系列と分数巾の構造

以下，k は可換な $\mathbb{Q}$-代数。

定義2. $A = k[x]$ の元の列 $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ が，

F0) F_i は，i 次 monic

F1) $i \le j$ について，$\frac{1}{i}\partial_x(F_i)F_j - \frac{1}{j}\partial_x(F_j)F_i$ は，高々 $(j-2)$ 次

という2条件を満すとき，F-系列をなすという。

ここで条件 F1) は，$i \le j$ について，

(2.1) $$\frac{1}{i}F_i^{-1}\partial_x(F_i) \equiv \frac{1}{j}F_j^{-1}\partial_x(F_j) \quad \mathrm{mod.}\ R(-i-2)$$

とかけるから，$F_i^{1/i} \equiv F_j^{1/j}$ mod. $R(-i)$ と書けば

(2.2) $\qquad \zeta = \lim_{i\to\infty} F_i^{1/i} \ ; \quad \zeta \equiv F_i^{1/i} \ \mathrm{mod.}\ R(-i)$

なる極限として、1次の monic な級数 $\zeta = x + \zeta_1 + \zeta_2 x^{-1} + \cdots$ が定まる。

命題2. F-系列 $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ と、1次 monic な級数 ζ とは

$$F_i(x) = \zeta(x)^i_+$$

によって、1対1に対応する。

この1次 monic な ζ を、

(2.3) $\qquad \zeta = x + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i x^{1-i} \quad (\zeta_i \in k)$

と展開すると、上の命題は、F-系列が k の元の系列 $(\zeta_i)_{i=1}^{\infty}$ によってパラメータ付けられることを主張している。一方、$F_i = (\zeta^i)_+$ から、

命題3. F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$、derivation $\theta : k \to k$ について、$i \le j$ に対し、多項式 $\theta(F_i)\partial_x(F_j) - \theta(F_j)\partial_x(F_i)$ は高さ $(j-2)$ 次。

が、従う。また、E-系列との関係は、つぎの通りである。

(2.3) の ζ について、

(2.4) $\qquad e_i = (\zeta^i \partial_x(\zeta))_+ = \frac{1}{i+1}\partial_x(F_{i+1}) \quad (i \geq 0)$

とおこう。$0 \le i, j \le k$ のとき、$e_i e_j e_k^{-1} \equiv \zeta^{i+j-k}\partial_x(\zeta)$ mod. $R(-2)$ なので、

$$\mathrm{Res}_{R/k}\left(\frac{e_i e_j\, dx}{e_k}\right) = \mathrm{Res}_{R/k}(\zeta^{i+j-k} d\zeta) = \delta_{i+j-k,-1}$$

となり、$(e_i)_{i=0}^{\infty}$ は E-系列になる。

命題 4. E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ と、1次 monic な級数 f とは、(2.4) により1対1に対応する。

こうして、1次 monic な級数 f と、F-系列 $(f_i)_{i=1}^{\infty}$、E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ とは、互いに同等な対象であることが判る。

□3. $f(x)$ の反転. 1次 monic な級数

(3.1) $$f(x) = x + \sum_{i=1}^{\infty} f_i x^{1-i} \in k((x^{-1})) \quad (f_i \in k)$$

に対して、巾級数

(3.2) $$g(y) = y - \sum_{i=1}^{\infty} z_i y^{1-i} \in k((y^{-1})) \quad (z_i \in k)$$

を、f の逆として定める。

(3.3) $$(g\circ f)(x) = x \qquad (f\circ g)(y) = y$$

すなわち、$g(y)$ は R の生成元として、$y=f(x)$ をとり、x を y の級数として解いたもので、この意味で $R = k((x^{-1})) = k((y^{-1}))$。

上の関係で、$(f_i)_{i=1}^{\infty}$ からきまる $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ は、f に付随する F-系列、E-系列を調べる上で重要な役割をもつ。各 $z_i \in k$ は、f_j $(1 \le j \le i)$ の多項式として定まる。$z_1 = f_1$、$i \ge 2$ では、

$$z_i = -(g(y) \text{ の } y^{1-i} \text{ の係数}) = -\mathrm{Res}_{R/k}(y^{i-2} g(y)\,dy)$$
$$= -\mathrm{Res}_{R/k}(f(x)^{i-2}x\,df(x)) = -\frac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{R/k}(x\,df(x)^{i-1})$$
$$= \frac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{R/k}(f(x)^{i-1}dx)$$

母函数 $\varphi(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \lambda^i \in k[[\lambda]]$ を用いると、$f(x) = x\varphi(x^{-1})$ から、$z_i = \frac{1}{i-1}\varphi(\lambda)^{i-1}_i := \frac{1}{i-1}\varphi(\lambda)^{i-1}$ の λ^i の係数。(以後 λ の巾級数 $\Phi(\lambda)$ の λ^i の係数を $\Phi(\lambda)_i$ と記す。)こうして、

命題5 上の記号の下に、$f_1 = z_1$、$i \geq 2$ に対し、

$$\begin{cases} z_i = \dfrac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{R/k}(f(x)^{i-1}dx) = \dfrac{1}{i-1}f(\lambda)^{i-1}_i \\ f_i = \dfrac{-1}{i-1}\mathrm{Res}_{R/k}(g(y)^{i-1}dy) = \dfrac{-1}{i-1}z(\lambda)^{i-1}_i \end{cases}$$

ここで、$f(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \lambda^i$, $z(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} z_i \lambda^i$。

次に、f に附随する F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$、E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ を、$(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を用いて表わす。不定元 ξ を添加し、$S = R((\xi^{-1}))$ で、

$$F_i(x) = f(x)^i_+ = \mathrm{Res}_{S/R}\left(\frac{f(\xi)^i d\xi}{\xi - x}\right)$$
$$= \mathrm{Res}_{S/R}\left(\frac{\eta^i \partial_\eta g(\eta)\, d\eta}{g(\eta) - x}\right) = \left(\frac{\eta \partial_\eta g(\eta)}{g(\eta) - x}\right) \text{ の } \eta^{-i} \text{ の係数}$$

を、$i \geq 1$ で得る。（変数変換 $\xi = g(\eta)$ を用いた。）$g(\eta) = \eta z(\eta^{-1})$ なので、母函数 $z(\lambda)$ により、

$$F_i(x) = \left[\frac{-\lambda \partial_\lambda (z(\lambda) - x\lambda)}{z(\lambda) - x\lambda}\right]_i$$
$$= -\lambda \partial_\lambda \log (z(\lambda) - x\lambda)_i .$$

そこで、新たに母函数

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x) \lambda^i \in k[x][[\lambda]]$$

を導入すると、つぎの定理を得る。

定理1. 1次 monic な $f \in k((x^{-1}))$ について、$(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を上記の通りに定める。f の付随する F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$、E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ は、母函数の間の関係式として、

i) $F(x, \lambda) = -\lambda \partial_\lambda \log (z(\lambda) - x\lambda)$

ii) $E(x, \lambda) = (z(\lambda) - x\lambda)^{-1}$

と表現される。

$\partial_x(F_i) = i e_{i-1}$ ($i \geq 1$) に注意すれば、ii) は i) から従う。
この ii) は、命題1のパラメータづけに別の意味を与えるものである。この項の終わりに、具体計算に有用な、命題5と並行する反転公式を与える。

<u>命題</u>6 任意の $i, j \in \mathbb{Z}$ について、

$$\frac{1}{i} s(\lambda)^i_{i+j} = \frac{-1}{j} z(\lambda)^j_{i+j}.$$

が成り立つ。

□4. <u>flat coordinate system</u>. 前項の $s = (s_i)_{i=1}^\infty$ を"座標系"と考え、k として可算変数の多項式環 $\mathbb{Q}[s] = \mathbb{Q}[s_1, s_2, \cdots]$ をとる。(3.1) で $f = s$ とり、対応する $z_i \in \mathbb{Q}[s]$ ($i \geq 1$) を考える。$s = (s_i)_{i=1}^\infty$ の多項式 $z_i = z_i(s)$ は、

(4.1) $$z_i(0) = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial s_j} = \delta_{ij} \quad (i \leq j)$$

を満すので、$z = (z_i)_{i=1}^\infty$ は、$k = \mathbb{Q}[s]$ の代数的に独立な生成系を与える。この意味で、$z = (z_i)_{i=1}^\infty$ を $s = (s_i)_{i=1}^\infty$ に伴う flat coordinate system という。($k = \mathbb{Q}[s] = \mathbb{Q}[z]$)
このとき、f に伴う F-系列 $(F_i)_{i=1}^\infty$、E-系列 $(e_i)_{i=1}^\infty$ について、

(4.2) $$\partial_{z_i}(F_j) = j e_{i-j} \quad (i, j \geq 1,\ i < 0 \text{ では } e_i = 0)$$

となることが判る。一般に、$k = \mathbb{Q}[s]$ の代数的に独立な、$\mathbb{Q}$-代数の生成系を、座標と呼べば、つぎの定理が成立する

定理 2. $s = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ に伴う flat coordinate system $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ は，(4.1)(4.2) を満す唯一の $k = \mathbb{Q}[s]$ の座標として，特徴づけられる。

A 型 Gauss-Manin 系の flat coordinate system は，以下の様に，$(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を "reduce" して得られる。l を固定し，$t = (t_2, \cdots, t_l)$ を変数とする多項式環 $k = \mathbb{Q}[t] = \mathbb{Q}[t_2, \cdots t_l]$ で，l 次多項式

(4.3) $\quad F = x^l + t_2 x^{l-2} + \cdots + t_l \in k[x]$

を考える。$k((x^{-1}))$ で，(4.3) の分数巾

(4.4) $\quad s = F^{1/l} = x + s_2 x^{-1} + s_3 x^{-2} + \cdots$

をとることができて，s に付随する F-系列 $(F_i)_{i=1}^{\infty}$，E-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ 及び $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ を考えることができる。このとき，

(4.5) $$F_i = (F^{\frac{i}{l}})_+$$
$$e_i = \frac{1}{i+1}\partial_x (F^{\frac{i+1}{l}})_+ = \frac{1}{i+1}\partial_x (F_{i+1})$$

、とくに，$F_l = F$，$e_{l-1} = \frac{1}{l}\partial_x(F)$ である。また，$z_1 = 0$，

(4.6) $$z_i = \frac{1}{i-1}\mathrm{Res}_{k((x^{-1}))/k}(F^{\frac{i-1}{l}}) \quad (i \geq 2)$$

で，$\frac{\partial z_i}{\partial t_j} = l\delta_{ij}$ $(i \leq j)$ が判る。従って，$(z_2, \cdots, z_l)$ を $k = \mathbb{Q}[t]$ の新たな座標として とることができる。($i > l$ について，z_i は $(z_2 \cdots, z_l)$ の多項式となる。) このとき，定理 2 に対応して，

(4.7) $\quad \partial_{z_i}(F) = l e_{l-i} \quad (2 \leq i \leq l)$

が成り立つ。通常，Jacobi行列式が1となるように，$y_i = \ell z_i$ $(2 \leq i \leq \ell)$ とおいて，$y = (y_2 \cdots, y_\ell)$ を，$t = (t_2 \cdots t_\ell)$ に伴う $A_{\ell-1}$ 型 flat coordinate system と呼んでいる。(これは．K. Saito, T. Yano, J. Sekiguchi [5] の意味の，$A_{\ell-1}$ 型 "flat generator system" に一致する。) この flat coordinate system $y = (y_2, \cdots y_\ell)$ を用いて，

$$
(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = -\ell \log(1 - \frac{1}{\ell}\sum_{i=2}^{\ell} y_i \lambda^i - x\lambda)_\ell \\ e_i = \partial_{y_{\ell-i}}(F) = (1 - \frac{1}{\ell}\sum_{i=2}^{\ell} y_i \lambda^i - x\lambda)^{-1}_i \\ \quad (0 \leq i \leq \ell) \end{array} \right.
$$

が，定理1から従う。また，(4.7) は，

$$
(4.9) \quad \partial_{y_i}(F) = e_{\ell-i} \quad (2 \leq i \leq \ell)
$$

にかわる。座標 $t = (t_2, \cdots, t_\ell)$ と $y = (y_2 \cdots, y_\ell)$ の間の変換公式は，$s(\lambda) = (1 + \sum_{i=2}^{\ell} t_i \lambda^i)^{1/\ell}$ を，媒介にして，命題6により，計算される。

$$
(4.10) \quad y_i = \frac{\ell}{i-1}(1 + \sum_{j=2}^{\ell} t_j \lambda^j)^{\frac{i-1}{\ell}}_i \quad (2 \leq i \leq \ell)
$$

$$
(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_i = \frac{-\ell}{i-\ell}(1 - \frac{1}{\ell}\sum_{j=2}^{\ell} y_j \lambda^j)^{i-\ell}_i \quad (2 \leq i \leq \ell-1) \\ t_\ell = -\ell \log(1 - \frac{1}{\ell}\sum_{j=2}^{\ell} y_j \lambda^j)_\ell \end{array} \right.
$$

となる。

第3節. A型 Gauss-Manin系の構造

この節では、1節の議論をA型Gauss-Manin系の場合に具体化し、2節で示した公式により、A型Gauss-Manin系の係数の表示式を与える。

□1. A型Gauss-Manin系の flat basis, flat coordinate system. $A_{\ell-1}$型孤立特異点をもつ多項式 x^ℓ $(\ell \geq 2)$ の versal な変形

(1.1) $$F(x,t) = x^\ell + t_2 x^{\ell-2} + \cdots + t_\ell \qquad t = (t_2, \dots, t_\ell)$$

の Gauss-Manin系 H_F を考察する。$t' = (t_2 \cdots t_{\ell-1})$ とおき、座標 (x, t')（または t, t'）をもつ、アフィン空間を、X (S, T) で表わす。$F_1(x,t') = F(x,t) - t_\ell$ とおくと普遍開折

(1.2) $$\varphi : X \to S, \quad \varphi(x,t') = (t', -F_1(x,t'))$$

についての De Rham系 $\mathcal{O}_X$ の積分として定まる $\mathcal{E}_S$-加群が Gauss-Manin系である。第1節と同様、$T^*S \ni (0, dt_\ell)$ での芽で考えることとする。$\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x, t'\}$, $\mathcal{O}_S = \mathbb{C}\{t\}$, といった記法も同様である。$F$ の versality から、階数 $(\ell-1)$ の3つの $\mathcal{O}_T$-自由加群

$$\mathfrak{g} = \{\Theta \in \mathcal{D}_{\mathfrak{C}} ; [D_{t_\ell}, \Theta] = 0\}$$

(1.3) $\Omega_F = \Omega^1_{X/T} / dF_1 \wedge \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X / \partial_x(F) = \mathcal{O}_C$

$H_F^{(0)} / H_F^{(-1)}$

の間の、$\mathcal{O}_T$-同型

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega_F \\ & \overset{\sim}{\nearrow} & \wr\!\wr \\ \mathfrak{g} & & \\ & \underset{\sim}{\searrow} & H_F^{(0)}/H_F^{(-1)} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & [\Theta(F)dx] \\ & \nearrow & \updownarrow \\ \Theta & & \\ & \searrow & [\Theta D_{t_\ell}^{-1} u] \end{array}$$

があり、ここで、$u = \int \delta(F(x,t))dx$ は、simple holonomic system としての H_F の標準的な生成元である。

そして、上の同型は、$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} D_{t_\ell}^{-1}\{\{D_{t_\ell}^{-1}\}\}$ から $H_F^{(0)}$ への、$\mathcal{O}_T\{\{D_{t_\ell}\}\}$-同型 $P \to Pu$ を誘導する。(1節を参照) この同型 $\tilde{\mathfrak{g}} \cong H_F^{(0)}$ を用いて、$\mathfrak{g}$ 上に種々の演算が定義されるが、それらを具体化する。鍵となるのは、図式

(1.4)
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathfrak{g} & & & & \\ & & & \swarrow & & \overset{\sim}{\searrow} & & & \\ 0 & \to & \mathcal{O}_X \partial_x(F) & \to & \mathcal{O}_X & \to & \Omega_F & \to & 0 \end{array}$$

である。$\mathfrak{g} \to \mathcal{O}_X$ は、$\Theta \mapsto \Theta(F)$ で定まる $\mathcal{O}_T$-準同型で、その像を $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=0}^{\ell-2} \mathcal{O}_T x^i$ とおくと、$\mathcal{O}_T$-直和分解 $\mathcal{O}_X = \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X \partial_x(F)$ を得る。$a \in \mathcal{O}_X$ に対して、

(1.5) $\quad a = r(a) + q(a)\partial_x(F) \qquad r(a) \in \mathcal{L},\ q(a) \in \mathcal{O}_X$

とおくと、割算の一意性から、$\mathcal{O}_T$-準同型 $r : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$, $q : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ が定まる。$\mathcal{O}_T$-同型 $\mathfrak{g} \cong \mathcal{L}$ を用いて、$\mathfrak{g}$ 上の演算を、$\mathcal{L}$ の言葉に翻訳する。

命題 1．上の記号の下で，$\theta, \theta' \in \mathfrak{g}$ について，
i) $(t_\ell * \theta)(F) = -r(\theta(F)F_1)$，$N(\theta)(F) = \partial_x g(\theta(F)F_1)$
ii) $(\theta * \theta')(F) = r(\theta(F)\theta'(F))$，$(\nabla_\theta \theta')(F) = \theta\theta'(F) - \partial_x s(\theta(F)\theta(F'))$ iii) $k \geq 2$ で，$A_k(\theta) = 0$，$B_k(\theta, \theta') = 0$。

iii) から，torsion free な接続 ∇ は，積分可能で，N について，$[\nabla_\theta, N] = 0$ となる。また，$D = D_{t_\ell}$ とかくと，$H_F^{(0)}$ で，等式

$$(1.6)\quad \left\{\begin{aligned} t_\ell \theta D^{-1} u &= (t_\ell * \theta) D^{-1} u + N(\theta) D^{-2} u \\ \theta\theta' D^{-2} u &= (\theta * \theta') D^{-1} u + \nabla_\theta \theta' \end{aligned}\right.$$

が，$\theta, \theta' \in \mathfrak{g}$ について成立する。∇ の積分可能性と torsion freeness から，S の座標系 $y = (y_2 \cdots y_\ell)$ で flat なものがとれるが，その中で，標準的なものを求めよう。$\mathcal{O}_T$-同型 $\mathfrak{g} \simeq \mathcal{L}$ を通じて，∇ を $\mathcal{L}$ 上の接続，N を $\mathcal{L}$ の $\mathcal{O}_T$-準同型と考える。$a \in \mathcal{L}$，$\theta \in \mathfrak{g}$ について，$N(a) = \partial_x g(aF_1)$，$\nabla_\theta a = \theta(a) - \partial_x(g(a\theta(F)))$ とおけばよい。$L = \{a \in \mathcal{L} ; \nabla_\theta a = 0, \theta \in \mathfrak{g}\}$ とおくと，flat な座標系 $y = (y_2 \cdots y_\ell)$ と，L の $\mathbb{C}$-基底（これを $\mathcal{L}$ の flat basis とよぶ）$e_0 \cdots e_{\ell-2}$ とは，$D y_i(F) = e_{\ell-i}$ によって，1対1に対応する。そこで，$\mathcal{L}$ の flat basis をつぎのように定める。$[\nabla_\theta, N] = 0$（$\theta \in \mathfrak{g}$）ゆえ，L は N-不変，$\mathbb{C}$-準同型 $N : L \to L$ について，

補題1, $N: L \to L$ は, $\frac{1}{\ell}, \cdots, \frac{\ell-1}{\ell}$ を固有値とし, その固有ベクトルからなる L の基底 $e_0 \cdots, e_{\ell-2}$ で
$$N e_i = \frac{i+1}{\ell} e_i \quad e_i|_{t'=0} = x^i \quad (0 \leq i \leq \ell-2)$$
となるものが唯一つ存在する。

この条件できまる L の基底 $e_0, \cdots e_{\ell-2}$ を標準的な flat basis, $D_{y_i}(F) = e_{\ell-i}$ で対応する flat な座標系を, 標準的な flat coordinate system という。

補題2, $a \in \mathcal{L}$, 及び, $\lambda \in \mathbb{C}$ について,

i) $\nabla_\theta a = 0 \ (\forall \theta \in \mathfrak{g})$ となるのは, $a = \partial_x(b)$, $b \in \mathcal{O}_T[x]$ で, $\partial_x(b)\theta(F) - \theta(b)\partial_x(F) \in \mathcal{L}$ となるものが存在するとき, そのときに限る。

ii) $Na = \lambda a$ となるのは, $a = \partial_x(b)$, $b \in \mathcal{O}_T[x]$ で, $\partial_x(b) F_1 - \lambda b \partial_x(F) \in \mathcal{L}$ となるものが存在するとき, そのときに限る。

ここで, 前節の議論をふりかえってみると, $s = F^{1/\ell} \in \mathcal{O}_s((x^{-1}))$ に付随して定めた s-系列 $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ について, $e_0 \cdots, e_{\ell-2}$ が, 標準的な flat basis を与え, 前節の $y_2 \cdots, y_\ell$ が標準的な flat coordinate system を与えることが判る。

S上の方程式系 M_F の構造が versality を与えた Ω_F により, X上での $\partial_x(F)$ による割算を通じて把えられるという観点は, Ω_F の双対性と深く結びついている。$a, b \in \mathcal{O}_x$ として,

(1.7) $\langle a,b\rangle = \ell\,\mathrm{Res}_{X/T}\left(\dfrac{ab\,dx}{\partial_x(F)}\right) = \dfrac{\ell}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int_{\gamma(t)}\dfrac{ab\,dx}{\partial_x(F)} \in \mathcal{O}_T$

とおく。(ここで, $\gamma(t)$ は $\{x\in\mathbb{C} : \partial_x F_1(x,t)=0\}$ を一周 cycle である。) $\langle\ ,\ \rangle$ は図式 (1.4) により Ω_F 上の perfect pairing を誘導する。(Serre duality)。

この $\mathcal{O}_T$-双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle : \Omega_F\times\Omega_F\to\mathcal{O}_T$ と, $\mathfrak{g}$ あるいは $\mathcal{L}$ との演算 ∇, N との関係は, つぎの通り。($a\in\mathcal{O}_T[x]$ ならば $\mathrm{Res}_{X/T}\left(\dfrac{a\,dx}{\partial_x(F)}\right)$ と, 第2節, 0 の意味の $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_T((x^{-1}))/\mathcal{O}_T}\left(\dfrac{a\,dx}{\partial_x(F)}\right)$ と一致する。)

命題 2. $a, b\in\mathcal{L}$ について,

i) $\langle\nabla_\theta a, b\rangle + \langle a, \nabla_\theta b\rangle = \theta\langle a, b\rangle \quad (\theta\in\mathfrak{g})$

ii) $\langle Na, b\rangle + \langle a, Nb\rangle = \langle a, b\rangle$

i) から, 双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ は L 上で $\mathbb{C}$-値となることが従う。ii) から, 標準的な flat basis $e_0,\cdots,e_{\ell-2}$ については, 直交関係

(1.8) $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,\ell-2-j}$

が従い, $e_0\cdots e_{\ell-2}$ の自己双対性が判るのである。これから, $\mathcal{O}_X$ での $\partial_x(F)$ による割算について, $a\in\mathcal{O}_X$ ならば $r(a)$ が

(1.9) $$r(a) = \sum_{j=0}^{\ell-2}\langle a, e_{\ell-2-j}\rangle e_j = \ell\sum_{j=0}^{\ell-2}\mathrm{Res}_{X/T}\left(\frac{a e_{\ell-2-j}\,dx}{\partial_x(F)}\right)e_j$$

で与えられることに注意しておく。

□2. <u>Gauss-Manin系 H_F の (A,B)-表示</u>　Gauss-Manin系 H_F の表示式(1.6)を、標準的な flat basis $e_0,\cdots,e_{\ell-2}$ と flat coordinate system $y=(y_2,\cdots,y_\ell)$ を用いて具体化する。$H_F^{(0)}$ の $\mathcal{O}_T[[D^{-1}]]$-基底として、$u_0,\cdots,u_{\ell-2}$ をつぎのようにとる。

$$(2.1)\qquad u_i = D_{y_{\ell-i}} D_{y_\ell}^{-1} \int \delta(F)\,dx = \int e_i\,\delta(F)\,dx \qquad (0\le i\le \ell-2)$$

$D=D_{y_\ell}=D_{t_\ell}$、$w(\theta)=t_\ell\theta - t_\ell*\theta = y_\ell\theta - y_\ell*\theta$ ゆえ、

$$(2.2)\qquad \begin{cases} y_\ell\theta D_{y_\ell}^{-1}u = (y_\ell*\theta)D_{y_\ell}^{-1}u + N(\theta)D_{y_\ell}^{-2}u \\ \theta\theta' D_{y_\ell}^{-2}u = (\theta*\theta')D_{y_\ell}^{-1}u + (\nabla_\theta\theta')D_{y_\ell}^{-2}u \\ (\theta,\theta'\in\mathfrak{g}) \end{cases}$$

を得る。$\mathfrak{g}$ の基底 $D_{y_\ell},\cdots,D_{y_2}$ に対応して、$\mathcal{L}$ の基底 $e_0,\cdots,e_{\ell-2}$ をとり、ベクトル $\vec{e}={}^t(e_0,\cdots,e_{\ell-2})$ について、$y_\ell*$、N、$D_{y_k}*$ を行列表示したものを、A_0、A_1、$B^{(k)}$ とかく。$y_\ell*\vec{e}=A_0\vec{e}$、$N\vec{e}=A_1\vec{e}$、$D_{y_k}*\vec{e}=B^{(k)}\vec{e}$，$\vec{e}$ の直交性で

$$(2.3)\qquad \begin{cases} A_1=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\ell},\frac{2}{\ell},\cdots,\frac{\ell-1}{\ell}\right) \\ A_0=(A_{0,ij})_{0\le i,j\le \ell-2} \quad A_{0,ij}=-\ell\,\mathrm{Res}_{X/T}\left(\dfrac{(F\cdot y_\ell)\,e_i\,e_{\ell-2-j}\,dx}{\partial_x(F)}\right) \\ B^{(k)}=(B^{(k)}_{ij})_{0\le i,j\le \ell-2} \quad B^{(k)}_{ij}=\ell\,\mathrm{Res}_{X/T}\left(\dfrac{e_{\ell-k}\,e_i\,e_{\ell-2-j}\,dx}{\partial_x(F)}\right) \end{cases}$$

が判る。

<u>定理</u> 1. Gauss-Manin系 H_F は、flat coordinate system $y=(y_2,\cdots,y_\ell)$ による(2.1)のベクトル $\vec{u}={}^t(u_0,\cdots,u_{\ell-2})$ の方程式系として、(2.3)の A_0、$B^{(k)}$ を

$\in M(\ell-1,\mathcal{O}_T)$, $A_1\in M(\ell-1,\mathbb{C})$を用いて，

$$\begin{cases} y_\ell \vec{u} = A_0\vec{u} + A_1 D_{y_\ell}^{-1}\vec{u} \\ D_{y_k} D_{y_\ell}^{-1}\vec{u} = B^{(k)}\vec{u} \qquad (2\le k\le \ell-1) \end{cases}$$

と表示される。

標準化された flat coordinate system を用いた結果，$B^{(k)}$が函数行列，A_1が対角化された定数行列になり，またΩ_Fの duality の反映として，行列A_0，$B^{(k)}$が反対角線について対称となる。また，定理1の方程式系の compatibility から，つぎの命題を得る。

<u>命題</u>3. i) $[B^{(k)}, A_0]=0 \quad (k=2,\cdots,\ell-1)$

ii) $[B^{(k)}, A_1]-B^{(k)}=\partial_{y_k}(A_0) \quad (k=2,\cdots \ell-1)$

定理1の行列の具体計算を実行するには，本質的には，residue

$$(2.4)\qquad \ell\, Res\left(\frac{F e_i e_j\, dx}{\partial_x(F)}\right) \quad (0\le i,j\le \ell-2)$$

を決定すればよい。巾級数環$\mathcal{O}_S((x^{-1}))$で分数巾$f=F^{1/\ell}$をとり，fに付随するE-系列$(e_i)_{i=0}^{\infty}$をとる。$\ell\, Res\left(\frac{F e_i e_j\, dx}{\partial_x(F)}\right) = Res\left(\frac{f e_i e_j\, dx}{\partial_x(F)}\right)$に注意して，次の母函数を考える。$E(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty} e_i\lambda^i$とおくとき，

$$(2.5)\qquad Res(E(\lambda)E(\mu) f\partial_x(f)^{-1}dx) = \sum_{i,j\ge 0} Res(e_i e_j f\partial_x(f)^{-1}dx)\lambda^i\mu^j$$

2節の結果から，$(z_i)_{i=2}^{\infty}$を用いて，$E(\lambda)^{-1}=x(\lambda)-x\lambda$，

$z(\lambda) = 1 - \sum_{i=2}^{\infty} z_i \lambda^i$ と表わせば，

命題4　$\mathrm{Res}\left(\dfrac{E(\lambda)E(\mu)\xi\,dx}{\partial_x(\xi)}\right) = \dfrac{\partial_\lambda z(\lambda) - \partial_\mu z(\mu)}{\mu z(\lambda) - \lambda z(\mu)}$

が成り立つ。この表示は，

$$(2.6)\quad \lambda\mu\,\mathrm{Res}\left(\frac{E(\lambda)E(\mu)\xi\,dx}{\partial_x(\xi)}\right) = (\lambda\partial_\lambda + \mu\partial_\mu)\log\left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} z_i(\lambda^{i-1}\mu + \cdots + \lambda\mu^{i-1})\right)$$

とも書かれる。

この母函数を用いて (2.4) を計算すると，(2.6) の右辺で $\lambda^i\mu^j$ の係数を $\Lambda(i,j)$ と書けば，$0 \leq i, j \leq \ell-2$ のとき，

$$(2.7)\quad \ell\,\mathrm{Res}\left(\frac{e_i e_j F\,dx}{\partial_x(F)}\right) = \Lambda(i+1, j+1) - \Lambda(i+j+2-\ell, \ell)$$

となる。

□3. 対数的ベクトル場と discriminant の満す方程式

第1節の議論によれば，$w(\theta) = t_\ell\theta - t_\ell * \theta = y_\ell\theta - y_\ell * \theta$ で定まる $\mathcal{O}_S$-準同型 $w : \mathrm{Der}_S \to \mathrm{Der}_S$ は，discriminant D に沿って対数的なベクトル場の全体 $\mathrm{Der}_S(\log D)$ の上への同型を与える。Der_S の $\mathcal{O}_S$-基底 $D_{y_\ell}, \cdots D_{y_2}$ についての w の行列表示は，(2.3) の行列を用いて，$R =: y_\ell I - A_0$ で与えられる。そこで，

$$(3.1)\quad \theta_k = w(D_{y_k})\ (2 \leq k \leq \ell)\quad {}^t(\theta_\ell, \cdots, \theta_2) = R\,{}^t(D_{y_\ell}, \cdots, D_{y_2})$$

とおくと，$\theta_\ell, \cdots \theta_2$ は，$\mathrm{Der}_S(\log D)$ の $\mathcal{O}_S$-自由基底となる。今の場合，$\Delta = \det(w) = \det(R)$ は，$F = x^\ell + t_2 x^{\ell-2} + \cdots + t_\ell$ の判別式である。表示式 (2.2) から，w，$*$ の関係

式を用いて、Gauss-Manin系 H_F の、対数的ベクトル場 $\theta_\ell, \cdots, \theta_2$ に関する表示式を得る。

定理 2. 上の記号の下で、H_F において、

$$\theta_k \vec{u} = B^{(k)}(A_1 - I)\vec{u} \quad (2 \leq k \leq \ell)$$

が成立する。

$w : Der_S \to Der_S$ を用いると、discriminant Δ について、

$$w(\theta)\Delta = \theta(tr(w))\Delta, \quad (\theta \in Der_S) \tag{3.3}$$

が成り立つことは、すでに述べた。$tr(w) = tr(R)$ に注目する。flat basis に関して、$\partial_x F(\lambda) = \lambda F(\lambda)^2$、つまり

$$\sum_{i=0}^{\ell-2} e_i e_{\ell-2-i} = \frac{1}{\ell}\partial_x^2(F) \tag{3.4}$$

ゆえ、命題4から、

命題5

$$tr(w) = Res\left(\frac{F\partial_x^2(F)dx}{\partial_x(F)}\right) = \ell \log\left(1 + \sum_{i=2}^{\ell} \frac{i-1}{\ell} y_i \lambda^i\right)_\ell$$

$\tau = tr(w) = tr(R)$ とかく。

定理 3. $Der_S(\log D)$ の O_S-基底 $\theta_\ell \cdots, \theta_2$ ($\theta_k = w(\partial_{y_k})$) について、

$$\theta_k(\Delta) = \partial_{y_k}(\tau)\Delta \quad (2 \leq k \leq \ell)$$

$$\partial_{y_k}(\tau) = (k-1)\left(1 + \sum_{i=2}^{\ell} \frac{i-1}{\ell} y_i \lambda^i\right)^{-1}_{\ell-k} \quad (2 \leq k \leq \ell)$$

が成立する。

文献

[1] Ishiura, S. and Noumi, M. : A calculus of the Gauss-Manin system of type A_ℓ. I, II. Proc. Japan Acad. Vol. 58, No. 1, 13-16, No. 2, 62-65, (1982).

[2] Pham, F. : Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Birkhäuser, (1979).

[3] Saito, K. : Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point. (RIMS. preprint).

[4] Saito, K. : On a linear structure of a quotient variety by a finite reflexion group. (RIMS. preprint)

[5] Saito, K., Yano, T. and Sekiguchi, J. : On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group. Comm. in Algebra, 8, 373 - 408 (1980).