数理解析研究所講究録
第459巻 1982年 75-93

擬微分作用素の浜田－Wagschalの問題への応用

都立大 理　　小林 隆夫

複素平面 $\mathbb{C}^{n+1}$ ($\ni x=(x_0,x'),\ x'=(x_1,\cdots,x_n)$) の原点の近傍において次の Cauchy 問題を考えよう。

$$
(0.1)\qquad \begin{cases} a(x,D)\,u(x)=0\,, & (D=(\partial/\partial x))\\ D_0^j u|_S = w_j(x')\,, & j=0,1,2\cdots,m-1. \end{cases}
$$

ここで $a(x,D)$ は $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ の近傍 Ω で正則な関数を係数とする m 階の線型偏微分作用素で，初期面 $S: x_0=0$ は非特性的とする。Cauchy-Kovalevskaja の定理により，初期値 $w_j,\ j=0,\cdots m-1,$ が $p\in S\cap\Omega$ で正則であれば (0.1) の解 $u(x)$ は $p\in\mathbb{C}^{n+1}$ における正則関数の芽を定める。我々の問題は，この芽が初期値の特異点の近傍でどのように振舞うかを調べることである。詳しくは初期値については次の場合を考える。

《mero》 初期値 w_j が $T: x_0=x_1=0$ に極を持つ。

《rami》 初期値 w_j が $\Omega \cap \{S \setminus T\}$ で多価正則。

もちろん 《mero》⊂《rami》 であるが，双曲型方程式の基本解の構成においては《mero》の詳しい情報が有用である。

又，作用素については，

《simp》 特性根がすべて異なる。

《cons》 特性根の重複度が一定。

《invo》 特性根の重複度が変わる。そのかわり，特性根が正則かつ包合的を仮定。

の場合に分けると次のような結果が得られている。

まず，最も基本的な結果は，この問題を最初に {《mero》,《simp》} について考察した Y. Hamada [1] のものである。彼は

(P) 初期値の特異性が T から出る特性曲面達に沿って伝播する。

さらに，解は極と対数分岐の特異性を持つことを示した。

{《mero》,《cons》} の場合は，Y. Hamada [2]，L. Lamport [9] が (P)

の成立を示している。 ただし，解は真性特異点と対数分岐を持つ。（解が極の特異性ですむのは，一般には «simp» の時のみ。）

«nami» については C. Wagschal [13] が最初に «simp» を考察し，最終的には，Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal [3] が {«nami», «cons»} の場合に (P) を示した。

以上は，持性根の重複度が一定の場合であるが，重複度が変化すると状況はかなり複雑になる。

Y. Hamada and G. Nakamura [4] は {«mero», «invo», 重複度 ≦ 2} の場合に 解を多重相関数をつかって積分で表現しその特異性を調べている。 この結果は筆者 [7] が重複度の仮定のない場合に拡張した。

D. Schiltz, J. Vaillant et C. Wagschal [10] は {«nami», «invo», 重複度 ≦ 3} の場合に同様な解の積分表示を与えている。 彼らは微分作用素の中だけで計算しているため一般の重複度に対する見通しは非常に悪い。

ここでは，{«nami», «invo»} について 擬微分作用素の計算をつかって 重複度の仮定なしに解の [10] と同様な積分表示が与えられることを示す。

いずれにせよ «invo» の場合には，多重相関数を使って解を積分表示するわけだが，被積分関数は 多重相関数 = 0

上に特異性を持つため，積分後の特異性については明らかではない。 この 積分の特異性については筆者の [8] を参照していただきたい。

T. Ishii [5]. [6] ((mero)), 最近の C. Wagschal [15] ((rami)) は特性根の正則性を仮定するのみで、解を上と同様の積分の無限和で表現しているが，一項ごとについては [8] の結果は使えても 全体での特異性については残念ながらわかっていない。 又，非包合的な場合を扱った Y. Urabe [11], [12] の結果も興味深い。

§1. 仮定と結果

さて $a(x, D)$ は以前のとうりとし， D_0^m の係数は 1 とする。(0.1) の初期値 w_j $j=0, 1 \cdots m-1$， T に沿って分岐するとする、つまり，連結な $0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍 $\Omega_1 \subset S$ があり， $p \in \Omega_1 \setminus T$ の近傍で w_j は正則であり y を始点とする $\Omega_1 \setminus T$ の中の任意の道に沿って解析接続可能とする。 ここで $y \in \Omega_1 \setminus T$ のとりかたは重用ではない。

$p(x, \xi)$ を $a(x, D)$ の特性多項式， λ_i, $i=1, \cdots, m$ を p の特性根としよう：

(1.1) $$p(x, \xi) = \prod_{i=1}^{m} (\xi_0 - \lambda_i(x, \xi')) .$$

我々は　特性根 λ_i, $i=1,\cdots,m$, に次の二つの仮定をおく。

(H.1)　$\lambda_i(x,\xi')$ は $(x;\xi')=(0;e_1)$ ($e_1=(1,0\cdots0)\in\mathbb{C}^n$) の近傍で正則（かつ ξ' に関して 1 次斉次）。

(H.2)　もし点 $(0;e_1)$ において　$\lambda_i=\lambda_j$　となる時は、$(0,e_1)$ の近傍において正則かつ ξ' に関して 0 次斉次な関数 $b(x,\xi')$, $C(x,\xi')$ が存在して次をみたす。

(1.2)
$$\{\xi_0-\lambda_i,\ \xi_0-\lambda_j\}=b\cdot(\xi_0-\lambda_i)+C\cdot(\xi_0-\lambda_j)\ .$$

一つ注意しておくと、$\lambda_i\neq\lambda_j$ at $(0;e_1)$ の時にも $b=-C=\{\xi_0-\lambda_i,\xi_0-\lambda_j\}/(\lambda_j-\lambda_i)$ とおくことにより (1.2) が成り立っているとしてよい。　これは，[4], [10] のように (1.2) で Poisson bracket $\{\ ,\ \}$ が恒等的に消えることを要請すると成立しない。

多重相関数 $\varphi^{12\cdots\ell}=\varphi^{12\cdots\ell}(\sigma_{\ell-1},x)$ ($\sigma_k=(\sigma_1,\cdots,\sigma_k)\in\mathbb{C}^k$) を帰納的に次の eiconal 方程式 解として定める：

(1.3)
$$\begin{cases} D_0\varphi^1-\lambda_1(x,\nabla_x\varphi^1)=0\\ \varphi^1(0,x')=x_1\end{cases}$$
$$\vdots$$
$$\begin{cases} D_0\varphi^{1\cdots\ell}-\lambda_\ell(x,\nabla_x\varphi^{1\cdots\ell})=0\\ \varphi^{1\cdots\ell}(\sigma_{\ell-1},x)\big|_{x_0=\tau_{\ell-1}}=\varphi^{1,\cdots\ell-1}(\sigma_{\ell-2},x)\big|_{x_0=\tau_{\ell-1}}\end{cases}$$

同様にして　整数の列 $I_\ell=(i_1,\cdots,i_\ell)$, $1\leq i_k\leq m$ （上は $I_\ell=(1,2\cdots\ell)$ の場合）についても多重相関数 $\varphi^{I_\ell}(\sigma_{\ell-1},x)$ を定める。これらは (H.1) により各変数の原点の近傍で正則である。

もう一つ次の記号を使う。 $D_\omega=\{t\in\mathbb{C}\mid |t|<\omega\}$ $(\omega>0)$ $\dot{D}_\omega=D_\omega\setminus\{0\}$, $\mathcal{R}_\omega=\dot{D}_\omega$ の普遍被覆空間。（一般に $\mathcal{R}(X)$ で X の普遍被覆空間を表わすことにする。）我々の主要結果は次のとうりである。

定理 1. (H.1), (H.2) を仮定する。この時、連結かつ単連結な $0\in\mathbb{C}^n$ の近傍 $\Omega'\subset S$, 定数 $\omega,\eta>0$, 正則関数 $w(t;x)\in\mathcal{O}(\mathcal{R}_\omega\times D_\eta\times\Omega')$, $\tilde{u}(t;\sigma_{m-1},x)\in\mathcal{O}(\mathcal{R}_\omega\times D_\eta^m\times\Omega')$ が存在して次をみたす。（ $D_\eta^k=D_\eta\times\cdots\times D_\eta\subset\mathbb{C}^k$ ）

(0)　$\varphi^1(D_\eta\times\Omega')\subset D_\omega$,　$\varphi^{1\cdots m}(D_\eta^m\times\Omega')\subset D_\omega$

(i)　$\forall p\in\Omega'\setminus T$ に対し，p の近傍で正則な (0.1) の解 $u(x)$ は次のように表わされる。

$$u(x)=w(\varphi^1(x);x)+\int_0^{x_0}d\tau_{m-1}\int_0^{\tau_{m-1}}d\tau_{m-2}\cdots\int_0^{\tau_2}d\tau_1\ \tilde{u}(\varphi^{1\cdots m}(\sigma_{m-1},x);\sigma_{m-1},x) \tag{1.4}$$

定理 1 では特性根をすべて一緒に扱かっているが，$(0.e_1)$ において異なる特性根は別々に扱うこともできる。つまり

特性根の番号をつけかえて次のようになっているとしよう。

(i) $$p(x,\xi)=\prod_{\kappa\in K}\prod_{i=1}^{d_\kappa}(\xi_0-\lambda_i^\kappa(x,\xi'))$$

(ii) 各 $\kappa\in K$ では $\lambda_1^\kappa(0,e_1)=\cdots\cdots=\lambda_{d_\kappa}^\kappa(0;e_1)$

(iii) $\alpha_\kappa\equiv\lambda_i^\kappa(0,e_1)$ とすると $\alpha_\kappa\neq\alpha_{\kappa'}$ $\kappa\neq\kappa'$.

$\lambda_1^\kappa,\cdots\lambda_{d_\kappa}^\kappa$ によって (1.3) と同様にして定まる多重相関数を $\varphi_\kappa^{I_\ell}=\varphi_\kappa^{I_\ell}(\sigma_{\ell-1},x)$ と書くことにする。以上の記号をつかうと，定理 1 と部分積分により次の定理を得る。

定理 2. (H.1), (H.2) を仮定すると，連結かつ単連結な $0\in\mathbb{C}^n$ の近傍 $\Omega'\subset S$，定数 $\omega,\eta>0$，正則関数 $u_\kappa^{I_\ell}(t;\sigma_{\ell-1},x)\in\mathcal{O}(R_\omega\times D_\eta^\ell\times\Omega')$，$\kappa\in K$，$I_\ell\in J(d_\kappa)$，が存在して次をみたす。

(0). $\varphi_\kappa^{I_\ell}(D_\eta^\ell\times\Omega')\subset D_\omega$ ，$\kappa\in K$，$I_\ell\in J(d_\kappa)$

(i) $^\forall p\in\Omega'\setminus T$ に対して，p の近傍で正則な (0.1) の解 $u(x)$ は次のように表わされる。

(1.5) $$u(x)=\sum_{\kappa\in K}\sum_{I_\ell\in J(d_\kappa)}\int_0^{x_0}d\tau_{\ell-1}\int_0^{\tau_{\ell-1}}d\tau_{\ell-1}\cdots\int_0^{\tau_2}d\tau_1\,u_\kappa^{I_\ell}(\varphi_\kappa^{I_\ell};\sigma_{\ell-1},x)$$

ただし $J(d)=\bigcup_{\ell=1}^{d}\{I_\ell=(i_1,\cdots,i_\ell)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_\ell\leq d\}$ である。

定理1,2により解 $u(x)$ の特異性は (1.4) 又は (1.5) の積分の特異性を調べればよい。 (1.4) (又は (1.5)) の被積分関数は明らかに $D^m \times \Omega' \setminus \{\varphi^{1\cdots m}(\sigma_{m-1}, x)=0\}$ ($D^{\ell}_{\eta} \times \Omega' \setminus \{\varphi^{I_\ell}_{x}(\sigma_{\ell-1}, x)=0\}$) で多価解析的, つまり $\varphi^{1\cdots m}=0$ ($\varphi^{I_\ell}_{x}=0$) に沿って分岐するので積分の特異性はさほど明らかではない。 この問題については [8] を参照していただきたい。 [8] では (1.4), (1.5) の解析接続の問題を，チェインの連結変形の問題に帰着させて考察している。

§2. Wagschal による (0.1) の reduction.

任意の $i=1,\cdots,m$ を1つ固定すると $\Omega \setminus \{\varphi^i(x)=0\}$ で多価正則な関数 $w(x)$ を取り、 $D_0^j w|_S = w_j(x)$, $j=0,\cdots m-1$ とすることができる。 $i=1$ として $\tilde{v}(x) = -a(x,D)w$ と置くと $\tilde{v}(x)$ は $\Omega \setminus \{\varphi^1(x)=0\}$ で多価正則となる。 さらに $\tilde{v}$ は適当な $\mathcal{R}_\omega \times \Omega$ で正則な関数 $v(t;x)$ をつかって

$$\tilde{v}(x) = v(\varphi^1(x); x)$$

と書ける。(実際には上で Ω を小さく取り直さなければならないが、原点の近傍での話なのでわざわざことわらなかった。以下でも明らかな時は同様である。) 従って $u-w$ を新たな未知関数とすれば (0.1) は次の問題に帰着される。

$$(2.1)\qquad \begin{cases} a(x,D)\,u(x) = v(\varphi^1(x), x) \\ D_0^j u|_S = 0 \qquad j=0,1,\cdots m-1. \end{cases}$$

我々は (2.1) の解を先験的に

$$(2.2)\qquad u(x) = \underbrace{\int_0^{x_0} d\tau_{m-1}\int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_{m-1}}_{m-1}\cdots\int_0^{\tau_2} d\tau_1\ \tilde{u}(\varphi^{1\cdots m}(\sigma_{m-1}, x); \sigma_{m-1}, x)$$

とおいて求める。 この時，$u(x)$ は明らかに (2.1) の初期条件を $j=0,\cdots m-2$ についてみたし，$D_0^{m-1}u|_S = \tilde{u}(x_1; 0\cdots 0, 0, x')$ となる。

§3. 擬微分作用素

この章では多価正則関数に働く擬微分作用素を定義しよう。$\varphi(x)$ を $0\in\mathbb{C}^n$ の単連結な開近傍 Ω で正則な関数で，$\varphi(0)=0$ かつ $\varphi(\Omega)\subset D_\omega$, $\omega>0$ としよう。(簡単のために $x=(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{C}^n$ …等前と記号が異なるものもある。) $\mathcal{R}_\omega\times\Omega$ で正則な関数 $u(t;x)$ に対し

$$(3.1)\qquad u_\varphi(x) = u(\varphi(x), x)$$

とおくと，$u_\varphi(x)$ は $\Omega\setminus\{\varphi=0\}$ で多価正則な関数となる。
微分作用素の u_φ への働きは次の補題で与えられる。

補題 1.　$p(x,D)$ を Ω で正則な関数を係数とする k 次斉次な微分作用素としよう。このとき次の公式が成立する。

$$(3.2)\qquad p(x,D)\,u_\varphi(x)=\sum_{l=0}^{k} L_l(p,\varphi/x,D)\,D_t^{k-l}u(t,x)\Big|_{t=\varphi(x)}$$

ただし $L_l(p,\varphi/x,D)$ は p と φ に依って定まる Ω で正則な関数を係数とする l 階の（x についての）微分作用素で次の式で与えられる。

$$(3.3)\qquad L_l(p,\varphi/x,D)\,v(x)=\sum_{l\leq|\alpha|\leq 2l}\frac{1}{\alpha!\,(|\alpha|-l)!}\,p^{(\alpha)}(x,\nabla_x\varphi(x))$$
$$\times\left\{D_{\tilde{x}}^{\alpha}\left(\tilde{\varphi}(x,\tilde{x})^{|\alpha|-l}v(x)\right)\Big|_{\tilde{x}=x}\right\}$$

$$(3.4)\qquad \tilde{\varphi}(x,\tilde{x})=\varphi(x)-\varphi(\tilde{x})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\tilde{x})\cdot(x_i-\tilde{x}_i)$$

（$p^{(\alpha)}(x,\xi)=D_\xi^\alpha p(x,\xi)$）。　$L_l(p,\varphi)$ の主シンボルは

$$(3.5)\qquad \sigma_l(L_l(p,\varphi))(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=l}\frac{1}{\alpha!}\,p^{(\alpha)}(x,\nabla_x\varphi(x))$$

となる。

Ω^* を $T^*\mathbb{C}^n\setminus 0$ の開集合とするとき，φ は

$$(3.6)\qquad (x,\nabla_x\varphi(x))\in\Omega^*\ ,\quad \forall x\in\Omega\quad（特に\ \nabla_x\varphi(x)\neq 0）$$

をみたすとしよう。この時 (3.3) は多項式に限らず Ω^* で正

則な任意の正則関数 $p(x,\xi)$ に対して意味を持つ。そこで Ω^* 上の擬分作用素の定義を思い出そう。

定義 1. 形式的無限和 $P(x,\xi)=\sum_{k=-\infty}^{m} p_k(x,\xi)$ $(m\in\mathbb{Z})$ が Ω^* 上の擬微分作用素の表象であるとは

(i) $p_k(x,\xi)\in\mathcal{O}(\Omega^*)$ かつ ξ に関して k 次斉次

(ii) $\forall K^*\Subset\Omega^*$ に対し 定数 $C, h>0$ が存在して

(3.7) $$|p_{m-k}(x,\xi)|\leq C\cdot h^k k! \quad \forall k=0,1,2\cdots,\ \forall(x,\xi)\in K^*.$$

となることで定める。Ω^* 上の表象全体を $\mathcal{E}(\Omega^*)$ と書く。

$\mathcal{R}_\omega$ のかってな点 b を一つ取って固定しよう。$\mathcal{R}_\omega$ 上の正則関数 $u(t)$ に対し $D_t^{-1}u(t)$ を u の不定積分で b で消えるもので定める、つまり、$\tilde{\gamma}:[0,1]\longrightarrow\mathcal{R}_\omega$ を $\gamma(0)=b$, $\gamma(1)=t$ となる滑らかな道とするとき

(3.8) $$D_t^{-1}u(t)=\int_0^1 u(\tilde{\gamma}(s))\,\dot{\gamma}(s)\,ds$$

である。ただし $\gamma:[0,1]\xrightarrow{\tilde{\gamma}}\mathcal{R}_\omega\xrightarrow[\text{proj}]{\text{natu.}}D_\omega$ 。一般に $\ell\geq 1$ なる自然数に対し $D_t^{-\ell}=D_t^{-1}\circ\cdots\circ D_t^{-\ell}$ (ℓ 回) で定める。

定義 2. $P(x,\xi)=\sum_{j=-\infty}^{m}p_k(x,\xi)$ を Ω^* 上の擬微分作用素の表象とするとき $u_\varphi(x)$ への $P(x,D)$ の作用を

$$P(x, D)u_\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{m} \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(p_k, \varphi | x, D) D_t^{k-\ell} u(t, x) \Big|_{t=\varphi} \tag{3.9}$$

で定義する。

命題 1. 任意の $\Omega_1 \Subset \Omega$ に対して $u(t,x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}_\omega \times \Omega)$ に独立な定数 $\eta > 0$ が存在して (3.9) の右辺の無限和は $\mathcal{R}_\eta \times \Omega_1$ で絶対一様収束する。さらに

$$L_\ell(P, \varphi) = \sum_{\mu=0}^{\ell} L_\mu(p_{m-\ell+\mu}; \varphi), \quad \ell = 0, 1, 2 \cdots \tag{3.10}$$

とおくと

$$P(x, D)u_\varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(P; \varphi) D_t^{m-\ell} u(t, x) \Big|_{t=\varphi} \tag{3.11}$$

となる。

この命題は Wagschal [14] の方法を使って証明できる。$L_\ell(P, \varphi)$ の始めの二つは次で与えられ，有益である。

$$(3.12) \begin{cases} L_0(P, \varphi) = L_0(p_m, \varphi) = p_m(x, \nabla_x\varphi(x)) \\ L_1(P, \varphi) = \sum D_{\xi_i} p_m(x, \nabla_x\varphi) D_{x_i} + \frac{1}{2} \sum D_{\xi_i} D_{\xi_j} p(x, \nabla_x\varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + L_0(p_{m-1}, \varphi) \end{cases}$$

又 $L_\ell(P, \varphi)$ は t に依存しないので D_t^g $(g \in \mathbb{Z})$ と可換となることも注意しておこう。 命題 1 により擬微分作用素が well-

defined となったが，その計算においては次の命題が基本的である。

命題 2. $P, Q \in \mathcal{E}(\Omega^*)$ をそれぞれ m_1, m_2 階の表象，$R \in \mathcal{E}(\Omega^*)$ を P と Q の合成表象 $P \circ Q$ とする。もし

$$L_\ell(Q, \varphi) = 0 \qquad 0 \leqq {}^\forall \ell \leqq m_2 - 1 \tag{3.13}$$

（$m_2 \leqq 0$ なら無条件）なら 任意の $u(t, x) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}_\omega \times \Omega)$ に対し

$$P(x, D) \cdot Q(x, D)\, u_\varphi(x) = R(x, D)\, u_\varphi(x) \tag{3.14}$$

が成立する。

証明は本質的に [7, Th'm 3.16] のと同じであるが $D_t^{-1} D_t \neq id$ であるため (3.13) の条件が必要である。

§4. 定理の証明

第 1, 2 節の記号にもどろう。 まず多重相関数の基本的な性質を述べよう。（詳しくは [7] の第 2 節をみよ。）

補題 2. (H.1), (H.2) を仮定すると 原点の近傍で正則な

関数の集合 $\{a_{k.\nu}^{I_\ell} = a_{k.\nu}^{I_\ell}(\sigma_{\ell-1}, x) : I_\ell \in J(m),\ 1 \leq k \leq \ell-1,\ k \leq \nu \leq \ell-1\}$ が存在して $k=1,\cdots,\ell-1$ に対して次をみたす。

$$(4.1) \qquad D_0\varphi^{I_\ell} - \lambda_{i_k}(x, \nabla_{x'}\varphi^{I_\ell}) = -\sum_{\nu=k}^{\ell-1} a_{k.\nu}^{I_\ell} \frac{\partial \varphi^{I_\ell}}{\partial \tau_\nu}$$

(注) (H.2) で Poisson bracket が恒等的に消えることを仮定すると $a_{k.\nu}^{I_\ell} \equiv 1$ とできる。

いよいよ (2.2) の $\tilde{u}$ のみたす方程式を求めよう。簡単のために $h_i(x,\xi) = \xi_0 - \lambda_i(x,\xi')$, $i=1,\cdots,m$ とおく。

$h_m(x.D)$ を (2.2) に作用させると

$$h_m(x.D)\,u(x) = \underbrace{\int^{x_0}\!\!\cdots\!\int}_{m-1} h_m(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m}, \sigma_{m-1}, x) + \underbrace{\int^{x_0}\!\!\cdots\!\int}_{m-2} \tilde{u}(\varphi^{1\cdots m-1}; \sigma_{m-2}, x_0, x)$$

(1.3), (3.12) より $L_0(h_m; \varphi^{1\cdots m}) = 0$ であることに注意しよう。

さらに $h_{m-1}(x.D)$ を作用させると

$$h_{m-1}(x.D)\,h_m(x.D)\,u(x) = \underbrace{\int^{x_0}\!\!\cdots\!\int}_{m-1} h_{m-1}(x.D)\,h_m(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m}) +$$

$$+ \underbrace{\int^{x_0}\!\!\cdots\!\int}_{m-2} h_m(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m})\Big|_{\tau_{m-1}=x_0} + \underbrace{\int_0^{x_0}\!\!\cdots\!\int}_{m-2} h_{m-1}(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m-1})$$

$$+ \underbrace{\int^{x_0}\!\!\cdots\!\int}_{m-3} \tilde{u}(\varphi^{1\cdots m-2}; \sigma_{m-3}, x_0, x_0, x).$$

ここで $L_0(h_{m-1}, \varphi^{1\cdots m}) = -\,a_{m-1,m-1}^{1\cdots m} \dfrac{\partial \varphi^{1\cdots m}}{\partial \tau_{m-1}}$ を使って部分積分すれば

$$h_{m-1}(x.D)\circ h_m(x.D)\,u(x) = \underbrace{\int^{x_0}\cdots\int}_{m-1} (h_{m-1}(x.D) + D_{\tau_{m-1}}\circ a^{1\cdots m}_{m-1,m-1})\,h_m(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m}; \sigma_{m-1}\,x)$$

$$+\underbrace{\int^{x_0}\cdots\int}_{m-2} h_m(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{1\cdots \check{m-1}, m}, \sigma_{m-2}, \sigma_{m-2}, x) + \underbrace{\int^{x_0}\cdots\int}_{m-2} h_{m-1}(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m-1}; \sigma_{m-1}, x_0.\,x)$$

$$+\underbrace{\int^{x_0}\cdots\int}_{m-3} \tilde{u}(\varphi^{1\cdots m-2}; \sigma_{m-3}, x_0, x_0.\,x)$$

を得る。一般には帰納法により

(4.2) $h_1(x,D)\circ\cdots\circ h_m(x.D)\,u(x)$

$$= \sum_{I_\ell\in J(m)} \underbrace{\int^{x_0}\cdots\int}_{\ell-1} (h_{i_1}(x,D) + \sum_{\nu=1}^{\ell-1} D_{\tau_\nu}\circ a^{I_\ell}_{i_\ell\,\nu})\circ\cdots\cdots\circ h_{i_\ell}(x.D)\,\tilde{u}(\varphi^{I_\ell}; \sigma^{I_\ell}, x)$$

となる。ただし $\sigma^{I_\ell} = (0\cdots 0\,\overset{i_1}{\tau_1}\cdots\tau_1\,\overset{i_2}{\tau_2}\cdots\tau_2,\overset{i_3}{\tau_3}\cdots\overset{\cdots}{;}\tau_{\ell-1},\overset{i_\ell}{x_0}\cdots x_0)$。

(4.2) において補題2より $h_{i_\ell}(I_\ell|\sigma_{\ell-1}\,x,D) = h_{i_\ell}(x.D) + \sum_{\nu=\ell}^{\ell-1} D_{\tau_\nu}\circ a^{I_\ell}_{i_\ell.\nu}$,

$H^{I_\ell} = h_{i_1}(I_\ell)\circ\cdots\circ h_{i_\ell}(I_\ell)$ とおくと

(4.3) $$L_0(h_{i_\ell}(I_\ell); \varphi^{I_\ell}) = 0$$

従って

(4.4) $$L_\mu(H^{I_\ell}, \varphi^{I_\ell}) = 0\ , \qquad \mu = 0, 1, \cdots \ell-1$$

となることが重要である。(4.3), (4.4) を考慮して命題2を適用すれば 高々 $m-1$ 階の擬微分作用素 (D_0 については微分作用素) $B_{m-1}(x.D)$ が存在して

$$(4.5)\qquad a(x,D)u(x)=[h_1(x,D)\circ\cdots\circ h_m(x,D)-B_{m-1}(x,D)]u(x)$$

となる。　$B_{m-1}(x,D)u(x)$ を計算すれば

$$(4.6)\qquad B_{m-1}(x,D)u(x)=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\int^{x_0}\cdots\int}_{i-1} B_{i-1}(x,D_\sigma,D_x)\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m},\sigma_{m-1},x)\Big|_{\tau_i=\cdots=\tau_{m-1}=x_0}$$

となる。　ただし B_{i-1} は高々 $i-1$ 階の擬微分作用素である。従って $\tilde{u}$ が次の方程式系をみたせば u は (2.1) をみたす。

$$(4.7)\quad\left\{\begin{array}{ll}
h_1(x,D)\tilde{u}(\varphi^1,x_0\cdots x_0,x)=B_0\tilde{u}\big|_{\circ}+v(\varphi^1,x) & \\
h_i(x,D)\tilde{u}(\varphi^i;0\cdots 0,x_0\cdots x_0,x)=0 & 2\leq i\leq m\\
\vdots & \\
H^{I_\ell}(x,D_\sigma,D_x)\tilde{u}(\varphi^{I_\ell};\sigma^{I_\ell},x)=\delta^{I_\ell}_{1\cdots\ell}B_{\ell-1}(x,D_\sigma,D_x)\tilde{u}\big|_{\circ} & \ell\geq 2\\
\vdots & \\
H^{1\cdots m}(x,D_\sigma,D_x)\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m},\sigma_{m-1},x)=B_{m-1}(x,D_x)\tilde{u}(\varphi^{1\cdots m},\sigma_{m-1},x) &
\end{array}\right.$$

$$(4.8)\qquad u(x_1;0\cdots 0,x')=0\ .$$

結局，与えられた $w(t,\sigma^{I_\ell},x)$ に対して次の方程式が解ければよい。

$$(4.9)\quad\left\{\begin{array}{l}
H^{I_\ell}(x,D_\sigma,D_x)\tilde{u}(\varphi^{I_\ell},\sigma^{I_\ell},x)=B_{\ell-1}(x,D_\sigma,D_x)\tilde{u}\big|_{\tau_\ell=\tau_{\ell+1}=\cdots=\tau_{m-1}=x_0}\\
\tilde{u}(t,\sigma^{I_\ell},x)-w(t,\sigma^{I_\ell},x)\big|_{\tau_i-\tau_{i-1}=0}=0
\end{array}\right.$$

$\tilde{\tau}=x_0-\tau_{i-1}$，　$\tilde{\tau}_i=\tau_i-\tau_{i-1}$，$\cdots$　$\tilde{\tau}_1=\tau_1$ と座標変換し (4.4) に注意すると次の方程式を解けばよい　($\tilde{x}=(\tilde{\sigma}_\ell,x')$，$\tilde{\sigma}_\ell=(\tilde{\tau}_1,\cdots,\tilde{\tau}_\ell)$ とおく)

$$(4.10)\quad \begin{cases} D_{\tilde{\tau}_1}\cdots D_{\tilde{\tau}_\ell}\,\tilde{u}(t;\bar{x}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\ell+\mu} D_t^{-\mu} u(t,\bar{x}) \\ \qquad + \sum_{i=0}^{\infty} B_i D_t^{m-1-i} u(t,\bar{x}) + v(t;\bar{x}) \\ u(t;\bar{x}) - w(t;\bar{x})\big|_{\tilde{\tau}_i=0} = 0 \qquad i=1,\cdots,\ell \end{cases}$$

A_k,(B_i)は高々 k 階（i 階）の微分作用素で、本質的にはある表象から (3.3) によって与えられる。

逐次近似により (4.10) の可解性が示せるので 定理 1 が証明される。

定理２は次の補題をつかう。

> 補題３．(H.1) を仮定する。もし $\lambda_{i_k}(0,e_1)\neq\lambda_{i_{k-1}}(0,e_1)$ であれば 原点の十分小さな近傍を取れば $\frac{\partial\varphi^{I_\ell}}{\partial\tau_k}\neq 0$ としてよい。

τ_k の共役変数を ζ_k とすれば 補題より ζ_k^{-1} を表象とする擬微分作用素 $D_{\tau_k}^{-1}$ は well-defined となり，しかも，

$$(4.11)\qquad \int_a^b v(\varphi^{I_\ell};\tau_k.x)\,d\tau_k = \left[D_{\tau_k}^{-1} v(\varphi^{I_\ell};\tau_k.x)\right]_a^b$$

となる。つまり左辺の積分は $\varphi^{I_\ell}(b,x)=0$，と $\varphi^{I_\ell}(a,x)=0$ に特異性を持つ二つの関数の和で表わせる。

(1.4) において積分順序を交換して上の事実を使えば 定理2が得られる。

REFERENCES

1. Y. Hamada, The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 5(1969), 21-40.
2. Y. Hamada, Probleme analytique de Cauchy a caracteristiques multiples dont les donnees de Cauchy ont des singularites polaires, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. 276(1973), 1681-1684.
3. Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, Systemes d'equations aux derivees partielles a caracteristiques multiples: probleme de Cauchy ramifies; hyperbolicite partielle, J. Math. pures et appl., 55(1976). 297-352.
4. Y. Hamada and G. Nakamura, On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristics, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, 4(1977), 725-755.
5. T. Ishii, On a representation of the solution of the Cauchy problem with singular initial data, proc. Japan Acad., 56 (1980), 59-61.
6. T. Ishii, 特異初期値問題の解の表示について. 数理研講究録 410
7. T. Kobayashi, On the singular Cauchy problem for operators with variable involutiove characteristics, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo SEc. IA, 29(1982), 97-142.

8. T. Kobayashi, On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, to appear.

9. L. Lamport, An extension of a theorem of Hamada on the Cauchy problem with singular data, Bull. Amer. Math Soc. 79(1973) 776-779.

10. D. Shiltz, J. Vailllant et C. Wagschal, Problême de Cauchy ramifié racine caractéristique double ou triple en involution to appear.

11. J. Urabe, On the theorem of Hamada for a linear second order equation with variable multiplicities, J. Math. Kyoto Univ. 19-1(1978), 153-169.

12. J. Urabe, On Hamada's theorem for a certain class of the operators with double characteristics, Jour. Math. Kyoto Univ., 21(1981), 517-535.

13. C. Wagschal, Sur le prôbleme de Cauchy ramifié, J. Math. pures et appl. 53(1974), 147-164.

14. C. Wagschal, Une généralisation du problême de Gourst pour des systêmes d'équation intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, J. Math. pures et appl., 53 (1974),99-132.

15. C. Wagschal, Problême de Cauchy à caractéristiques multiples de multiplicité variable, C. R. Acad. Sc. Paris, 293(1981) 641-644.