数理解析研究所講究録
第 459 巻 1982 年 122-138

有理型関数のBorel変換

信大 理学部　浅田 明

§0. 正則関数のBorel変換

$\mathcal{O}^n$をC^nの原点での正則関数(の芽)の環, $\varphi(z) = \sum a_I z^I \in \mathcal{O}^n$, $I = (i_1, \cdots, i_n)$, とした時そのBorel変換$\mathcal{B}[\varphi]$は

(1) $$\mathcal{B}[\varphi] = \sum (a_I/I!) z^I, \quad I! = i_1! \cdots i_n!,$$
$$= 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \int_\gamma \varphi(\xi)/\xi \cdot \exp(z/\xi) d\xi,$$
$$\gamma = \{z \mid |z_i| = \varepsilon_i\}, \quad z/\xi = z_1/\xi_1 + \cdots + z_n/\xi_n,$$

で与えられる.

例1. $\mathcal{B}[(1-a\xi^m)^{-1}] = E_m(az^m)$, $E_m(z) = \sum_n z^n/(mn)!$ はm次Mittag-Leffler関数([3], Chap. XVIII).

例2. $\mathcal{B}[e^{a\xi}] = J_0(\sqrt{-1}\sqrt{2a\xi})$, $J_0(z)$は0次Bessel関数.

例3. $\mathcal{B}[\log(\xi+\lambda)] = \gamma + \log z - E_i(-z/\lambda)$, γはEuler数で$E_i(-z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{-1} dt = \gamma + \log z + \sum (-z)^n/n!n$.

定義から$\mathcal{B}$は線形で関数のtensor積をtensor積に移すが, 更に次の諸性質がある.

(2) $\mathcal{B}[\varphi\cdot\psi] = \mathcal{B}[\varphi]\#\mathcal{B}[\psi]$,

$$f\# g = \partial^n/\partial z_1\cdots\partial z_n \int_0^{z_1}\cdots\int_0^{z_n} f(z-t)g(t)\,dt,$$

(3) $\partial/\partial z_i\,\mathcal{B}[\varphi] = \mathcal{B}[\zeta_i^{-1}\varphi]$, $\int_0^{z_i}\mathcal{B}[\varphi]\,d\zeta_i = \mathcal{B}[\zeta_i\varphi]$,

(4) $\zeta_i\,\mathcal{B}[\varphi] = \mathcal{B}[z_i\varphi + z_i^2\partial\varphi/\partial z_i]$.

(2)から，$\mathrm{Exp}(C^n)$をC^nの指数型関数全体に#積を入れた環とした時，$\mathcal{B}$は$\mathcal{O}^n$と$\mathrm{Exp}(C^n)$の(局所環としての位相を含めた)環同型を与える．

尚φ及び超関数Tが適当な条件をみたせばそれらのFourier変換$\mathcal{F}$とBorel変換との間には

$$\mathcal{F}[T] = \mathcal{B}[1/(2\pi\sqrt{-1})^n T_\zeta(1/(1+2\pi\sqrt{-1}z\zeta))],$$

$$\mathcal{B}[\varphi] = \int_{R^n} J_0(\sqrt{-4\pi\sqrt{-1}z\xi})\,\mathcal{F}[\varphi](\xi)\,d\xi,$$

の関係がある．この第2の式から適当な超関数のclassに対しても$\mathcal{B}[T]$を

$$\mathcal{B}[T](f) = (2\pi\sqrt{-1})^n\,\mathcal{F}[T](H_0(f(x^2/4\pi\sqrt{-1})/x^2)(\sqrt{\xi})),$$

H_0は0次Hankel変換，としてBorel変換が定義出来る．

§1．有理型関数のBorel変換

Borel変換の積分による定義は，φが必ずしも正則でなくても意味がある．しかし積分の結果は積分路の取り方に関係する．例えば$\varphi = z_1z_2/(z_1+z_2)$とすれば

$$-1/4\pi^2\int_{\gamma_1}\varphi/\zeta\cdot\exp(z/\zeta)\,d\zeta = z_2,$$

$$-1/4\pi^2\int_{\gamma_2}\varphi/\xi\cdot\exp(z/\xi)\,d\xi = z_1,$$

$\gamma_1=\{|z_i|=\varepsilon_i,\ \varepsilon_1>\varepsilon_2\}$, $\gamma_2=\{|z_i|=\varepsilon_i,\ \varepsilon_1<\varepsilon_2\}$, となる.

φ を原点の近傍 U で有理型, $\varphi/z_1\cdots z_n$ の特異点集合を Y, 原点での $U-Y$ の局所 homology 群を $H_{0,n}(U-Y,C)$ と書く. γ を $H_{0,n}(U-Y,C)$ の生成元の代表とする時, γ に関する φ の Borel 変換 $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ を

(5) $$\mathcal{B}_\gamma[\varphi]=1/(2\pi\sqrt{-1})^n\int_\gamma\varphi(\xi)/\xi\cdot\exp(z/\xi)\,d\xi,$$

で定義する. この時 $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は指数型整関数であり, 固定された γ に対して (2), (3), (4) が成り立つ.

注意. $(\varphi/\xi)e^{z/\xi}d\xi$ を $U-Y$ の n 次微分形式, $H_{0,n}(U-Y,C)$ の生成元を $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$, その双対形式を ω_i とすれば

$$(\varphi/\xi)e^{z/\xi}d\xi=\sum\mathcal{B}_{\gamma_i}[\varphi]\,\omega_i+d\alpha$$

と書ける.

次に $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ を φ の級数展開から計算する為に, φ の Laurent 展開について調べる. 最初に $H_{0,n}(U-Y,C)$ は Stein 多様体の homology 群の極限となるから (適当な座標変換によって) $\gamma=\{w\,|\,|w_i|=\varepsilon_i\}$ と書ける事, 及び $\gamma=\{w\,|\,|w_i|=\varepsilon_i\}$ と $\gamma'=\{w\,|\,|w_i|=\varepsilon_i'\}$ が homologous, 且 $\varepsilon_i>\varepsilon_i'$, $1\leqq i\leqq n$, であれば φ は $\{w\,|\,\varepsilon_i>|w_i|>\varepsilon_i'\}$ で (w の級数として) Laurent 展開出来る事を注意する. z と w の間は正則変換だから, w による Laurent 展開から z による (一般には 2^n 種類の)

Laurent展開が得られる．wによるLaurent展開がどれだけ表はれるかは次の補題から解る．

補題1．$f(z)$が$U-Y$で正則の時，Yで定まるUの部分開集合$V \ni 0$とVの$(2n-1)$次元実解析的部分集合Γとがあって，$V-\Gamma$の連結成分は有限個，且D_iが$V-\Gamma$の連結成分なら$0 \in \overline{D_i}$でfはどのD_iの上でも同じ変数でLaurent展開可能になる．

証明．Yは$w_n^m + g_1(w_1, \cdots w_{n-1})w_n^{m-1} + \cdots + g_m(w_1, \cdots w_{n-1}) = 0$で与えられると仮定して良い．$f$が$U-Y$で有理型の時補題は$1/(w_n^m + \cdots + g_m)$のLaurent展開について$\Gamma$，$D_i$が定まれば正しい．$g_i$は正則だが帰納法の都合で$f = 1/(w_n^m + h_1 w_n^{m-1} + \cdots)$，$h_1, \cdots, h_m$は$w_1, \cdots, w_{n-1}$について有理型，の時$\Gamma$，$D_i$が定まる事を示す．

$n=1$の時補題は正しいから$n=k-1$迄正しいとし$n=k$，$m=1$とする．この時

$$f = w_k^{-1}(1 + w_k^{-1} g_1)^{-1}, \quad |w_k| > |g_1|,$$
$$= g_1^{-1}(1 + w_k g_1^{-1})^{-1}, \quad |w_k| < |g_1|,$$

だからC^{k-1}でg_1の零点及び特異点集合に対し定められた補題の条件をみたす集合をV'，Γ'とし，$B_\varepsilon = \{w_k \mid |w_k| < \varepsilon\}$を$V' \times B_\varepsilon \subset U$となる様取れば，$V = V' \times B_\varepsilon$，$\Gamma = \Gamma' \times B_\varepsilon \cup \{w \mid |w_k| = |g_1|\}$として補題が成立する．$m \leqq$

$l-1$ 迄正しいとし，$w_k^l + h_s w_k^{l-s} + \cdots + h_k = w_k^l + h_s u$，$h_s \neq 0$ と置く．仮定から $h_s u$ の零点及び特異点集合については補題は正しく，集合 $V' \subset U$ 及び $\Gamma' \subset V'$ が定まる．この時

$$f = w_k^{-l}(1 + w_k^{-l} h_s u)^{-1}, \quad |w_k|^l > |h_s u|,$$
$$= (h_s u)^{-1}\{1 + w_k^l (h_s u)^{-1}\}^{-1}, \quad |w_k|^l < |h_s u|,$$

だから $V = V'$，$\Gamma = \Gamma' \cup \{w \mid |w_k|^l = |h_s u|\}$ と取れば補題が成立する（U の Y に特異点を持つ有理型関数に対して）．

$\gamma = \{w \mid |w_i| = \varepsilon_i\}$，$\gamma' = \{w \mid |w_i| = \varepsilon_i'\}$ が共に D_j に含まれゝば U の Y に特異点を持つ総ての有理型形式 ω について $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$ だから γ と γ' は homologous である．$U-Y$ で正則な関数は D_j で w によって Laurent 展開出来る．又 $\gamma \in D_j$，$\gamma' \in D_k$，$j \neq k$ なら $\int_\gamma \omega \neq \int_{\gamma'} \omega$ となる有理型形式が存在するから γ と γ' は homologous でない．

系．f が $U-Y$ で正則の時 f の原点の近傍での w による Laurent 展開は高々 $\dim H_{0,n}(U-Y, C)$ 種類である．

$\gamma \in D_j$ の時 D_j を D_γ と書く．D_γ での f の w による Laurent 展開の係数は $a_{i_1 \cdots i_n} = (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\int_\gamma w_1^{-i_1-1} \cdots w_n^{-i_n-1} f\,dw$ で与えられる．この f の Laurent 展開 $\sum a_{i_1 \cdots i_n} w_1^{i_1} \cdots w_n^{i_n}$ に対し

$$f_{0,\gamma} = \sum_{i_1 \geq 0, \cdots i_n \geq 0} a_{i_1 \cdots i_n} w_1^{i_1} \cdots w_n^{i_n},$$

と置く．特に $w = z$ であれば $\mathcal{B}_\gamma[f] = \mathcal{B}[f_{0,\gamma}]$ である．

同じ関数の異なる路に関する Borel 変換などの様な関係に

あるかは良く解らない．この問題は（定式化も充分ではないが）次の二つの問題と関係すると思はれる．

問題1．D_iで収束するLaurent級数が原点の近傍での有理型関数（又は$U-Y$の正則関数）のLaurent展開である為の条件を求めよ．

問題2．D_iとD_jで収束するLaurent級数が，同じ関数のLaurent展開である為の条件を求めよ．

1変数の時[4]に有理関数になる為の必要十分条件，[5]に有理型関数になる為の必要条件がある事を，その他の文献と共に吉野氏から教えて頂いた．感謝します．

§2．多価関数のBorel変換

多価関数のBorel変換を(2)，(3)，(4)をみたす様定義する事を目標とする．特に$\mathcal{B}[\log \zeta] = y$がその様に定義出来たとすれば$zy = \mathcal{B}[\zeta \log \zeta] + z$だから(3)により$y + zy' = y + 1$となり$y = \log z + c$となる．$c$は補題2からきまる．

補題2．γをEuler数とした時(6)が成り立つ．

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!\,(\log z)^{\# n} = e^{-\gamma t}/\Gamma(1+t)\cdot x^t.$$

証明．最初に$\log \Gamma(1+t) = -\gamma t + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \zeta(m)/m\, t^m$から

(7) $$e^{-\gamma t}/\Gamma(1+t)$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{[n/2]} \sum_{2 \leqq j_1 \leqq \cdots \leqq j_s,\ j_1 + \cdots + j_s = n} (-1)^{n-s} \frac{\zeta(j_1) \cdots \zeta(j_s)}{j_1 \cdots\cdots j_s} \right\} t^n$$

となる事，及び $2 \leqq j_1 \leqq \cdots \leqq j_s$，$j_1 + \cdots + j_s = n$ となる $j_1, \cdots \cdots, j_s$ を固定した時

$$(8) \qquad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \frac{1}{j_{\sigma(1)} (j_{\sigma(1)} + j_{\sigma(2)}) \cdots\cdots (j_{\sigma(1)} + \cdots + j_{\sigma(s)})} = \frac{1}{j_1 j_2 \cdots j_s}$$

となる事を注意する．(8) は $s = 1$ の時正しいから帰納法により $\sum_{\sigma(s)=k} 1/\{j_{\sigma(1)} \cdots (j_{\sigma(1)} + \cdots + j_{\sigma(s)})\} = 1/j_1 \cdots \hat{j_k} \cdots j_s (j_{\sigma(1)} + \cdots + j_{\sigma(s)}) = 1/n \cdot j_1 \cdots \hat{j_k} \cdots j_s$ となり $\sum_{k=1}^{n} 1/j_1 \cdots \hat{j_k} \cdots j_s = (j_1 + \cdots + j_s)/j_1 \cdots j_s$ から成立する．

$\int_0^x \log(x - t)(\log t)^{n-1} dt = \log x \int_0^x (\log t)^{n-1} dt - \sum_{m=1}^{\infty} 1/m \cdot x^{-m}$. $\int_0^x t^m (\log t)^{n-1} dt$ だから $\log x \# (\log x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (\log x)^k$ と置けば

$$a_{n,n} = 1, \quad a_{n,n-1} = 0, \quad a_{n,0} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\zeta(n),$$

$$a_{n,k} = (n-1)!/k!\,(n-k-1)! \cdot a_{n-k,0}, \quad 2 \leqq k \leqq n-1,$$

となる．之から $(\log x)^{\# n} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} (\log x)^k$ と置けば

$$b_{n,n} = 1, \quad b_{n,n-1} = 0, \quad b_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} b_{n-k,0}, \quad 2 \leqq k \leqq n-1,$$

$$b_{n,0} = \sum_{s=1}^{[n/2]} \sum_{j_i \geqq 2,\ j_1 + \cdots + j_s = n} (-1)^{n-s} \frac{n!\,\zeta(j_1) \cdots \zeta(j_s)}{j_1 (j_1 + j_2) \cdots (j_1 + \cdots + j_s)}, \quad n \geqq 2,$$

となるが，(8) により $n \geqq 2$ の時 $b_{n,0}/n!$ は $e^{-\gamma t}/\Gamma(1+t)$ の Taylor 展開の n 次の項の係数に等しい．$e^{-\gamma t}/\Gamma(1+t)$ は

整関数だから任意の $c>0$ に対し $|b_{n,0}/n!| = o(c^n)$ で従って

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!\,(\log x)^{\# n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n! \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(\log x)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{n=k}^{\infty} k!/n!\, b_{n,k}\, t^{n-k}\Bigr) t^k/k!\,(\log x)^k$$
$$= \Bigl(1+\sum_{n=2}^{\infty} b_{n,0}/n!\, t^n\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!\,(\log x)^n\Bigr)$$
$$= e^{-\gamma t}/\Gamma(1+t)\, x^t$$

となり (6) が成り立つ.

定義. $\log z$ の Borel 変換を (9) で定義する.

(9) $\quad \mathcal{B}[\log \zeta] = \log z + \gamma$.

(9) から $\mathcal{B}[\log\zeta - \gamma] = \log z$, これと (6) から $\mathcal{B}[e^{-\alpha\gamma}\zeta^{\alpha}] = e^{-\alpha\gamma} z^{\alpha}/\Gamma(1+\alpha)$ となるから

(10) $\quad \mathcal{B}[\zeta^{\alpha}] = z^{\alpha}/\Gamma(1+\alpha)$, $\alpha \neq -1, -2, \cdots$,

である. 尚 $z^a \# z^b = \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)/\Gamma(a+b+1)\cdot z^{a+b}$ から $(z^{1/p})^{\# p} = \{\Gamma(1+1/p)\}^p z$ となり (10) から

(11) $\quad (\mathcal{B}[\zeta^{1/p}])^{\# p} = \mathcal{B}[\zeta]$

である.

又 (9) と (3) から正の整数 n に対し (12) が得られる.

(12) $\quad \mathcal{B}[(-1)^{n-1}/(n-1)!\,\zeta^{-n}\log\zeta] = z^{-n}$.

(9) は形式的な定義だが例3により $\mathrm{Re}\,\lambda z > 0$ であれば

$$\lim_{\lambda\to 0} \mathcal{B}[\log(\zeta+\lambda)] = \log z + \gamma,$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \mathcal{B}[(-1)^{n-1}/(n-1)!\,(\zeta+\lambda)^{-n}\log(\zeta+\lambda)] = z^{-n}$$

となり，この収束は $\arg\lambda$ が一定の時 $\{z \mid |z|>\varepsilon,\ \theta \leqq \arg z\lambda \leqq \theta'\}$, $\varepsilon>0$, $-\pi/2<\theta<\theta'<\pi/2$，で一様である．

又[3]に従って $\int_\alpha^{(0,+)} f(\xi)d\xi$ で α から始まって原点を正の向きに一周し α に終る道の上での f の積分を表はせば公式

$$z^s/\Gamma(1+s) = 1/2\pi\sqrt{-1}\int_{\infty\exp\sqrt{-1}\delta}^{(0,+)} \xi^{s-1}\exp(z/\xi)\,d\xi,$$

$$\pi/2+\delta<\arg z<3/2\,\pi+\delta,\quad \delta\leqq\arg\xi\leqq 2\pi+\delta,$$

が成立するから(10)も或程度実質的な意味がある．

注意．(3)との関連で $f=\mathfrak{B}[\varphi]$ の時 $(d/dz)^\alpha f = \mathfrak{B}[\xi^{-\alpha}\varphi]$, $\log(d/dz)f = -\mathfrak{B}[\log\xi\cdot\varphi]$ と定義出来る．特にこの定義で

$$(d/dz)^\alpha z^n = n!/\Gamma(n-\alpha+1)\,z^{n-\alpha},$$

$$\log(d/dz)z^n = -z^n[\log z+\{\gamma-(1+1/2+\cdots+1/n)\}],$$

だから $\lim_{h\to 0} 1/h\{(d/dz)^h z^n - z^n\} = \log(d/dz)z^n$ となる．

例4．$d^\nu/dz^\nu J_0(2\sqrt{z})|_{z=(x/2)^2} = (x/2)^{-\nu}J_{-\nu}(x)$,

$(\log d/dz)J_0(2\sqrt{z})|_{z=(x/2)^2} = -\pi/2\cdot Y_0(x) + J_0(x)\log(1/2\,x)$.

§3．代数型関数のBorel変換

φ を原点の近傍で代数型とすれば，φ の特異点及び分岐点の集合を Y とした時 $U-Y$ に補題1が使え，之と $\{z \mid |z_i|=\varepsilon_i\}$ の基本群が $Z\oplus\cdots\oplus Z$ となる事から φ は各 D_i の上で Puiseaux 展開出来る．(10)から Puiseaux 級数 $\sum a_I z^{I/p}$, $I/p=(i_1/p_1,\cdots,i_n/p_n)$ のBorel変換は形式的に

(13) $\mathcal{B}[\sum a_I \xi^{I/p}] = \sum a_I / \Gamma(I/p+1) z^{I/p}$,

となる答だが，φ の $\gamma = \{z \mid |z_i| = \varepsilon_i\}$ の上での Puiseaux 展開が負の巾を含まなければ，Mittag-Leffler 関数を用いて φ の γ に関する（(13) の意味の）Borel 変換 $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は

(14) $\mathcal{B}_\gamma[\varphi] = 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \int_\gamma \xi^{-1} \varphi(\xi_1^{p_1}, \dots, \xi_n^{p_n}) \prod_{i=1}^n E_{1/p_i}(z_i^{1/p_i}/\xi_i) d\xi$,

と積分表示され，$\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は（γ の上の Puiseaux 展開が負の巾を含まない時）全平面に解析接続され，各分枝について $|\mathcal{B}_\gamma[\varphi](x)| = O(e^{C\|x\|})$ となる．

(14) を負の巾を含む Puiseaux 級数に拡張する為，形式的巾級数 $\sum_{n>0,\, p \nmid n} 1/\Gamma(1-n/p)\, x^p = \sum_{n>0,\, p\nmid n} 1/\pi\, \Gamma(n/p) \sin(\pi n/p)\, x^n$ が $1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p) \int_0^\infty t^{r/p-1}\, 1/(1+tx^p)\, e^{-t} dt$ の漸近展開になる事を利用する．$t^{\alpha-1}/(1+t)$ の Laplace 変換は $\Gamma(\alpha) e^s \Gamma(1-\alpha, s)$，$\Gamma(1-\alpha, s) = \int_s^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt$，だから

$$1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p) \int_0^\infty t^{r/p-1}\, 1/(1+tx^p)\, e^{-t} dt$$
$$= 1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p)\, \Gamma(r/p)\, \Gamma(1-r/p, x^{-p}) \exp(x^{-p}),$$

となり，之は原点を除いて一価正則で原点に真性特異点を持つ関数に解析接続される．

定義．正整数 p に対し

$$E_{-1/p}(x)$$
$$= 1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p)\, \Gamma(r/p)\, \Gamma(1-r/p, x^{-p}) \exp(x^{-p}),$$

$$F_p(x) = E_{1/p}(x) + E_{-1/p}(1/x),$$

と定義する.

定義から

定理 1. 代数型関数 φ が $\gamma = \{z \mid |z_i| = \varepsilon_i\}$ の上で Puiseaux 展開され, $\varphi(z_1^{p_1}, \cdots, z_n^{p_n})$ が γ の上で一価正則であれば, φ の γ に関する ((13) の意味の) Borel 変換 $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は

(15) $$\mathcal{B}_\gamma[\varphi] = 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \int_\gamma \zeta^{-1} \varphi(\zeta_1^{p_1}, \cdots, \zeta_n^{p_n}) \prod_{i=1}^{n} F_p(z_i^{1/p_i}/\zeta_i)\, d\zeta$$

と積分表示される.

系. $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は全空間 (の Zariski 開集合) に解析接続され, 各分枝について $|\mathcal{B}_\gamma[\varphi](x)| = O(e^{C\|x\|})$, $\|x\| \to \infty$, である.

有理型関数の場合と同様に, 代数型関数の Borel 変換も $H_{0,n}(U - Y, C)$ の生成元 γ の取り方に関係するが, この関係の仕方は良く解らない. この問題は有理型関数と同じ問題 1, 2 (但し Laurent 級数を Puiseaux 級数に変える) を調べる必要があると思はれる.

尚補題 1 により $U - Y \supset V - \Gamma = \cup D_\gamma$ とした時, $D_\gamma + \lambda = \{z + \lambda \mid z \in D_\gamma\}$ と書いて路 $\lambda = \lambda(t)$ が固定された路 γ について $0 \in D_\gamma + \lambda$, $0 < t < \varepsilon$, となる様選ばれれば, 例 3 により $\mathrm{Re}\,\lambda_1 z_1 > 0, \cdots, \mathrm{Re}\,\lambda_n z_n > 0$, $\lambda = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$, の時

$$\lim_{t \to 0} \mathcal{B}[\varphi(\zeta + \lambda(t))] = \mathcal{B}_\gamma[\varphi]$$

となる. 又 $Y = \{z \mid z_1 \cdots z_n = 0\}$ であれば $\mathcal{B}[\varphi]$ は一意的に定まるが, 特に領域 $\{z \mid \pi/2 + \delta_i < \arg z_i < 3/2\,\pi + \delta_i\}$ では

$$\mathcal{B}[\varphi](z)$$
$$= 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \int_{\infty \exp\sqrt{-1}\delta_1}^{(0,+)} \cdots \int_{\infty \exp\sqrt{-1}\delta_n}^{(0,+)} \varphi(\xi)/\xi \cdot \exp(z/\xi)\, d\xi,$$

と書ける．

注意．§2の定義から必ずしも代数型でないφに対しても，Borel変換が定義出来る事がある．例えば$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$の時 $\mathcal{B}[(1-\xi^{\alpha})^{-1}] = E_\alpha(z^{\alpha})$，$\alpha$次Mittag-Leffler関数，又$f$が指数型整関数なら $\mathcal{B}[f(\xi^{-1})\log\xi] = \mathcal{B}^{-1}[f(-\xi)](z^{-1})\cdot z^{-1}$ となる．但し$\mathcal{B}^{-1}[f]$はfのBorel逆変換像である．

§4．逆Borel変換

指数型整関数fに対しては逆Borel変換$\mathcal{B}^{-1}[f]$が

(16) $$\mathcal{B}^{-1}[f] = \int_{R^{n,+}} e^{-t} f(zt)\, dt,$$

で与えられる事が知られており，更に必ずしも指数型でない関数に対しても

$$\int_0^\infty e^{-t} \log(zt)\, dt = \log z - \gamma,$$
$$\int_0^\infty e^{-t}/(1-\alpha z t)\, dt = 1/\alpha z \exp(-1/\alpha z)\, Ei(1/\alpha z),$$

等の式が成立する．この第1式は(9)と矛盾しない．

(16)の右辺の積分がfに対して収束しなくても，例えば$(\partial^I/\partial z^I)F = f$で$F$に対しては$\mathcal{B}^{-1}[F]$が定義出来れば$\mathcal{B}[z^{-I}\mathcal{B}^{-1}[F]] = f$だから，$f$のBorel逆像は$z^{-I}\mathcal{B}^{-1}[F]$で与えられこれも$\mathcal{B}^{-1}[f]$と書く．この時は$\mathcal{B}^{-1}[f]$は一意的ではない．

例5. $\mathcal{B}^{-1}[(1-\alpha\zeta)^{-m}] = (-1)^{m-1}/(m-1)!\,(\alpha z)^m e^{-(1/\alpha z)} E_i(1/\alpha z)$, $\mathcal{B}^{-1}[1/(\zeta-\alpha)] = -1/z\, e^{-\alpha/z} E_i(\alpha/z)$, $\alpha \neq 0$. 他方 $\alpha = 0$ の時 $\mathcal{B}^{-1}[1/\zeta] = \log z/z$ で之は α について不連続だが

$$-1/z\, e^{-\alpha/z} E_i(\alpha/z) = \log z/z - (\gamma + \log(-\alpha))/z + O(|\alpha|),$$

であり $\mathcal{B}[(\gamma+\log(-\alpha))/\zeta] = 0$ だから mod. Ker $\mathcal{B}$ で連続になる.

同様に $\mathcal{B}^{-1}[\zeta^\alpha] = \Gamma(1+\alpha) z^\alpha$, $\mathcal{B}^{-1}[\zeta^{-m}] = (-1)^{m-1}/(m-1)!\, z^{-m}\log z$ とすれば

$$\mathcal{B}^{-1}[\zeta^{-m+\varepsilon}] = \pi/\Gamma(m-\varepsilon)\sin\pi(m-\varepsilon)\, z^{-m} +$$
$$+ \pi\varepsilon/\Gamma(m-\varepsilon)\sin\pi(m-\varepsilon)\, z^{-m}\log z + O(\varepsilon),$$

だから $\mathcal{B}^{-1}$ は α について mod. Ker $\mathcal{B}$ で連続になる.

注意. $f(z)$ が有理型の時は $\mathcal{B}^{-1}[\mathcal{B}_\gamma[f]] = f_{0,\gamma}$ で必ずしも f ではない.

$f(z)$ が有理型（又は代数型）の時, $f(z)$ の特異点（及び分岐点）の集合を Y, $Y \cap C^* \times \cdots \times C^*$ から $S^1 \times \cdots \times S^1 = \{z \mid |z_i| = 1\}$ への射影 π : $\pi(z) = (z/|z|)$, の像を Γ とすれば, $\arg z \in \Gamma$ の時 $|f(zt)| = O(e^{c\|t\|})$ であれば (16) によって $\mathcal{B}^{-1}[f](z)$ が定義出来る. C^n 内の π によって $S^1 \times \cdots \times S^1$ に1対1に写り Γ と只一点 $\gamma(1/2)$ で交はる路 $\gamma(t)$ にそった時

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{B}^{-1}[f](\gamma(1/2-\varepsilon)) - \mathcal{B}^{-1}[f](\gamma(1/2+\varepsilon))]$$
$$= 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \operatorname{Res}^n_{Y,\gamma(s)} e^{-t} f(zt),$$

だから, この時 $\mathcal{B}^{-1}[f]$ は C^n 上分岐した領域で定義された多価

関数になる．$S^1\times\cdots\times S^1-\Gamma$ が連結でなければ $\mathcal{B}^{-1}[f]$ は一意的ではない．

例 6．$\mathcal{B}^{-1}[1/(\zeta_1-\zeta_2)]=z_1\log z_1/(z_1+z_2)$，又は $-z_2\log z_2/(z_1+z_2)$．この二種の関数は $\gamma_1=\{|z_1|=\varepsilon_1>|z_2|=\varepsilon_2\}$，$\gamma_2=\{|z_1|=\varepsilon_1<|z_2|=\varepsilon_2\}$ とした時

$$\mathcal{B}_{\gamma_1}[\zeta_1\log\zeta_1/(\zeta_1+\zeta_2)]=1/(z_1-z_2),$$

$$\mathcal{B}_{\gamma_2}[-\zeta_2\log\zeta_2/(\zeta_1+\zeta_2)]=1/(z_1-z_2),$$

となる．その意味で $\mathcal{B}_{\gamma_1}{}^{-1}[1/(\zeta_1-\zeta_2)]=z_1\log z_1/(z_1+z_2)$，$\mathcal{B}_{\gamma_2}{}^{-1}[1/(\zeta_1-\zeta_2)]=-z_2\log z_2/(z_1+z_2)$ と書く．

§ 5．応用例

1．(3) から定数係数偏微分作用素 $P(\partial/\partial z)$ については $P(\partial/\partial z)\mathcal{B}_\gamma[\varphi]=\mathcal{B}_\gamma[P(\zeta^{-1})\varphi]$ となるから $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]=u$ であれば $\mathcal{B}_\gamma[\varphi/P(\zeta^{-1})]$ が $P(\partial/\partial z)f=u$ の解になるが γ の撰び方は f の初期値と次の様に関係する．

定理 2．$P(\partial/\partial z)=\partial^m/\partial z_1^m+P_1(\partial/\partial z_2,\cdots,\partial/\partial z_n)\partial^{m-1}/\partial z_1^{m-1}+\cdots+P_m(\partial/\partial z_2,\cdots,\partial/\partial z_n)$ とすれば，$1/(z\cdot P(z^{-1}))$ の特異点集合を Y とした時 $H_{0,n}(U-Y,C)$ の生成元 γ で，代表が $\{z\,|\,|z_i|=\varepsilon_i\}=\gamma$，且 $\gamma'=\{z\,|\,|z_i|=\varepsilon_i'\}$，$\varepsilon_1'<\varepsilon_1$，$\varepsilon_i'=\varepsilon_i$，$i\geqq 2$，なら γ と γ' は homologous となるものが存在し，このγについては

(17) $\quad \partial^s/\partial z_1^s\,\mathcal{B}_\gamma[\varphi/P(\zeta^{-1})]\big|_{z_1=0}=0,\quad 0\leqq s\leqq m-1,$

である（但しφはz_1について正則とする）．

証明．仮定から$P(z^{-1}) = z_1^{-m}(1 + z_1 P_1(z_2^{-1},\cdots,z_n^{-1}) + \cdots + z_1^{m} P_m(z_2^{-1},\cdots,z_n^{-1})) = z_1^{-m}(1+z_1 Q(z_1, z_2^{-1},\cdots,z_n^{-1}))$で不等式$|z_1 Q(z_1, z_2^{-1},\cdots,z_n^{-1})| < 1$が$|z_i| = \varepsilon_i$で成立すれば$|z_1| < \varepsilon_1$, $|z_i| = \varepsilon_i$, $i \geq 2$, でも成立するからγの存在が解る．この時φがz_1について正則なら$z_1^{-s}\varphi / P(z_1^{-1},\cdots,z_n^{-1})$の$\gamma$に関するLaurent展開は$z_1$の負の巾を含まないから，(5)により(17)が成立する．

注意．uが有理型（又は代数型）であっても$\mathcal{B}_\gamma[\varphi] = u$であれば$\mathcal{B}_\gamma[\varphi/P(\zeta^{-1})]$は$P(\partial/\partial z) f = u$の解を与える．しかしこの時は$z_1^{-s}\varphi / P(z_1^{-1},\cdots,z_n^{-1})$の$\gamma$に関するLaurent展開（Puiseuax展開）がz_1の負の巾を含む事がある（又は$\log z_1$の項を含む）から(17)は必ずしも成立しない．

尚一般に$P(z^{-1})$の特異点及び零点集合をWとすると任意の複素数αについて$\{P(z^{-1})\}^\alpha$，及び$\log\{P(z^{-1})\}$の特異点（及び分岐点）集合はWに含まれるから，$H_{0,n}(U-W, C)$の生成元γを固定した時$\{P(\partial/\partial z)\}^\alpha \mathcal{B}_\gamma[\varphi] = \mathcal{B}_\gamma[P(\zeta^{-1})^\alpha \varphi]$で$\{P(\partial/\partial z)\}^\alpha$が定義出来，$\log\{P(\partial/\partial z)\}\mathcal{B}_\gamma[\varphi] = \mathcal{B}_\gamma[\log\{P(\zeta^{-1})\}\varphi]$で定義される$\log\{P(\partial/\partial z)\}$がその生成作用素になる．但しこの時$u$が一価でも非整数の$\alpha$については$\{P(\partial/\partial z)\}^\alpha u$は多価になる．

2. $P(\partial/\partial z)$ と γ は定理2と同じとする. $P(\xi)=\prod_i(\xi_1+\sigma_i)^{r_i}$ とすれば

$$P(\xi^{-1})=\xi_1^{-m}\prod_{r_1+\cdots+r_t=m}(1+\xi_1\sigma_i(\xi_2^{-1},\cdots,\xi_n^{-1}))^{r_i}$$

だから任意の(特異点を持つ多価)関数 $\varphi(\xi_2,\cdots,\xi_n)$ に対し

$$P(\partial/\partial z)\mathcal{B}_\gamma[(1+\xi_1\sigma_i)^{-s}\varphi]=0,\quad s\leqq r_i,$$

$$\partial^k/\partial z_1^k\,\mathcal{B}_\gamma[(1+\xi_1\sigma_i)^{-s}\varphi]|_{z_1=0}=\mathcal{B}_{\gamma'}[(s+k)\cdots(k+1)\sigma_i^k\varphi_i],$$

となる. 但し $\gamma=\{z\,|\,|z_i|=\varepsilon_i\}$ の時 $\gamma'=\{(z_2,\cdots,z_n)\,|\,|z_i|=\varepsilon_i,\ i\geqq 2\}$ である. 従って $\mathcal{B}_{\gamma'}[\psi_j]=u_j$, $0\leqq j\leqq m-1$, の時関数 $\varphi_{i,s}$, $1\leqq i\leqq t$, $1\leqq s\leqq r_i$, を連立方程式

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{s=1}^{r_i}(s+k)\cdots(k+1)\sigma_i^k\varphi_{i,s}=\psi_k,\quad 0\leqq k\leqq m-1,$$

となる様撰べば(常に可能) $f=\mathcal{B}_\gamma[\sum_{i=1}^{t}\sum_{s=1}^{r_i}(1+\xi_1\sigma_i)^{-s}\varphi_{i,s}]$ が方程式 $P(\partial/\partial z)f=0$ の初期値 $\partial^j/\partial z_1^j f|_{z_1=0}=u_j$, $0\leqq j\leqq m-1$, を満たす解になる. この場合 u_j は特異点(及び分岐点)を持っても良い.

注意. 正規化定理を使う事により単一未知関数についての過剰決定系(定数係数)の初期値問題についても同じ結果が得られる.

尚初期値が特異点を持つ時上記の方法で解を計算するには $\mathcal{B}[\xi^\alpha\log\xi]$ を計算する必要があるが, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ の時 $z^\alpha\#\log z=z^\alpha(\log z+1/(\alpha+1)-\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha+1)/m(m+\alpha+1))$ だから (2) と (9), (10) により

$$(18)\qquad \mathcal{B}[\xi^{\alpha}\log\xi] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\log z + \gamma + \frac{1}{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{m(m+\alpha+1)}\right\},$$

$$\alpha \neq -1, -2, \cdots\ ,$$

である.

文献

[1]. Asada, A.: Some extensions of Borel transformation, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 9 (1974), 71-89.

[2]. ――――: Borel transformation in non-analytic category, ibid. 12 (1977), 1-35.

[3]. Erdélyi, A, et al.: Higher Transcendental Functions, I～III, New York, 1953.

[4]. Pólya, G.-Szegö, G.: Problems and Theorems in Analysis, II, Berlin, 1976.

[5]. Pommerenke, C.H.: Hankel determinants and meromorphic functions, Mathematika 16 (1969), 158-166.