数理解析研究所講究録
第 460 巻 1982 年 27-36

あるベイズ論的最適選択問題について

追手門学院大学　玉置光司

1. 序

ここで扱う問題は逐次抜取り問題と呼ばれるものの一種で一般には次のように述べることができる。

確率分布関数 F(x) を持つ統計的母集団から毎回1個ずつN回の逐次抜取りが許されている。我々は任意回の抜取りの後にこのゲームを停止することが許され，最後の回に抜き取った値を利得として受け取る。期待利得を最大にする停止政策（最適停止政策）を求め，さらにその時の期待利得も求めよ。

分布関数 F(x) のパラメーターが既知の場合は容易に解くことができる（Gilbert and Mosteller [2], DeGroot [1]）が，分布が未知パラメーターを含む場合はかなり面倒になる。既知の場合は最後の抜取り値と残り抜取り回数のみが決定に影響を与えるが，未知の場合はパラメーター推測の為に過去の抜取り値がすべて影響してくるからである。平均が未知パラメーターである正規母集団からの抜取りは Sakaguchi [4] の先駆的な論文において解決された。区間の上端と下端が未知パラメーターである一様母集団からの抜取りは Stewart [5] が

解決した。我々がこの論文で取り扱うのは未知パラメーターを含むガンマ分布からの抜取り問題である。

2. 本論

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ をパラメーター λ, μ のガンマ母集団からの無作為標本とする（λ は既知，μ は未知とする）。その確率密度関数を $g(x|\lambda,\mu)$ とすると

$$g(x|\lambda,\mu) = \frac{\mu^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

である。よく知られている（DeGroot [1]）ように μ の共役事前分布（conjugate prior distribution）はパラメーター α, β のガンマ分布である。以上の設定より，$X_1=x_1$, $X_2=x_2, \cdots X_i=x_i$ を観測した後の μ の事後分布はベイズの定理より，パラメーター $\alpha+i\lambda$, $\beta+s_i$ ($s_i \equiv \sum_{j=1}^{i} x_j$) のガンマ分布に従う。故に X_i の事後密度は

$$f(x_i|s_{i-1}) = \int_0^{\infty} g(x_i|\lambda,\mu)\, g(\mu|\alpha+(i-1)\lambda, \beta+s_{i-1})\, d\mu$$

$$= \frac{(\beta+s_{i-1})^{\alpha+(i-1)\lambda}}{(\beta+s_{i-1}+x_i)^{\alpha+i\lambda}} \cdot \frac{x_i^{\lambda-1}}{B(\lambda, \alpha+(i-1)\lambda)} \qquad (1)$$

で与えられる。ここに $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \ (m,n>0)$ はベーター関数で，$B(m,n)=\Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n)$ を利用した。

今 $v_i(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}) \equiv v_i(s_{i-1})$ を既に $i-1$ 個の抜取り値 $X_1=x_1$,

$X_2=x_2, \cdots, X_{i-1}=x_{i-1}$ を観測してまだ停止していない時、この先、最適に振る舞って得られる期待利得と定義すると、次の最適方程式が得られる。

$$v_i(s_{i-1})=\int_0^\infty \max\{x_i, v_{i+1}(s_{i-1}+x_i)\}f(x_i|s_{i-1})dx_i \qquad (2)$$

$$i=1,2,\cdots,N-1.$$

終端条件は

$$v_N(s_{N-1})=\int_0^\infty x_N f(x_N|s_{N-1})dx_N \qquad (3)$$

で与えられるから(2), (3)より後向きに逐次最適政策が求められる。後述の定理で最適政策が非常に簡単な形になることが示されるが、その前に関数 $T_i(y|s_{i-1})$ を

$$T_i(y|s_{i-1})\equiv\int_0^\infty \max(x_i-y,0)f(x_i|s_{i-1})dx_i=\int_y^\infty(x_i-y)f(x_i|s_{i-1})dx_i$$

で定義すると(1)より

$$T_i(y|s_{i-1})=\frac{\mu(\beta+s_{i-1})}{\alpha+(i-1)\lambda-1}\cdot I\left(\alpha+(i-1)\lambda-1, \lambda+1; \frac{\beta+s_{i-1}}{\beta+s_{i-1}+y}\right)-yI\left(\alpha+(i-1)\lambda, \lambda; \frac{\beta+s_{i-1}}{\beta+s_{i-1}+y}\right) \quad (4)$$

となる。ここに $I(m,n;t)$ は不完全ベーター関数で

$$I(m,n;t)=\frac{\int_0^t x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx}{B(m,n)}, \quad (m,n>0, 0<t<1)$$

である。

定理1.

減少数列 $\{c_i ; 1 \leq i \leq N\}$ が存在して，$v_i(s_{i-1}) = c_i(\beta + s_{i-1})$ と書かれる。$i^* = \max\{i \mid c_i \geq 1\}$ とすると，最適政策は最初の i^*-1 個は無条件に抜取るが，$i \geq i^*$ 以後は，$x_i \geq v_{i+1}(s_i)$ となり次第停止して，抜取り値 x_i を受け取ることである。ここに c_i は漸化式

$$c_N = \frac{\lambda}{\alpha + (N-1)\lambda - 1},$$

$$c_i = \frac{1}{\alpha + (i-1)\lambda - 1}\Big[(\alpha + i\lambda - 1)c_{i+1} + \lambda(1 - c_{i+1}) I(\alpha + (i-1)\lambda - 1, \lambda + 1 ; 1 - c_{i+1})$$
$$- (\alpha + (i-1)\lambda - 1)c_{i+1} I(\alpha + (i-1)\lambda, \lambda ; 1 - c_{i+1})\Big] \quad (5)$$
$$i^* \leq i < N,$$

$$c_i = \frac{\alpha + i\lambda - 1}{\alpha + (i-1)\lambda - 1} c_{i+1}, \quad 1 \leq i < i^*$$

で与えられる。最適政策の下での期待利得は

$$v_1(s_0) \equiv v_1(0) = c_1\beta = \frac{\alpha + (i^*-1)\lambda - 1}{\alpha - 1}\beta c_{i^*}. \quad (\alpha \neq 1)$$

である。

証明.

後向きの帰納法で証明する。$i = N$ の場合は(3),(4)より

$$v_N(s_{N-1}) = T_N(0 \mid s_{N-1}) = \frac{\lambda(\beta + s_{N-1})}{\alpha + (N-1)\lambda - 1}$$

となり明らか。$i+1$ で定理の成立を仮定して，i の時にも成立することを示す。仮定より，$v_{i+1}(s_i) = c_{i+1}(\beta + s_{i-1} + x_i)$ を(2)に代入すると，

$$v_i(s_{i-1}) = \int_0^\infty \max\{x_i,\ c_{i+1}(\beta + s_{i-1} + x_i)\} f(x_i \mid s_{i-1})\,dx_i. \qquad (6)$$

$i \geq i^*$ と $i < i^*$ に分けて示す。

(i) $i \geq i^*$ の時.

$x_i = c_{i+1}(\beta + s_{i-1} + x_i)$ の根を $\bar{x}_i$ とすると，$\bar{x}_i = c_{i+1}(\beta + s_{i-1})/(1 - c_{i+1})$ であり，(4)より

$$T_i(0 \mid s_{i-1}) = \frac{\lambda(\beta + s_{i-1})}{\alpha + (i-1)\lambda - 1}$$

$$T_i(\bar{x}_i \mid s_{i-1}) = \frac{\lambda(\beta + s_{i-1})}{\alpha + (i-1)\lambda - 1} \cdot I(\alpha + (i-1)\lambda - 1, \lambda + 1; 1 - c_{i+1})$$
$$- \frac{c_{i+1}(\beta + s_{i-1})}{1 - c_{i+1}} \cdot I(\alpha + (i-1)\lambda, \lambda; 1 - c_{i+1}).$$

を考慮すると，(6)は

$$v_i(s_{i-1}) = c_{i+1}[(\beta + s_{i-1}) + T_i(0 \mid s_{i-1})] + (1 - c_{i+1}) T_i(\bar{x}_i \mid s_{i-1})$$
$$= (\beta + s_{i-1})\Big[c_{i+1} + \frac{\lambda c_{i+1}}{\alpha + (i-1)\lambda - 1} + \frac{\lambda(1 - c_{i+1})}{\alpha + (i-1)\lambda - 1}$$
$$\cdot I(\alpha + (i-1)\lambda - 1, \lambda + 1; 1 - c_{i+1}) - c_{i+1} I(\alpha + (i-1)\lambda, \lambda; 1 - c_{i+1})\Big].$$

これより(5)が得られる。

(ii) $i < i^*$ の時.

この場合明らかに, $x_i < c_{i+1}(\beta + s_{i-1} + x_i)$ であるから(6)より直ちに

$$v_i(s_{i-1}) = \int_0^\infty c_{i+1}(\beta + s_{i-1} + x_i) f(x_i | s_{i-1}) dx_i$$

$$= c_{i+1}(\beta + s_{i-1}) \cdot \frac{\alpha + i\lambda - 1}{\alpha + (i-1)\lambda - 1} .$$

これは(5)の成立を示している。

$\{c_i ; 1 \leq i \leq N\}$ の単調性については $i < i^*$ の時は明らか。
$i^* \leqq i < N$ の時は(5)より

$$c_i - c_{i+1} = \frac{\lambda}{\alpha + (i-1)\lambda - 1} c_{i+1} + \frac{1}{\alpha + (i-1)\lambda - 1} \Big[\lambda (1 - c_{i+1}) \tag{7}$$
$$\cdot I(\alpha + (i-1)\lambda - 1, \lambda + 1 ; 1 - c_{i+1}) - (\alpha + (i-1)\lambda - 1) I(\alpha + (i-1)\lambda, \lambda ; 1 - c_{i+1}) \Big].$$

故に(7)の右辺オ2項が非負であることを示せば十分である。所で $\lambda / (\alpha + (i-1)\lambda - 1) B(\alpha + (i-1)\lambda - 1, \lambda + 1) = 1 / B(\alpha + (i-1)\lambda, \lambda)$ に注意すれば, オ2項は

$$\frac{1}{B(\alpha + (i-1)\lambda, \lambda)} \Big[(1 - c_{i+1}) \int_0^{1 - c_{i+1}} t^{\alpha + (i-1)\lambda - 2} (1-t)^{\lambda} dt - c_{i+1} \int_0^{1 - c_{i+1}} t^{\alpha + (i-1)\lambda - 1} (1-t)^{\lambda - 1} dt \Big]$$

$$= \frac{1}{B(\alpha + (i-1)\lambda, \lambda)} \int_0^{1 - c_{i+1}} \{ (1 - c_{i+1}) - t \} t^{\alpha + (i-1)\lambda - 2} (1-t)^{\lambda - 1} dt \geqq 0 .$$

となり証明完了。

不完全ベーター関数に関する次の補題（Pearson[3]）を用いれば定理1より直ちに系1, 2を得る。

補題1.

正の整数 m, n と $0 \leqq x \leqq 1$ に対して、$n \geqq m$ ならば

$$I(m, n-m+1; x) = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.$$

系1.

パラメーター α, λ が正整数であれば c_i は次のように書くことができる。

$$c_N = \frac{\lambda}{\alpha+(N-1)\lambda-1},$$

$$c_i = \frac{1}{\alpha+(i-1)\lambda-1}\Big[(\alpha+i\lambda-1)c_{i+1} + \lambda\binom{\alpha+i\lambda-1}{\lambda} c_{i+1}^{\lambda}(1-c_{i+1})^{\alpha+(i-1)\lambda}$$
$$-\{(\alpha+i\lambda-1)c_{i+1}-\lambda\}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\binom{\alpha+i\lambda-1}{j} c_{i+1}^{j}(1-c_{i+1})^{\alpha+i\lambda-1-j}\Big]$$
$$i^* \leqq i < N$$

$$c_i = \frac{\alpha+i\lambda-1}{\alpha+(i-1)\lambda-1} c_{i+1}, \quad 1 \leqq i < i^*.$$

系2.

$\lambda=1$（指数分布）の時は

$$C_N=\frac{1}{\alpha+N-2}$$

$$C_i=\frac{1}{\alpha+i-2}\left[(\alpha+i-1)C_{i+1}+\{\max(1-C_{i+1},0)\}^{\alpha+i-1}\right],\quad 1\leqq i<N.$$

C_iはα,λ,Nの関数であるが特にNの関数であることを強調して$C_i(N)$と書けば，$C_i(N)$はNの非減少関数であることが次の補題よりわかる。

補題2.

$$C_i(N+1)\geqq C_i(N),\qquad 1\leqq i\leqq N.$$

証明.

後向きの帰納法で示す。$i=N$の時は(5)より

$$C_N(N+1)\geqq\frac{\alpha+N\lambda-1}{\alpha+(N-1)\lambda-1}\cdot C_{N+1}(N+1)=\frac{\lambda}{\alpha+(N-1)\lambda-1}=C_N(N)$$

であるから明らか。ここで不等式は定理1のC_iの単調性の証明を思い出せばすぐわかる。$i<N$の時，命題が$i+1$で成立していると仮定する。この時，補題の成立をいうにはC_iがC_{i+1}の非減少関数であることを示せば十分である。2つの場

合に分けて示そう。

(i) $i \geqq i^*$ の時.

$$\frac{d}{dc_{i+1}} I(m,n\,;1-c_{i+1}) = -\frac{c_{i+1}^{n-1}(1-c_{i+1})^{m-1}}{B(m,n)}$$

であるから，(5)より

$$\frac{dc_i}{dc_{i+1}} = \frac{1}{(\alpha+(i-1)\lambda-1)B(\alpha+(i-1)\lambda,\lambda)}\Big[(\alpha+i\lambda-1) \cdot \int_0^{c_{i+1}} u^{\lambda-1}(1-u)^{\alpha+(i-1)\lambda-1}du - c_{i+1}^{\lambda}(1-c_{i+1})^{\alpha+(i-1)\lambda-1}\Big]. \tag{8}$$

又容易に

$$\begin{aligned}&(\alpha+i\lambda-1)\int_0^{c_{i+1}} u^{\lambda-1}(1-u)^{\alpha+(i-1)\lambda-1}du - c_{i+1}^{\lambda}(1-c_{i+1})^{\alpha+(i-1)\lambda-1}\\ &\geqq (\alpha+i\lambda-1)(1-c_{i+1})^{\alpha+(i-1)\lambda-1}\cdot\int_0^{c_{i+1}} u^{\lambda-1}du - c_{i+1}^{\lambda}(1-c_{i+1})^{\alpha+(i-1)\lambda-1} \\ &= \frac{\alpha+(i-1)\lambda-1}{\lambda}c_{i+1}^{\lambda}(1-c_{i+1})^{\alpha+(i-1)\lambda-1}.\end{aligned} \tag{9}$$

であることがわかるから，(9)を(8)に適用すると

$$\frac{dc_i}{dc_{i+1}} \geqq \frac{c_{i+1}^{\lambda}(1-c_{i+1})^{\alpha+(i-1)\lambda-1}}{\lambda B(\alpha+(i-1)\lambda,\lambda)} \geqq 0\,。$$

(ii) $i < i^*$ の時.

(5)より明らか。

補題2より直ちに次の系を得る。

系3.

$$i^*(N+1) \geqq i^*(N).$$

参考文献

[1]. DeGroot, Morris H. (1970), Optimal Statistical Decisions, New York: McGraw Hill Book Co.

[2]. Gilbert, John P., and Mosteller, Frederick (1966), "Recognizing the Maximum of a Sequence," Journal of the American Statistical Association, 61, 35-73.

[3]. Pearson, K. (1934), Tables of the Incomplete Beta-Function, London: Cambridge University Press.

[4]. Sakaguchi, Minoru (1961), "Dynamic Programming of Some Sequential Sampling Design," Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2, 446-466.

[5]. Stewart, Theodor J. (1978), "Optimal Selection from a Random Sample with learning of the Underlying Distribution," Journal of The American Statistical Associations, 73, 775-780.