数理解析研究所講究録
第460巻 1982年 37-50

無限次元空間における測度について

鳥取大 教育　　栗林幸男

0. はじめに

無限次元空間の測度論は、実数の無限直積R^∞上に確率測度を構成したKolmogorovに始まり、現在では表現論、場の量子論等と関連して研究が進められている。

ここでは、超準解析(non-standard analysis)を用いてR^∞に測度を構成する一つの方法について述べたい。筋道は次の通りである。

(1)　実数全体の集合をRとし, $\bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$とする。それぞれ$^*R$, $^*\bar{R}$へ拡張する。

(2)　$x \in R^\infty$に対し「ノルム」$^*|x| \in {}^*R$を定義する。このノルムによって、R^∞における距離$d(x, y) = {}^*|x-y|$　$(x, y \in R^\infty)$が定義できる。従ってR^∞は距離空間となる。

(3)　$E \subset R^\infty$に対して切り口(section)　$E(x_{n+1}, \cdots) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n ; (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) \in E\}$を考える。任意の$n$と任意の$(x_{n+1}, \cdots)$に対して切り口$E(x_{n+1}, \cdots)$が$R^n$でLebesgue可測であるとき、$E$が$R^\infty$で可測(measurable)であると定義する。この定義によってR^∞における可測集合の

全体は，完全加法族（completely additive family of sets，σ集合代数）となる。

（4） $E \subset R^{\infty}$ が可測のとき，E の測度 $m(E)$ を $\overline{R}^{\infty}$ に値をとる関数として，次のように定義する。

$$ME(x_2,\cdots) = [(m_1(E(x_2,\cdots)),\ \cdots,\ m_n(E(x_{n+1},\cdots)),\ \cdots)],$$

ここで m_n は R^n における Lebesgue 測度である。

（5） $E \subset R^{\infty}$ が可測のとき，擬測度 $GM(E)$ を次のように定義する。

$$GM(E) = [(\sup_{(x_2,\cdots)} m_1(E(x_2,\cdots)),\ \cdots,\ \sup_{(x_{n+1},\cdots)} m_n(E(x_{n+1},\cdots)),\ \cdots)]$$

1．準備

自然数全体の集合を $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ とし，各 $x \in N$ に対し，$S_x = \{y\ ;\ y > x,\ y \in N\}$，$S = \{S_x : x \in N\}$ とする。S は有限交差性（finite intersection property）をもつ。S によって生成される free ultrafilter（free は ω-incomplete と同義，齋藤正彦[6]による）を $\mathcal{F}$ とする。

$\overline{R}^{\infty} = \prod_{i \in N} \overline{R} = \{x\ ;\ x(i) \in \overline{R},\ i \in N\}$ とする。ただし $\overline{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ とする。また $x(i) = x_i$ のように書くこともある。

定義 1.1 記号 $\equiv$，$\succ$，$\succeq$ を次のように定める。

$x, y \in \overline{R}^{\infty}$ に対して，

(1) $x \equiv y \rightleftarrows$ 任意の $i \in N$ に対して $x(i) = y(i)$,

(2) $x \succ y \rightleftarrows$ 任意の $i \in N$ に対して $x(i) > y(i)$,

(3) $x \succsim y \rightleftarrows$ 任意の $i \in N$ に対して $x(i) \geq y(i)$。

$x, y \in \bar{R}^{\infty}$ に対して関係 $\sim$ を次のように定める。

$$x \sim y \rightleftarrows \{i \,;\, x(i) = y(i)\} \in \mathfrak{F}.$$

このとき関係$\sim$は同値関係となる。

定義 1.2 ${}^*\bar{R} = \bar{R}^{\infty}/\sim$. $x \in \bar{R}^{\infty}$ の同値類を $[x]$ のように表す。${}^*R$ についても同様。

$x \in R$ と $[(x, \cdots, x, \cdots)]$ を同一視すれば $R \subset {}^*R$ と考えられる。以下このように同一視する。

命題 1.3 ${}^*\bar{R}$ は全順序集合である。

定義 1.4 ${}^*\bar{R}$ における記号 $>$, $\geq$ を次のように定める。

(4) $[x] > [y] \rightleftarrows \{i \,;\, x(i) > y(i)\} \in \mathfrak{F}$,

(5) $[x] \geq [y] \rightleftarrows \{i \,;\, x(i) \geq y(i)\} \in \mathfrak{F}$.

命題 1.5

(6) $x \equiv y$ ならば $[x] = [y]$,

(7) $x \succ y$ ならば $[x] > [y]$,

(8) $[x] \geq [y] \rightleftarrows [x] > [y]$ または $[x] = [y]$.

証明 (8) $[x] \geq [y]$ とする。

$$\{i \,;\, x(i) \geq y(i)\} \in \mathfrak{F},$$

$$\{i \,;\, x(i) \geq y(i)\} = \{i \,;\, x(i) > y(i)\} \cup \{i \,;\, x(i) = y(i)\}$$

であり，$\mathcal{F}$ は ultrafilter であるから

$$\{i\,;\,x(i) > y(i)\} \in \mathcal{F} \quad \text{または} \quad \{i\,;\,x(i) = y(i)\} \in \mathcal{F}.$$

従って $[x] > [y]$ または $[x] = [y]$ が成立する。

逆に $[x] > [y]$ または $[x] = [y]$ ならば $[x] \geq [y]$ であることは明白。

定義 1.6 ${}^*R$ における加法，減法，乗法，除法をそれぞれ次のように定める．

(9) $[x] + [y] = [(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n, \cdots)]$,

(10) $[x] - [y] = [(x_1-y_1, \cdots, x_n-y_n, \cdots)]$,

(11) $[y][y] = [(x_1 y_1, \cdots, x_n y_n, \cdots)]$,

(12) $[x] / [y] = [((x_1/y_1)^*, \cdots, (x_n/y_n)^*, \cdots)]$,

ただし $(x_n/y_n)^* = x_n/y_n$ $y_n \neq 0$ のとき，$= 0$ $y_n = 0$ のとき，とする。

上の定義は明らかに代表元のえらび方によらない。

R^∞ に位相を入れるために $x \in R^\infty$ に対してノルム ${}^*|x|$ を次のように定義する。

定義 1.7 ${}^*|x| = [(\sqrt{x_1^2}, \cdots, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \cdots)]$.

命題 1.8 ${}^*|x| \geq 0$, ${}^*|x| = 0 \rightleftarrows x \equiv 0$.

証明 ${}^*|x| \geq 0$ であることは明白．

${}^*|x| = 0$ とする。任意の n に対して，$m \geq n$ なる m が存在して $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = 0$。従って $x_1 = \cdots = x_n = \cdots = x_m = 0$.

n は任意であるから $x \equiv 0$ が成立する。 $x \equiv 0$ ならば $^*|x| = 0$ であることは明白。

定義 1.9 $x, y \in R^\infty$ に対して $d(x, y)$ を次のように定める。

$$d(x, y) = {}^*|x - y| = \left[\left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2}, \cdots, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \cdots\right)\right].$$

命題 1.10 $x, y, z \in R^\infty$ とする。次のおのおのが成立する。

(13) $\qquad d(x, y) = d(y, x)$,

(14) $\qquad d(x, y) = 0 \rightleftarrows x \equiv y$,

(15) $\qquad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

証明 (15) 任意の n に対して

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}$$

が成立するから,

$$\left[\left(\sqrt{(x_1 - z_1)^2}, \cdots, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}, \cdots\right)\right]$$

$$\leq \left[\left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2}, \cdots, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \cdots\right)\right] + \left[\left(\sqrt{(y_1 - z_1)^2}, \cdots, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}, \cdots\right)\right].$$

従って $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

$d(x, y)$ は超実数値 ($^*R$ の元) をとる関数であるが, 命題 1.10 によって R^∞ の距離と考えることができる。

命題 1.11 $d(x, y)$ によって R^∞ は距離空間となる。

p_nをR^∞からR^nへの射影とする。

定義 1.12 $S \subset R^\infty$ が次の条件を満足するとき，R^∞における線分であるという。

(16) $\{n;\ p_n(S)$ は R^nにおける線分$\} \in \mathfrak{F}$.

命題 1.13 $S \subset R^\infty$ が線分ならば，任意の $n \in N$ に対して $p_n(S)$ はR^nの線分である。

定義 1.12 と同様に，R^∞における三角形，平行四辺形等を定義することができる。従ってR^∞において初等幾何を考えることができる。

定義 1.14 $a,\ b \in R^\infty$ かつ $a \leq b$ とする。

$$\bar{I}(a, b) = \{x \in R^\infty;\ a \leq x \leq b\}$$

をR^∞における有界閉区間という。同様に有界開区間$\mathring{I}(a, b)$を次のように定義する。

$$\mathring{I}(a, b) = \{x \in R^\infty;\ a < x < b\}$$

さらに一般の区間 $I(a, b)$ も同様に定める。

命題 1.15. 有界閉区間$\bar{I}(a, b)$に対しては

(17) $\{n;\ p_n(\bar{I}(a, b))$ はR^nにおける閉区間$\} = N$

が成立する。有界開区間$\mathring{I}(a, b)$ についても同様に

(18) $\{n;\ p_n(\mathring{I}(a, b))$ はR^nにおける開区間$\} = N$

が成立する。

定義 1.16 $r \in R,\ r \geq 0$ とする。 $a \in R^\infty$に対し

(19) $\quad B(a, r) = \{x \in R^{\infty};\ {}^*|x-a| \leq r\}$

を R^{∞} の中心 a，半径 r の閉球という。開球も同様に定義する。

命題 1.17 $B(a, r)$ （中心 a，半径 r の閉球）に対して

(20) $\quad \{n;\ p_n(B(a,r))$ は R^n における中心 $(a_1, \cdots, a_n)$，半径 r の閉球 $\} = N$

が成立する。開球についても同様。

定義 1.18 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots) > 0$ とする。

(21) $\quad U_n(a, \varepsilon_n) = \{x \in R^{\infty};\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} \leq \varepsilon_n,\ x_i = a_i\ (i \geq n+1)\},\quad a \in R^{\infty}$

とし，$U(a, \varepsilon)$ を次のように定める。

(22) $\quad U(a, \varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(a, \varepsilon_n)$.

$S \subset R^{\infty}$ が次の条件を満足するとき，開集合という。

(23) $\quad$ 任意の $a \in S$ に対して $U(a, \varepsilon)$ が存在して $U(a, \varepsilon) \subset S$ となる。

命題 1.19. (24) R^{∞} および ϕ は開集合である。

(25) S_1，S_2 が開集合ならば $S_1 \cap S_2$ は開集合である。

(26) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して S_λ が開集合ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ は開集合である。

証明 (25) $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \cdots)$，$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots) > 0$ とする。任意の $a \in S_1 \cap S_2$ に対して，ε，η を小さくとれば，$U(a, \varepsilon) \subset S_1$，$U(a, \eta) \subset S_2$ が成立する。

$$U_n(a,\varepsilon_n)=\{x;\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}\le\varepsilon_n,\ x_i=a_i\ (i\ge n+1)\},$$

$$U_n(a,\eta_n)=\{x;\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}\le\eta_n,\ x_i=a_i\ (i\ge n+1)\}$$

であるから　$\gamma_n=\min(\varepsilon_n,\eta_n)$　とれば

$$U_n(a,\gamma_n)\subset U_n(a,\varepsilon_n)\cap U_n(a,\eta_n)\qquad(n\in N)$$

が成立する。従って

$$U(a,\gamma)=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n(a,\gamma_n)\subset S_1\cap S_2$$

が成立する。従って　$S_1\cap S_2$　は開集合である。

命題　1.20　有界開区間　$\mathring{I}(a,b)$ は開集合である。

証明　$\alpha\in\mathring{I}(a,b)$　とする。$a<\alpha<b$　であるから，任意の $i\in N$ に対して　$a_i<\alpha_i<b_i$　が成立する。

$\varepsilon_n>0$，$\varepsilon_n\in R$　を小さくとれば

$$U_n(\alpha,\varepsilon_n)=\{x\in R^\infty;\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}\le\varepsilon_n,\ x_i=\alpha_i\ (i\ge n+1)\}$$

に対して，　$U_n(\alpha,\varepsilon_n)\subset\mathring{I}(a,b)$　が成立する。

$$\therefore\quad U(\alpha,\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n(\alpha,\varepsilon_n)\subset\mathring{I}(a,b)$$

従って　$\mathring{I}(a,b)$　は開集合である。

2.　R^∞ における測度

$E\subset R^\infty$ の $(x_{n+1},\cdots)$ における切り口（$(x_{n+1},\cdots)$-section）を定義し，切り口の可測性によって E の R^∞ における可測性を定義する。

定義　2.1　$E\subset R^\infty$ とする。集合 $E(x_{n+1},\cdots)$ を次のよう

に定め，E の $(x_{n+1},\cdots)$ における切り口（$(x_{n+1},\cdots)$-*section*）という。

(1) $\quad E(x_{n+1},\cdots) = \{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n;\ (x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots)\in E\}$.

任意の n と任意の $(x_{n+1},\cdots)$ に対して $E(x_{n+1},\cdots)$ が R^n において Lebesgue 可測のとき，E は R^∞ において可測（*measurable*）という。

命題 2.2 有界閉区間 $\bar{I}(a,b)$，有界開区間 $\underset{\circ}{I}(a,b)$，有界区間 $I(a,b)$ はいずれも可測である。

命題 2.3 $x\in R^\infty$，$r>0$，$r\in R$ とする。

$$B(x,r) = \{y\in R^\infty;\ {}^*|y-x|\le r\}$$

は可測である。

命題 2.4 $E\subset R^\infty$ が可測ならば E^c は可測である。

証明 E^c の $(x_{n+1},\cdots)$ における切り口を $E^c(x_{n+1},\cdots)$ とする。

$$\begin{aligned} E^c(x_{n+1},\cdots) &= \{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n;\ (x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots)\in E^c\} \\ &= \{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n;\ (x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots)\in E\}^c \\ &= (E(x_{n+1},\cdots))^c \end{aligned}$$

であるから $E^c(x_{n+1},\cdots)$ は R^n において Lebesgue 可測である。これが任意の $n\in N$，任意の $(x_{n+1},\cdots)$ に対して成立するので E^c は可測である。

命題 2.5 $E_1,\cdots,E_j,\cdots$ はいずれも R^∞ で可測とする。

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ は可測である。

証明 $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)(x_{n+1}, \cdots) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n ; (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}$

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n ; (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) \in E_i\}$

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i(x_{n+1}, \cdots)$

が成立し，各 $E_i(x_{n+1}, \cdots)$ は R^n において Lebesgue 可測であるから $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i(x_{n+1}, \cdots)$ は R^n において Lebesgue 可測である。これが任意の $n \in N$ と任意の $(x_{n+1}, \cdots)$ に対して成立するから $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ は R^{∞} において可測である。

命題 2.4 および 命題 2.5 によって R^{∞} における可測集合の全体は，完全加法族（completely additive family of sets, σ-加法族, σ-集合代数）をなすことがわかる。

R^{∞} における可測集合 E の測度 M を $*R$ に値をとる関数として次のように定義する。

定義 2.6 E を R^{∞} における可測集合とする。まず m を次のように定める。

(2) $mE(x_2, \cdots) \equiv (m_1 E(x_2, \cdots), \cdots, m_n E(x_{n+1}, \cdots), \cdots)$

この $mE(x_2, \cdots)$ に対して $ME(x_2, \cdots)$ を次のように定める。

(3) $ME(x_2, \cdots) = [mE(x_2, \cdots)]$

ただし m_n $(n \in N)$ は R^n における Lebesgue 測度である。

命題 2.7 $E_i \subset R^{\infty}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ は可測集合であって

互に素，すなわち $E_i \cap E_j = \phi \quad (i \neq j)$ とする。このとき

(4) $\quad M\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)(x_2, \cdots) = \sum_{i=1}^{k} M E_i(x_2, \cdots)$

が成立する。

証明 $E_i(x_{n+1}, \cdots)$ $(i=1, 2, \cdots)$ は R^n において可測で互に素であるから，Lebesgue 測度の性質によって次式が成立する。

$$m_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)(x_{n+1}, \cdots) = \sum_{i=1}^{k} m_n E_i(x_{n+1}, \cdots)$$

$$\therefore m\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)(x_2, \cdots) = \left(\sum_{i=1}^{k} m_1 E_i(x_2, \cdots), \cdots, \sum_{i=1}^{k} m_n E_i(x_{n+1}, \cdots), \cdots\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(m_1 E_i(x_2, \cdots), \cdots, m_n E_i(x_{n+1}, \cdots), \cdots\right)$$

$$\therefore M\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)(x_2, \cdots) = \sum_{i=1}^{k} M E_i(x_2, \cdots)$$

命題 2.8 命題 2.5 における各 E_i がある一定の有界区間に含まれるならば，$M\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)(x_2, \cdots)$，$M E_i(x_2, \cdots)$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ はいずれも $^*R$ に値をとる関数であって(4)式が成立する。

命題 2.9 $E_i \subset R^\infty$ $(i \in N)$ は可測集合であって互に素とする。次の等式が成立する。

(5) $\quad M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)(x_2, \cdots) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} m E_i(x_2, \cdots)\right]$

注意 (5)式において $\left[\sum_{i=1}^{\infty} m E_i(x_2, \cdots)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} [m E_i(x_2, \cdots)] = \sum_{i=1}^{\infty} M E_i(x_2, \cdots)$ とすることはできない。(∵代表元のえらび方によって変ってしまう)

命題 2.10 命題2.7 における各E_i ($i \in N$) が一方の有界区間に含まれるならば $^*R$ に値をとる関数として(5)式が成立する。

次に擬測度 GM を次のように定義する。

定義 2.11 $E \subset R^\infty$ を可測集合とする。

$$(6) \qquad GME = [(\sup_{(x_2,\cdots)} m_1 E(x_2,\cdots), \cdots, \sup_{(x_{n+1},\cdots)} m_n E(x_{n+1},\cdots), \cdots)]$$

命題 2.12 $E \subset R^\infty$ がある有界区間に含まれる可測集合ならば、$GME \in {}^*R$ が成立する。

実用的にはこの擬測度 GM が有効と思われる。

命題 2.13 有界区間の擬測度は次のように表される。

$$(7) \qquad GMI(a,b) = [(b_1-a_1, \cdots, \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i), \cdots)] \in {}^*R$$

とくに、$b_n - a_n = \alpha$ ($n \in N$) ならば

$$(8) \qquad GMI(a,b) = [(\alpha, \cdots, \alpha^n, \cdots)]$$

が成立する。

命題 2.14 半径r ($r>0$, $r \in R$)、中心$a \in R^\infty$の球$B(a,r)$ の擬測度 $GMB(a,r)$ は次のように表される。

$$(9) \qquad GMB(a,r) = [(2r, \pi r^2, \frac{4}{3}\pi r^3, \cdots, v_n r^n, \cdots)]$$

ただし $v_n = \frac{1}{n}\omega_n = \frac{\sqrt{\pi}^{\,n}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ である。

命題 2.15 可測集合 $E \subset R^\infty$ に対して、$GME = 0$ ならば $ME(x_2, \cdots) = 0$ (任意の $(x_2, \cdots)$ に対して) が

成立する。

命題 2.16 $E \subset R^{\infty}$ が高々可算個の点集合ならば，$GME = 0$ である。

命題 2.17 $E_i \subset R^{\infty}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ が可測であって，$GME_i = 0$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ ならば $GM(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) = 0$ が成立する。

系 2.18 $E_i \subset R^{\infty}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ は可測であって，任意の $(x_2, \cdots)$ に対して，$ME_i(x_2, \cdots) = 0$ $(i=1, \cdots, k)$ ならば，任意の $(x_2, \cdots)$ に対して，$M(\bigcup_{i=1}^{k} E_i)(x_2, \cdots) = 0$ が成立する。

命題 2.19 $E_i \subset R^{\infty}$ $(i \in N)$ は可測集合であって次の条件を満足するものとする。

(10) ある $n_0 \in N$ が存在して，$n \geq n_0$ ならば

$$\sup_{(x_{n+1}, \cdots)} m_n E_i(x_{n+1}, \cdots) = 0 \qquad (i \in N).$$

このとき $GM(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$ が成立する。

References

[1] S. Kamo ; Nonstandard natural number systems and nonstandard models, J. Symbolic Logic, 46 (1981), 365 − 376.

[2] ——— ; Nonstandard real number systems

with regular gaps, Tsukuba J. Math., 5 (1981), 21 − 24.

[3] H. J. Keisler ; An infinitesimal approach to stochastic analysis, Lecture Notes, 1980.

[4] P. A. Loeb; An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory, preprint.

[5] ———— ; Weak limits of measures and the standard part map, preprint.

[6] 齋藤正彦； 超積と超準解析，東京図書 (1976).

[7] G. Takeuti ; Dirac space , Proc. Japan Acad., 38 (1962), 414 − 418.

[8] 山崎泰郎； 無限次元空間の測度（全2巻），紀伊国屋書店，((上) 1978，(下) 1978).