数理解析研究所講究録
第 462 巻 1982 年 1-23

反応拡散系の2次元定常パターン

広島大　理　伊藤正幸

1.1. 序　　自然界の様々な現象を支配する系の数理モデルとして，反応拡散系

$$(1.1)\begin{cases} p_t = d_1\Delta p + P(p,q) \\ q_t = d_2\Delta q + Q(p,q) \end{cases}$$

が，化学反応論，形態形成論，生態学等諸分野で提唱され，研究されてきた。一例を生態学にとって考えてみよう。ある領域Ω（池，島等）に閉込められた二種の生物が餌と捕食者の関係にあるとし，それぞれの位置x，時刻tでの人口密度を$p(x,t)$，$q(x,t)$で表わすことにする。Ωが常に一様な環境に保たれているとすると，餌の自然増殖率P_0はpのみの関数$P_0(p)$，また捕食者の自然死亡率Q_0はqのみの関数$Q_0(q)$である。また餌-捕食者の関係による餌の増殖率の減少はqに比例し，捕食者の増殖率の増加はpに比例すると考えると，餌，捕食者の増殖率はそれぞれ$P_0(p)-C_1q$，$-Q_0(q)+C_2p$（$C_1, C_2>0$定数）となる。さらに各種がΩ内を動きまわる

様子を総体として拡散と考えると，p, q を支配する系はΩ内で，(1.1) と表わされる。($d_1, d_2 > 0$ は各種の拡散係数)。ただし

$$(1.2) \quad \begin{cases} P(p.q) = \{P_0(p) - c_1 q\} p \\ Q(p.q) = -\{Q_0(q) - c_2 p\} q \end{cases}$$

なお，各種がΩ内に閉じ込られていることは，境界条件

$$(1.3) \quad \frac{\partial p}{\partial N} = \frac{\partial q}{\partial N} = 0 \qquad \text{on } \Sigma = \partial\Omega$$

によって表わされる（N は Σ の単位外法線ベクトル）。

P，Q が図1，2，3の場合を考えてみよう。

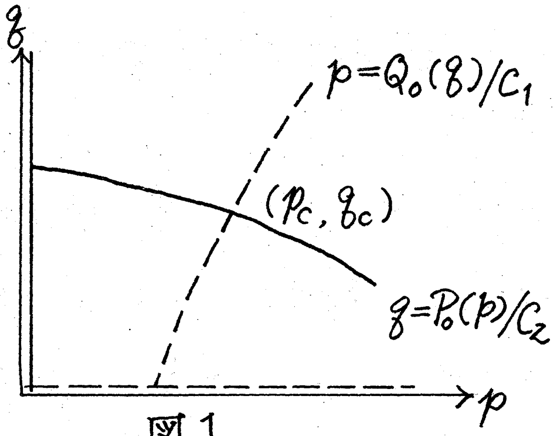


図1

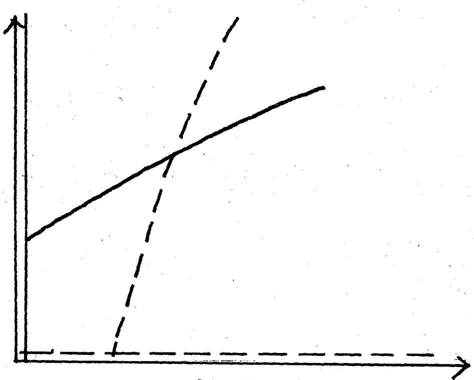


図 2

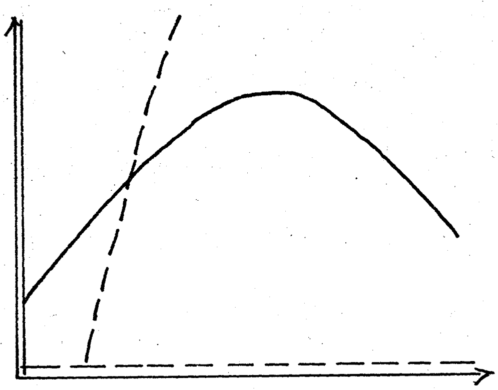


図 3

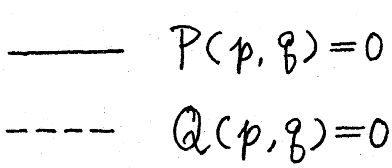


図1の場合は，両種とも密度の増加が自種にとって環境の悪化をもたらすと考えたもので，$P_0(p)$は単調減少，$Q_0(q)$は単調増加である。(p_c, q_c) は $P(p_c, q_c)=Q(p_c, q_c)=0$ の点であり，これは(1.1),(1.3)の~~定数~~定常状態となっている。任意の正の初期状態 ($p(x,0)$, $q(x,0)$) に対応する (1.1),(1.3)の解は漸近的に (p_c, q_c) に収束することが知られている (Mimura[1])。

図2の場合は，pの増加が交配の可能性を増し，結果として，$P_0(p)$の増加を招来すると考えたものである。この場合，たとえ (p_c, q_c) が反応方程式として安定でも，d_1がある $d_c \geq 0$ より小さくなると ($d_1 \approx d_c$)，反応拡散系としては，不安定となり，小振幅の空間的非一様な定常解が出現することが知られている．(Segel & Jacson [2], Segel & Levin [3], Mimura, Nishiura & Yamaguchi [4])。

図3の場合は，pが希薄では生殖機会の減少を，pの過度の増加は環境の悪化を，p種自身にまねくと考えたものである (Allee 効果)。この場合も (p_c, q_c) の近傍では，図2と同じ状況であるため，d_cの近くのd_1ではやはり小振幅非一様定常解が出現する。さらにd_1が十分小さな場合には，計算機によって (1.1),(1.3) を解き，次の図が得られている (Mimura, Nishiura & Yamaguchi)。これはtが十分大で落ちついているので，定常解と想像される。

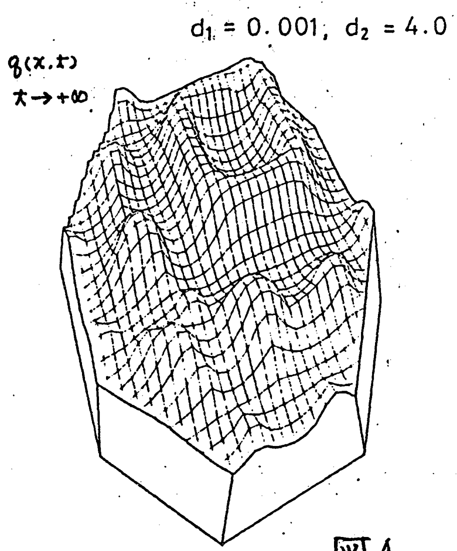


図4

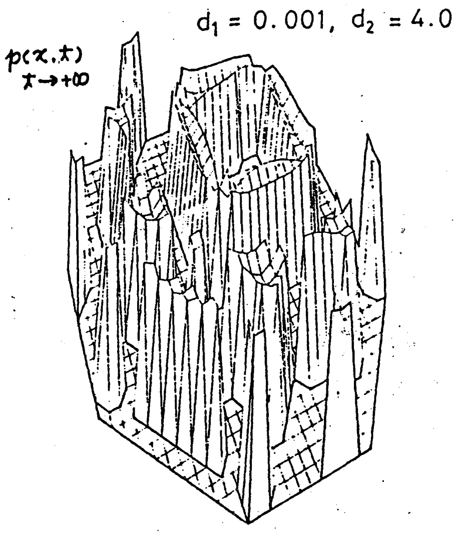


図5

このような解は解析的にとらえられるのであろうか。この定常解は，極めて振幅が大きく，p, q の山(谷)の位置はほぼ一致しているが，p は q に較べ大変急峻である。分岐理論が数学的正当性を発揮するのは，主に d_c の近くで，解は小振幅かつなだらかな場合であり，上図の解の解析では，直接には適用不能と思われる。

我々の研究の原点は；

問題0　上図のような，大振幅かつ p は急峻な定常解は存在しうるか？

実は空間次元1（$\Omega=(0,a)$）の場合は，既に，Fife[5] Mimura, Tabata & Hosono [6] 等によって示されている。我々は Ω が2次元有界領域の場合に彼らの方法を拡張して

問題0の肯定的解答を得たい。そのためやや冗長になるが，彼らの方法を復習しておこう。

方程式は，適当な規格により（$\varepsilon \ll 1$として）

$$\left.\begin{aligned} &(1.4) \qquad \varepsilon^2 \frac{d^2p}{dx^2} + P(p,q) = 0 \\ &(1.5) \qquad \frac{d^2q}{dx^2} + Q(p,q) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 0<x<a$$

$$(1.6) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} = 0 \qquad \text{at } x=0,a$$

また，非線形項P,Qは上では特別な形(1.2)を考えたが，彼らに共通している特徴は，$P=0$がpq平面でS字形曲線となっていることである。ここでは下図6の状況を仮定する。

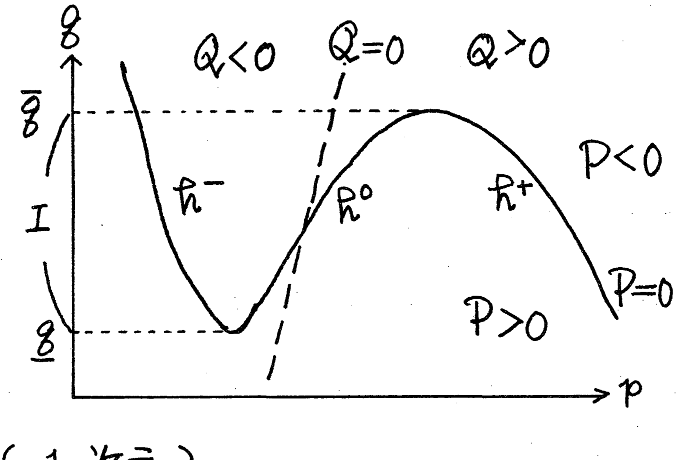


図6.

解法の手順（1次元）

<u>第1段</u>　$\varepsilon \ll 1$なので，発見的に$\varepsilon = 0$とおく

1)　(1.4)は$P(p,q)=0$。そこでもし，これが$p=h(q)$ととけると，(1.5)に代入して

$$(1.7) \qquad d^2q/dx^2 + Q(h(q),q) = 0$$

となり，単一方程式に帰着されるが，図6からわかるようにqの区間$I=(\underline{q},\overline{q})$では，$\hbar$は三価となっている。それぞれの枝を図6のように$\hbar^-$, $\hbar_0$, $\hbar^+$と呼ぶことにする。彼等は，予断をもって，

$$\hbar(q)=\hbar_{q^*}(q)\equiv\begin{cases}\hbar^+(q) & q>q^*\\ \hbar^-(q) & q<q^*\end{cases}$$

($q^*\in I$)ととった。 $Q(\hbar(q),q)$は下図のような不連続関数であり，各枝$Q(\hbar^\pm(q),q)$は単調減少である。

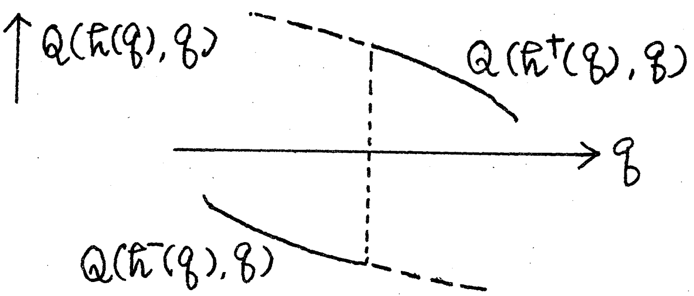


図7

($\frac{d}{dq}Q(\hbar^\pm(q),q)\le 0$)。

(1.7) 及び Neumann条件 $\partial q/\partial n=0$ at $x=0,a$ [これを reduced problem と呼ぶ] の解 q^0 を求める。ただし解とは，$q^0\in C^1[0,a]$，$\min q^0<q^*<\max q^0$ であり $q^0(x)=q^*$ なる点x^*を除き C^2で (1.7) と境界条件を満すものをいう。一次元の場合 任意の $q^*\in I$ に対して，基本的に求積法によって解 $q^0=q^0(x;q^*)$ を求めることが出来る。($\hbar(q^0),q^0$) は，(1.4)~(1.6) の解の第0近似というべきもので，下図8の様な振舞をする。

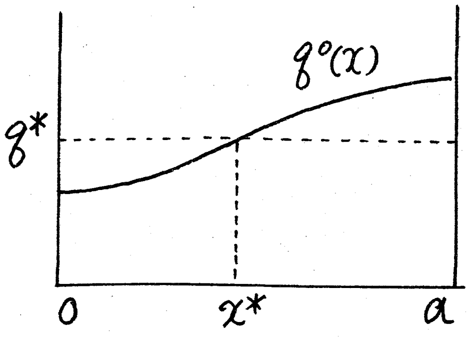
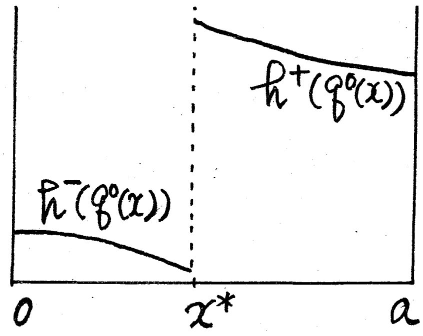


図8



2)　φ, ω を小さな任意実数として,

$$\begin{cases} d^2q^-/dx^2 + Q(h^-(q^-),q^-)=0 & x\in\Omega_\varphi=(0,x^*+\varphi) \\ dq^-/dx=0 \quad \text{at } x=0, & q^-(x^*+\varphi)=q^*+\omega \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} d^2q^+/dx^2 + Q(h^+(q^+),q^+)=0 & x\in\Omega_\varphi^+=(x^*+\varphi,a) \\ q^+(x^*+\varphi)=q^*+\omega, & dq^+/dx=0 \quad \text{at } x=a \end{cases}$$

の解 q_0^-, q_0^+ を q^0 の近くに求める　これは簡単な陰関数定理の応用で可能である（∵ $\frac{d}{dq}Q(h^\pm(q),q)\leq 0$ ）。

<u>第2段</u>　$\varepsilon\ll 1$　($\varepsilon\neq 0$) の場合.

3)

$$\begin{cases} (1.4)\ \&\ (1.5) & \text{in } x\in\Omega_\varphi^- \\ dp/dx=dq/dx=0 & \text{at } x=0 \\ q(x^*+\varphi)=q^*+\omega, & p(x^*+\varphi)=p^*\equiv\frac{1}{2}(h^+(q^*)+h^-(q^*)) \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} (1.4)\ \&\ (1.5) & \text{in } \Omega_\varphi^+ \\ q(x^*+\varphi)=q^*+\omega, & p(x^*+\varphi)=p^* \\ dp/dx=dq/dx=0 & \text{at } x=a \end{cases}$$

の解 $(p_\varepsilon^-, q_\varepsilon^-)$, $(p_\varepsilon^+, q_\varepsilon^+)$ で $\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$q_\varepsilon^\pm \to q_0^\pm$ $\quad \overline{\Omega_\varphi^\pm}$ で一様

$p_\varepsilon^\pm \to h^\pm(q_0^\pm)$ $\quad x^*$ の任意の近傍を除き一様

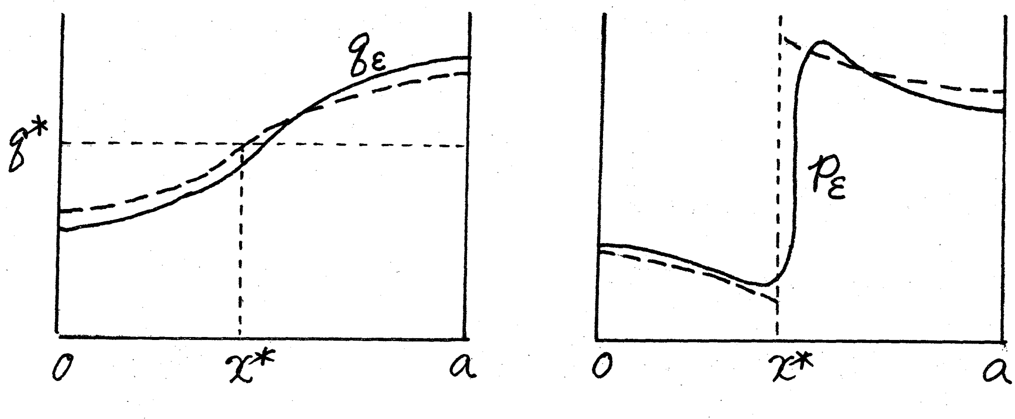
$$\left(\varepsilon \frac{d}{dx} p_\varepsilon^\pm\right)^2 \Big|_{x=q^*+\varphi} \to \int_{p^*}^{h^\pm(q^*+\omega)} P(p, q^*+\omega)\,dp$$

なるものを求める。これは $(h^\pm(q_0^\pm), q_0^\pm)$ を才0近似として特異摂動論により可能。

4)
$$\Lambda(\varphi, \omega, \varepsilon) \equiv \left(\varepsilon \frac{d}{dx} p_\varepsilon^+\right)^2 - \left(\varepsilon \frac{d}{dx} p_\varepsilon^-\right)^2 \Big|_{x=x^*+\varphi}$$

$$\Gamma(\varphi, \omega, \varepsilon) \equiv \frac{dq_\varepsilon^+}{dx} - \frac{dq_\varepsilon^-}{dx} \Big|_{x=x^*+\varphi}$$

とおき，$\varepsilon \ll 1$ に対して $\Lambda(\varphi,\omega,\varepsilon)=\Gamma(\varphi,\omega,\varepsilon)=0$ なる $\varphi=\varphi(\varepsilon)$, $\omega=\omega(\varepsilon)$ を求める。これが求まれば $p_\varepsilon = p_\varepsilon^+$ in $\overline{\Omega^+_{\varphi(\varepsilon)}}$, $= p_\varepsilon^-$ in $\overline{\Omega^-_{\varphi(\varepsilon)}}$, $q_\varepsilon^- = q_\varepsilon^+$ in $\overline{\Omega^+_{\varphi(\varepsilon)}}$, $= q_\varepsilon^-$ in $\overline{\Omega^-_{\varphi(\varepsilon)}}$ は $C^1(\overline{\Omega})$ であり (1.4)~(1.6) を満すから実は $C^2(\Omega)$ であって $(p_\varepsilon, q_\varepsilon)$ が真の解となる。



$\varphi(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ の求め方： 3) より

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \Lambda(0,\omega,\varepsilon) = \int_{h^-(q^*+\omega)}^{h^+(q^*+\omega)} P(p, q^*+\omega)\,dp \equiv J(q^*+\omega)$$

また，$q^0 \in C^1(\overline{\Omega})$ だったから，$\Gamma(0,0,0)=0$。~~さらに~~
さらに

$$\begin{bmatrix} \Lambda_\varphi(0,0,0) & \Lambda_\omega(0,0,0) \\ \Gamma_\varphi(0,0,0) & \Gamma_\omega(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & , J'(q^*) \\ \Gamma_\varphi(0,0,0) & , \Gamma_\omega(0,0,0) \end{bmatrix}$$

いま $J(q^*)=0$, $J'(q^*)\neq 0$ なる $q^*\in I$ があると仮定すると，$\Gamma_\omega(0,0,0)\neq 0$ が成立すれば，上より，
$\Lambda(0,0,0)=\Gamma(0,0,0)=0$, $D(\Lambda,\Gamma)/D(\varphi,\omega)$ が nonsingular となり，陰関数定理により $\varphi(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ が得られる。
$\Gamma_\omega(0,0,0)\neq 0$ は，常微分方程式論から Γ_ω の explicit な表現を用いて示される。

<u>定理</u>（1次元）．$J(q^*)=0$, $J'(q^*)\neq 0$ なる $q^*\in I$ が存在するとする。(1.4)～(1.6)の解 $(p_\varepsilon, q_\varepsilon)$ で $\varepsilon\downarrow 0$ のとき

$p_\varepsilon \to h_{q^*}(q^0)$　x^*の近傍を除き一様

$q_\varepsilon \to q^0$　$[0,a]$で一様

なものが存在する．なお $q^0=q^0(x;q^*)$ は (1.7) with Neumann の解。

さて，上述の一次元の方法を二次元の場合に拡張するには，どのような困難があるだろうか。

(A). $J(q^*)=0$, $J'(q^*)\neq 0$ なる $q^*\in I$ の存在は, $P=0$ が S-字型曲線とするとき, さほど不自然な仮定ではない。またこれは Ω の次元とは無関係なものである。

(B) 1) の reduced problem の解 q^0 の存在は? (一次元では求積法によっていたので, 2次元への直接的拡張は期待できない。).

(C) 2) は $\frac{d}{dq}Q(R^{\pm}(q),q)\leq 0$ による陰関数定理の応用であり, 2次元への拡張は期待できる(命題2.1参照)。

(D) 3) の $p^{\pm}_{\varepsilon}$, $q^{\pm}_{\varepsilon}$ の存在は特異摂動論の応用であるがこれは拡張可能と思われる(詳細は略す)。これに伴い, $\Lambda(0,\varphi,0)=J(q^*+\varphi)$ も, $q^*+\varphi$ の近傍での局所論なので, 得られると思われる。

(E) 4) で $\Gamma_{\varphi}(0,0,0)^{-1}$ の存在は? (一次元では常微分方程式論を用いて $\Gamma_{\varphi}(0,0,0)$ を陽に表現できたが, 2次元の場合は, この直接的拡張は期待薄である。).

以上をながめると2次元への拡張において本質的な問題は(B)と(E)である。これは ε には無関係($\varepsilon=0$)の問題である。我々は, 次節で(B),(E)をともに含む問題を提起する。それを解くことが本No.の中心テーマとなる。

1.2.　問題．　我々は次の問題を提唱する。ここでQ, k等の記号とその性質は§1.1.に準ずる。

<u>問題1</u>　ある有界領域$\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$と$g_0 \in C^1(\overline{\Omega}_0)$で次のイ)ロ)を満すものが存在するとする。

イ)　$S_0 = \{x \mid g_0(x) = g^*\}$は$\Omega_0$内の滑らかな曲線.

ロ)　$g_0 \in C^2(\Omega_0 \setminus S_0)$で

$$(1.8)\qquad \Delta g_0 + Q(k(g_0), g_0) = 0 \qquad \text{in } \Omega_0 \setminus S_0$$

$$(1.9)\qquad \partial g_0 / \partial N_0 = 0 \qquad \text{on } \Sigma_0 = \partial\Omega_0$$

ここでN_0はΣ_0の単位外法線ベクトル。なお，このときg_0を領域Ω_0に対するreduced problemの解と呼ぶことにする。

上の仮定の下で，Ω_0の摂動Ω_ψ（ψは摂動パラメータ）に対し，Ω_ψに対するreduced problemの解は存在するか？

解題1)．Q, kが適当なもの，Ω_0が円の場合，円対称なΩ_0に対するreduced problemの解g_0が求められることがある（動径成分のみの常微分方程式によるため）。問題1はこのような特殊な場合から，一般の（しかしΩ_0の摂動の）Ω_ψに対してもreduced problemが解けるかという問題になっている。これは§1.1.の(B)の問題とみることが出来る。

解題2)．問題1と§1.1.の(E)との関連をみる。そのため

仮定の追加と準備をする。いまS_0は単一閉曲線とし，sをその弧長パラメータとする $S_0=\{x^0(s)\}$，S_0の外法線ベクトルを$n^0(s)$とする．S_0上の関数φに対して $S_\varphi=\{x^0(s)+\varphi(s)n^0(s)\}$
また同様に，$\Sigma_0=\{X^0(\sigma)\}$，（σはΣ_0の弧長パラメーター）Σ_0上の関数ψに対して，$\Sigma_\psi=\{X^0(\sigma)+\psi(\sigma)N^0(\sigma)\}$とする。$S_0$（$S_\varphi$）の内側を$\Omega_0^+$（$\Omega_\varphi^+$）とし $\Omega_0\setminus\Omega_0^+$（$\Omega_\psi\setminus\Omega_\varphi^+$）を$\Omega_0^-$（$\Omega_{\varphi\psi}^-$）とする。ただし$\Omega_\psi$は$\Sigma_\psi$の内側領域．$\Omega_0^\pm$で(1.8)の$Q(h(),)$がとる枝を$Q(h^\pm(),)$とする（複号同順）．仮に問題1の解$g$に対して $S_\varphi=\{x;g(x)=g^*\}$とすると．イ)ロ)の条件は

$$(1.10)\qquad \Delta g^+ + Q(h^+(g^+);g^+)=0 \qquad \Omega_\varphi^+$$

$$(1.11)\qquad \Delta g^- + Q(h^-(g^-),g^-)=0 \qquad \Omega_{\varphi\psi}^-$$

$$(1.12)\qquad g^-=g^+=g^* \qquad \text{on } S_\varphi$$

$$(1.13)\qquad \partial g^-/\partial N=0 \qquad \text{on } \Sigma_\psi$$

さらに$g\in C^1(\Omega_\psi)$の条件は

$$(1.14)\qquad \frac{\partial g^+}{\partial n}-\frac{\partial g^-}{\partial n}=0 \qquad \text{on } S_\varphi$$

ここで $g^+=g|_{\Omega_\varphi^+}$，$g^-=g|_{\Omega_{\varphi\psi}^-}$である。$\varphi=\psi=0$の時は$g=g_0$として(1.10)〜(1.14)が仮定より成立するから，問題1は，与えられたψに対し，(1.10)〜(1.14)を満すφ，g^+，g^+を求める問題になっている。ところで(1.10) with (1.12)及び(1.11) with (1.12)，(1.13)は境界値問題としてwell definedであるが．実際後に命題2.1でみる様に φ，ψが与えられれば

それぞれの境界値問題より g^+, g^- がきまる。したがって

$\Gamma(\varphi,\psi)(\omega)\equiv(\partial g^+/\partial n-\partial g^-/\partial n)\circ\Phi(\omega)$ $\quad(\Phi(\omega)=x^0(\omega)+\varphi(\omega)n^0(\omega))$

とおくとき $\Gamma(\varphi,\psi)=0$ となる φ を求める問題ともなっている。$\Gamma(\varphi,\psi)=0$ より陰関数定理を適用することを考えると，Γ_φ（Γ の φ に関する Frechét 微分）の可逆性が中心課題となる。この意味で問題1は，§1.1の(E)の問題ともみることが出来る。

問題1を上の解題2)にそって整理して本節を終る。

$g^+-g^*=u$，$g^--g^*=U$ とし，$Q(h^+(u+g^*),u+g^*)=f(u)$

$Q(h^-(U+g^*),U+g^*)=F(U)$，$\Psi(\sigma)\equiv X^0(\sigma)+\psi(\sigma)N^0(\sigma)$ と書く

他の記号は前述に準ずる.

仮定(A-1) $\Omega_0(\subset R^2)$ は有界領域で $\Sigma_0=\partial\Omega_0$ は C^∞-級単純閉曲線

S_0 は Ω_0 内の C^∞-単純閉曲線.

(A-2) $f,F\in C^\infty(I)$，（I は $0\in I\subset R$ の開区間）

$f(u)>0>F(u)$，$f'(u),F'(u)\le 0$ $(u\in I)$

問題1′ (A-1)，(A-2) を仮定する．さらに $\varphi=\psi=0$ のとき次の (1.15)～(1.19) をみたす，$u_0\in C^\infty(\overline{\Omega_0^+})$，$U_0\in C^\infty(\overline{\Omega_0^-})$ が存在するとする。

(1.15) $\Delta u+f(u)=0$ $\quad\Omega_\varphi^+$

(1.16) $\Delta U+F(U)=0$ $\quad\Omega_{\varphi\psi}^-$

$$(1.17) \qquad u\circ\Phi = U\circ\Phi = 0 \qquad \text{on } S_0$$

$$(1.18) \qquad \langle N, \nabla U\circ\Phi\rangle = 0 \qquad \text{on } \Sigma_0$$

$$(1.19) \qquad \langle n, (\nabla u - \nabla U)\circ\Phi\rangle = 0 \qquad \text{on } S_0$$

与えられた ψ（Σ_0上の関数）に対して (1.15)〜(1.19) を満す φ（S_0上の関数），u（$\overline{\Omega^+_\varphi}$上の関数），$U$（$\overline{\Omega^-_{\varphi\psi}}$上の関数）を求めよ。　ここで n, N は S_φ. Σ_ψ の外向単位法線ベクトル，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^2$ の内積.

注意　問題1′は，いわゆる「(定常)2相自由境界問題」.

2.1．結果．　a を非整数とし．領域 D で $[a]$ 階微分可能 $[a]$ 階導関数が指数 $a-[a]$ の Hölder 連続である関数全体を $H^a(D)$ そのノルムを $\|\ \|^D_a$ 又は単に $\|\ \|_a$ と書く。

命題2.1　$\varepsilon>0$ を十分小，$a\geq\varepsilon$，$\varphi\in H^{a+2}(S_0)$，$\psi\in H^{a+2}(\Sigma_0)$ かつ $\|\varphi\|_{2+\varepsilon}$, $\|\psi\|_{2+\varepsilon}$ は十分小とする。このとき (1.15) (1.17) の解 $u\in H^{a+2}(\overline{\Omega^+_\varphi})$ と (1.16), (1.17), (1.18) の解 $U\in H^{a+2}(\overline{\Omega^-_{\varphi\psi}})$ がそれぞれ u_0, U_0 の近くに一意に存在する。さらに

$$(2.1) \qquad \Gamma(\varphi,\psi)\equiv\langle n, (\nabla u - \nabla U)\circ\Phi\rangle \in H^{a+1}(S_0) \quad \text{で}$$

$$(2.2) \qquad \|\Gamma(\varphi,\psi)\|_{a+1} \leq C\,(\|\varphi\|_{a+2}+\|\psi\|_{a+2})$$

を満す，(2.2)を含め今後 C は φ, ψ に無関係で，有界な a に対し有界な定数を表す。

この命題の証明は，ある変数変換により，Ω^+_φ ($\Omega^-_{\varphi\psi}$) を Ω^+_0 (Ω^-_0) に引きもどし (1.15) ～ (1.18) をその上の方程式 (Δ は，φ, ψ に依存する係数の Laplace-Bertrami operator となる) とみて遂行される。$\|\varphi\|_{2+\varepsilon}$, $\|\psi\|_{2+\varepsilon}$ が小であり，仮定より，$u-u_0$, $U-U_0$ の満す方程式の線形部分作用素は $\Delta+f'(u_0)$ $(\Delta+F'(U_0))$ である。これらの可逆性に注意し，$H^{2+\varepsilon}(\Omega^+_0)$, $(H^{2+\varepsilon}(\Omega^-_0))$ の原点近傍で縮少写像の定理を用い，$u-u_0$, $(U-U_0)$ を求め，さらに正則性を H^{a+2} まで上げ，$\|u-u_0\|_{a+2}\le C\|\varphi\|_{a+2}$, $\|U-U_0\|_{a+2}\le C(\|\varphi\|_{a+2}+\|\psi\|_{a+2})$ を求め，(2, 2) を得る。

この命題より §1.2. の問題 2) で述た様に $\Gamma(\varphi,\psi)=0$ なる φ を求める問題に，問題 $1^{(1)}$ は帰着される。

定理 (Main)　もしも Diffraction 問題

$$(2,3)\qquad \Delta v+f'(u_0)v=0 \qquad \text{in } \Omega^+_0$$

$$(2,4)\qquad \Delta V+F'(U_0)V=0 \qquad \text{in } \Omega^-_0$$

$$(2,5)\qquad v-\alpha^0\langle n^0, \nabla v-\nabla V\rangle=0 \qquad \text{on } S_0$$

$$(2,6)\qquad v=V \qquad \text{on } S_0$$

$$(2,7)\qquad \langle N^0, \nabla V\rangle=0 \qquad \text{on } \Sigma_0$$

の解が $v\equiv 0$, $V\equiv 0$ にかぎるならば，問題 $1'$ は次の意味でとける。ただし $\alpha^0=\langle n^0 \nabla u_0\rangle/(F(0)-f(0))$.

$\varepsilon>0$ を任意に十分小として固定する。$\eta>0$ は任意とする。

このとき，近傍 $D_\eta = \{ \|\psi\|^{\Sigma_0}_{5+\varepsilon+\eta} < C_\eta \}$ と写像 $\pi_\eta : D_\eta \to H^{4+\varepsilon}(S)$ が存在して，

$$\Gamma(\pi_\eta(\psi), \psi) = 0$$

$$\|\pi_\eta(\psi)\|_{4+\varepsilon} \le K C_\eta^{-1} \|\psi\|_{5+\varepsilon+\eta}$$

さらに $\psi \in C^\infty(\Sigma_0) \cap D_\eta$ ならば $\pi_\eta(\psi) \in C^\infty(S)$．

証明の方針について；陰関数定理を適用する。ただし Γ_φ の可逆性は，命題2.3，で見るように，Γ_φ の approximate inverse L に関する情報であり，かつ "derivative loss"（L が Γ の像空間から，原像の空間への有界作用素ではなく，より regularity の悪い空間への有界作用素になっている）を伴うので，classical な陰関数定理ではなく，Nash-Moser 型の陰関数定理（Zehnder [7]）を用いる。主要なチェクポイントは，

i) Smoothing operator の存在（これは Hölder class のときはよくしられている。）

ii) $\Gamma(0,0)=0$ （これは仮定より O.K）

iii) Γ_φ, $\Gamma_{\varphi\varphi}$ の存在

iv) approximate inverse L の存在と $\|\Gamma_\varphi L z - z\| \le C\|\Gamma\|' \|z\|'$ ここで右辺のノルム $\|\,\|'$ は左辺の $\|\,\|$ に較べ，derivative loss 分だけ高いクラスのノルム．

v) $\|\Gamma(\varphi,\psi)\| \le C(\|\varphi\|+\|\psi\|)^{\delta} \qquad 1\le\delta<2$

(これは命題2.1により $\delta=1$ で示された).

適用の詳細は省略する。本Noteでは iii) については本節で結果のみを述べ，iv) については次節で簡単にふれる。

$\varsigma>0$ を十分小として，$V_{\varsigma}^{a+2}\equiv\{(\varphi,\psi)\in H^{a+2}(S_0)\times H^{a+2}(\Sigma);\ \|\varphi\|_{2+\varepsilon}+\|\psi\|_{2+\varepsilon}<\varsigma\}$ とする. iii) に関して次の命題が成立する。

<u>命題 2.2</u> $(\varphi,\psi)\in V_{\varsigma}^{a+2}$ とする，$\Gamma: V_{\varsigma}^{a+2}\to H^{a+1}(S_0)$ は，φ に関して2回微分可能であり，導関数を Γ_{φ}, $\Gamma_{\varphi\varphi}$ と書くと.

$$\|\Gamma_{\varphi}(\varphi,\psi)X\|_{a+1}\le C\{\|X\|_{a+2}+(\|\varphi\|_{a+2}+\|\psi\|_{a+2})\|X\|_{2+\varepsilon}\}$$

$$\|\Gamma_{\varphi\varphi}(\varphi,\psi)[X,Y]\|_{a+1}\le C\{\|X\|_{a+2}\|Y\|_{2+\varepsilon}+\|X\|_{2+\varepsilon}\|Y\|_{a+2}+(\|\varphi\|_{a+2}+\|\psi\|_{a+2})\|X\|_{2+\varepsilon}\|Y\|_{2+\varepsilon}\}$$

for $\forall X,Y\in H^{a+2}(S_0)$, $\forall(\varphi,\psi)\in V_{\varsigma}^{a+2}$.

この命題も u, U を Ω_0^+, Ω_0^- に引きもどした関数とみて φ での微分可能性の定義に基いて調べ，導関数の評価をたんねんに調べることによって得られる。

2.2. approximate inverse of Γ_φ

次に iv) に関しては次の命題が成立する.

<u>命題 2.3.</u> Main定理の仮定が成立するとする。

$(\varphi, \psi) \in V_5^{a+4}$, $\|\varphi\|_{4+\varepsilon} + \|\psi\|_{4+\varepsilon}$ は有界とする. $H^{a+2} \to H^{a+2}$ の有界作用素 $L(\varphi, \psi)$ が存在して.

$$\| L(\varphi,\psi) Z \|_{a+2} \leq C \{ \|Z\|_{a+2} + (\|\varphi\|_{a+4} + \|\psi\|_{a+4}) \|Z\|_\varepsilon \}$$

$$\| \Gamma_\varphi(\varphi\psi) L(\varphi,\psi) Z - Z \|_{a+1}$$
$$\leq C \{ \|\Gamma\|_{a+2} \|Z\|_0 + \|\Gamma\|_0 \|Z\|_{a+2} + (\|\varphi\|_{a+4} + \|\psi\|_{a+4}) \|\Gamma\|_0 \|Z\|_0 \}$$

for $\forall Z \in H^{a+2}(S_0)$. また右辺の $\Gamma = \Gamma(\varphi, \psi)$.

証明の方針 (Lのきめ方): 詳しい証明には立入らないが, Lがどのように定義されるか, Diffraction 問題の一意性とどんな関係にあるかを簡単にみてみよう。 そのために, Γ_φ がを形式的に表現することから始めよう。 φの変分Xに対する, Γ 等の才1変分を ${}^X\Gamma$ ($= \Gamma_\varphi X$) 等と書くことにする。 (2.1) より

$$ {}^X\Gamma(\varphi,\psi) = \langle {}^X n, (\nabla u - \nabla U) \circ \Phi \rangle$$
$$+ \langle n, (\nabla {}^X u - \nabla {}^X U) \circ \Phi \rangle$$
$$+ \langle n, [D^2(u - U) \circ \Phi] n_0 \rangle X$$

ここで $D^2 u$ は u の Hessian。 $\langle {}^X n, n \rangle = 0$, ∇u, $\nabla U \,/\!/\, n$ より 右辺才1項は消去される。また簡単な計算より.

$$\langle n, [D^2(u-U)\circ\Phi]\, n\rangle = F(0) - f(0) - \rho\,\Gamma(\varphi,\psi) \equiv G$$

ここで ρ は S_φ の曲率であり, $F(0)-f(0)<0$ だから $\Gamma(\varphi,\psi)$ が十分小のとき $G<0$。 t を S_φ の接ベクトルとすると.

$$(2.8)\quad {}^X\Gamma(\varphi,\psi) = \langle n, (\nabla^X u - \nabla^X U)\circ\Phi\rangle + \langle n, n_0\rangle G X + \langle n_0, t\rangle \left(\frac{d}{ds}\Gamma(\varphi,\psi)\right) X$$

また ${}^Xu$, ${}^XU$ は (1.15)~(1.18) より.

$$(2.9)\quad \Delta\, {}^Xu + f'(u)\,{}^Xu = 0 \qquad \text{in } \Omega^+_\varphi$$

$$(2.10)\quad \Delta\, {}^XU + F'(U)\,{}^XU = 0 \qquad \text{in } \Omega^-_{\varphi\psi}$$

$$(2.11)\quad {}^Xu\circ\Phi = -\langle n^0, \nabla u\circ\Phi\rangle X \qquad \text{on } S_0$$

$$(2.12)\quad {}^XU\circ\Phi = -\langle n^0, \nabla U\circ\Phi\rangle X \qquad \text{on } S_0$$

$$(2.13)\quad \langle N, \nabla\, {}^XU\circ\Phi\rangle = 0 \qquad \text{on } \Sigma_0$$

以上の形式的計算は $\Gamma_\varphi(\varphi,\psi)$ を $H^{a+2}\to H^{a+2}$ と見るとき $(\varphi,\psi)\in H^{a+4}(S_0)\times H^{a+4}(\Sigma_0)$ の場合に正当化可能である(証明は略)。

Γ_φ の逆を考えることは, 与えられた S_0 上の関数 Z に対して $Z=\Gamma^X(\varphi,\psi)$ となる X を求めることであるが, ここでは直接それは考えないで以下のようにする。

$\hat u$, $\hat U$ を(もし存在するならば)

$$(2.8)'\quad Z = \langle n, (\nabla\hat u - \nabla\hat U)\circ\Phi\rangle + \langle n, n_0\rangle G X$$

と (2.9)(2.10)(2.11)(2.13) の ${}^Xu$ を $\hat u$ と, ${}^XU$ を $\hat U$ と代えた式, さらに (2.12′) $\hat U\circ\Phi = \hat u\circ\Phi$ を満すものとする。

(2.8)′ と (2.11) から X を消去して

$$(2.11)' \qquad \hat{u}\circ\Phi - \alpha\langle n, (\nabla\hat{u}-\nabla\hat{U})\circ\Phi\rangle = -\alpha Z$$

ここで $\alpha = \langle n^{\circ}, \nabla u\circ\Phi\rangle / \langle n, n_0\rangle G \quad > 0$ for φ, ψ 小.

したがって $\hat{u}, \hat{U}$ の満すべき式は

$$(2.9)' \qquad \Delta\hat{u} + f'(u)\hat{u} = 0 \qquad \text{in } \Omega^+_\varphi$$

$$(2.10)' \qquad \Delta\hat{U} + F'(U)\hat{U} = 0 \qquad \text{in } \Omega^-_{\varphi\psi}$$

$$(2.11') \qquad \hat{u}\circ\Phi - \alpha\langle n, (\nabla\hat{u}-\nabla\hat{U})\circ\Phi\rangle = -\alpha Z \quad \text{on } S_0$$

$$(2.12') \qquad \hat{U}\circ\Phi = \hat{u}\circ\Phi \qquad \text{on } S_0$$

$$(2.13)' \qquad \langle N, \nabla\hat{U}\circ\Phi\rangle = 0 \qquad \text{on } \Sigma_0$$

与えられた Z に対し、このDiffraction問題の可解性は、解の一意性に帰着され(Ladyzehnskaya & Uraltseva [8])さらに $\|\varphi\|_{2+\varepsilon}+\|\psi\|_{2+\varepsilon}$ が小のときは $\varphi=\psi=0$ の場合の一意性に帰着されることが示される(詳細は略). Main定理の仮定の下では $\hat{u}, \hat{U}$ が求められる. (2.8)′ より L を

$$LZ = Z/\alpha - \langle n, (\nabla\hat{u}-\nabla\hat{U})\circ\Phi\rangle/\alpha$$

によって定義する。これを評価することによって命題2.3の第1の評価を得る(証明は割愛)。

また (2.8) ~ (2.13) と (2.8)′ ~ (2.13)′ (ただし(2.11)′は原形 $\hat{u}\circ\Phi = -\langle n_0, \nabla u\circ\Phi\rangle$) と比較して

$$\Gamma_\varphi L Z - Z = \langle n, \nabla W\circ\Phi\rangle + \langle n_0, t\rangle\left(\frac{d}{ds}\Gamma(\varphi,\psi)\right)L(\varphi,\psi)Z$$

ただし　$W = {}^{x}\sqcup - \hat{\sqcup}$　$(\,X = LZ\,)$ であり，これは

$$\begin{cases} \Delta W + F'(\sqcup)W = 0 & \text{on } \Omega^+_{\varphi\psi} \\ \langle N, \nabla W \circ \Phi \rangle = 0 & \text{on } \Sigma_0 \\ W \circ \Phi = -\langle n^0, (\nabla u - \nabla U) \circ \Phi \rangle \cdot LZ & \text{on } S_0 \end{cases}$$

の解である。　したがって，$\Gamma_\varphi LZ - Z$ が Γ, Z に関し2次（各1次）であることは直ちにわかる。これを評価して命題2.3の才2の評価式をうる（証明は略）。

3.1　Diffraction problemの一意性．

Main定理中のDiffraction problemの一意性のための1つの十分条件を，Ω_0 が円，$u_0, \sqcup_0$ が円対称な場合に結果のみ述べておこう。

定理3.1

(3.1)　$$\frac{4+M}{3}\,\frac{l^+}{l+l^+} < \frac{1}{4} \quad \text{かつ} \quad \frac{1+M}{3}\, l^+ \frac{F(0)}{\left.\frac{\partial u_0}{\partial n_0}\right|_{|x|=l^+}} < \frac{1}{2}$$

のとき，Diffraction problem (2.3)〜(2.7) は $v \equiv 0, V \equiv 0$ のみを解とする。　ここで　$l\ (l^+)$ は $\Omega_0\ (\Omega_0^+)$ の半径，

$M = l \max\{-F'(\sqcup_0(x))\ ;\ x \in \Omega_0^-\}$.

3.2.　例．

最後に　簡単な例をのべる。　p, q で記述する。

$P(p,q) = (q-k)(p^2-1)$ ， $Q(p,q) = a(p-b)$

ここで k, a, b は 定数． $q^* = 0$ ととるとき．

$$\begin{cases} 0 = P(p,q) & \text{in } \Omega = \{|x|<L\} \\ 0 = \Delta q + Q(p,q) & \text{in } \Omega \\ 0 = \partial q/\partial N & \text{on } \Sigma = \{|x|=L\} \end{cases}$$

は　$|b|<1$ かつ

$$k > a(1-b^2)L^2\left(1+\frac{4}{1-b}\right)\log\sqrt{\frac{2}{1+b}}$$

ならば q は 中心部で正，周辺部で負の円対称な解をもつ

ただし $P(p,q)=0$ の枝は $h^+(q)=1$ $q>0$， $h^-(q)=-1$ $q<0$ である。

$$-1 < b < -\frac{145}{169}$$

のとき (3.1) を満す。

References

[1] Mimura, M., Asymptotic behavior of a parabolic system relat ed to a platonic prey and predator model, SIAM J. Appl. Math. 1977.

[2] Segel, L. & Jackson, Dissipative stracture: An explanation and an ecological example, J. Theor. Biol. 37 545-559 (1972).

[3] Segel, L. & Levin, S, Application of nonlinear stability theory to the study of the effects of diffusion on predator prey interaction, In AIP Conf. Proc. 27,123-152 (1976).

[4]Mimura, M.,Nishiura, Y. & Yamaguchi, M., Some diffusive prey and predator systems and their bifurcation problems, Annals of New York Academy of Sciences 316, 490-510 (1979).

[5] Fife, P., Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations, J. Math. Anal. Appl. 54 497-521 (1976).

[6] Mimura, M., Tabata, M. & Hosono, Y., Singular perturbation for pairs of two point boundary value problems of Neumann type, Lecture Note in Num. Appl. 2, 79-132 (1980). Kinokuniya

[7] Zehnder, E., Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problem I, Comm. Pure Appl. Math. 28, 91-140 (1975).

[8] Ladyzehnskaya, O. A. & Ural'tseva, N. N., Linear & qasilinear elliptic equations, Academic press, New York 1968