数理解析研究所講究録
第 462 巻 1982 年 24-45

Hopf bifurcation of semilinear evolution equations

東大 教養 伊藤達夫

§1. 序

実 Banach 空間 X の中のパラメーター $\lambda \in \mathbb{R}^n$ を含む発展方程式

(E) $\quad \frac{du}{dt} = Lu + N(u,\lambda) \quad , \quad t>0$

を考える。 ここで L は正則半群の生成作用素で, 非線形作用素 $N(x,\lambda)$ は C^2 で $N(0,\lambda)=0$, $D_x N(0,0)=0$ とする。我々は 発展方程式 (E) が $\lambda=0$ で構造不安定になるときを考える。この一番簡単な状況は (1) 0 が L の固有値で代数的重複度が 1 で $\sup_{\mu\in\sigma(L)\setminus\{0\}} \mathrm{Re}\,\mu < -\alpha$, または (2) $\pm i$ が L の固有値でその代数的重複度が 1 で $\sup_{\sigma(L)\setminus\{i,-i\}} \mathrm{Re}\,\mu < -\alpha$, (α は正の定数, $\sigma(L)$ は L のスペクトラム)のときである。〔7〕で (1) の場合を論じた。ここでは (2) の場合を論じる。よく知られているように (2) の下では 周期軌道が $(x,\lambda)=(0,0)$ から分岐し得る。我々

の目的は $x=0$ の近傍に初期値 x_0 を与えたときの (E) の解 $u(t, x_0, \lambda)$ の $t \to \infty$ のときの漸近挙動を調べることである。特に，ある λ に対して $x=0$ の近傍に周期軌道がいくつか存在するときに関心がある。$u(t, x_0, \lambda)$ が周期軌道に収束するかどうか，また収束するとしたら，どの周期軌道に収束するかという観点から初期値 x_0 を分類することを試みる。(この手の話は最近 dynamical bifurcation theory と呼ばれつつある。Carr [1], Hale [4])

この問題を考えるに至った動機について触れ，我々の解くべき問題を設定する。適当な仮定の下で以下のことが示される。"($\lambda \in \mathbb{R}^1$ で) 定常解 $(0, \lambda)$ が $\lambda = 0$ で安定性を失なうとき，λ に依らない $x=0$ の近傍 U が存在して $\lambda > 0$ に対して U 中に非定常な周期軌道 $\gamma(\lambda)$ が一意に存在して漸近安定である。" 特に (E) がある物理現象を記述しているときには "….." の成立することを "定常解 $(0, \lambda)$ が安定性を失なうとき，周期軌道によって記述される，より複雑な現象が観測される"（安定性交代原理）という云い方をすることがある。しかし，このように云うには少し飛躍がある。この飛躍を説明する。$\gamma(\lambda)$ が漸近安定ということから $\gamma(\lambda)$ の近傍 $U(\lambda) \subset U$ が存在して，各 $x_0 \in U(\lambda)$ に対して $u(t, x_0, \lambda)$ は $t \to \infty$ のとき $\gamma(\lambda)$ に収束する。しかし $x_0 \in U \setminus U(\lambda)$ に

対して $u(t, x_0, \lambda)$ の漸近挙動については何ら触れていない。$U \setminus U(\lambda)$ 中に漸近安定な集合があるかもしれない。安定性交代原理の正当化のために我々のなすべきことは次のことである。各 $x_0 \in U$ に対して $u(t, x_0, \lambda)$ の ω-limit set を決定しそれが"ほとんど全ての x_0"に対して $\gamma(\lambda)$ に等しいことを示すことである。以上のことを念頭において，我々が，ここで論ずる問題を次に設定する。まず解が blow up する可能性と N を small perturbation と考える立場から ω-limit set の代りに local ω-limit set という概念を導入する。U, V $(U \subset V)$ を $0 \in X$ の近傍とする。$x_0 \in U$ に対し $u(t, x_0, \lambda)$ の local ω-limit set $\Omega_{U,V}(x_0, \lambda)$ を $\Omega_{U,V}(x_0, \lambda) = \bigcap_{s \geqq 0} \overline{\{u(t, x_0, \lambda) : t \geqq s\}}$ $(u(t, x_0, \lambda) \in V,\ t \geqq 0)$, $= \phi$ (その他) と定義する。我々の論ずべき問題は"適当な近傍 U, V (但し U は λ に依らない)に対して $\Omega_{U,V}(\cdot, \lambda)$ を決定せよ" である。得られた結果は次の通りである。

定理　0 の近傍 $U, V(\lambda)$ $(U \subset V(\lambda))$ が存在して以下が成立する。もし $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0, \lambda) \neq \phi$ ならば $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0, \lambda)$ は唯一の周期軌道 $\gamma(x_0, \lambda)$ から成る ($\{0\}$ のこともあり得る)。さらに $u(t, x_0, \lambda) \to \gamma(x_0, \lambda)$, $t \to \infty$.

$\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0, \lambda)$ が ϕ か ϕ でないかの決定と $x_0 \to \gamma(x_0, \lambda)$

の決定は　初期値 x_0 と周期軌道の安定多様体との位置関係及び　分岐関数の挙動を調べることによって完全に行なえる。§5 で述べる。ここでは　次の特別な場合を述べておく。

<u>定理</u>　$V(\lambda)$ 中に (E) の周期軌道 $\gamma(\lambda)$ ($\neq \{0\}$) が一意に存在して漸近安定ならば　$\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda) \neq \phi$　($x_0 \in U$) である。さらに　$x_0 \in \mathcal{M}(0,\lambda)$ ならば　$\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda) = \{0\}$, $x_0 \in U \setminus \mathcal{M}(0,\lambda)$ ならば　$\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda) = \gamma(\lambda)$ である。ここで $\mathcal{M}(0,\lambda)$ は　定常解 $(0,\lambda)$ の余次元 2 の安定多様体である。

この定理によって安定性交代原理は正当化されたと言ってよいだろう。

§2　準備

2.1.　<u>仮定</u>.　　X は実 Banach 空間で　L は X の線形作用素, $N(\cdot,\lambda)$ は X の中のパラメーター λ ($\in R^n$) をもつ非線形作用素とする。L と N に関して　次を仮定する。

<u>仮定1.</u> (i)　L は X の中の正則半群 $\{e^{tL}\}_{t\geq 0}$ を生成する。

(ii)　$\pm i$ は L の固有値で　その代数的重複度は 1 であり, L のスペクトラムの他の部分 $\sigma(L)\setminus\{i,-i\}$ は　$\sup_{\mu\in\sigma(L)\setminus\{i,-i\}} \mathrm{Re}\,\mu < -\alpha$　($\alpha > 0$) を満たす。

但 条件 (i), (ii) では L を X の複素化 Banach 空間 X_c 上への線形拡張とみなしている。

数 β, $0 \leq \beta < 1$, を固定する。この範囲にある β に対して全ての結果は成立する。特に序で述べた結果は $\beta = 0$ のときである。X_β で $(-L+1)^\beta$ の定義域にグラフノルムを入れた Banach 空間を表わすことにする。

<u>仮定 2.</u> N は $(0,0) \in X_\beta \times \mathbb{R}^n$ の近傍から X への C^2 写像で $N(0,\lambda) = 0$, $D_x N(0,0) = 0$ を満たす。

2.2. 仮定 1 より $\varphi_c \in \mathrm{Ker}(L-i)$, $\varphi_c^* \in X_c^*$ が存在して $\langle x, \varphi_c^* \rangle = 0$, $^\forall x \in R(L-i)$; $\langle \varphi_c, \varphi_c^* \rangle \neq 0$ が成立する。実 Banach 空間 X で取扱うために

$$\varphi_c = \varphi_1 + i\varphi_2 , \quad \varphi_j \in X \quad (j=1,2)$$

$$\varphi_c^* | X = \varphi_1^* - i\varphi_2^* , \quad \varphi_j^* \in X^* \quad (j=1,2)$$

と置くと 上の関係式は 適当に規格化すると

$$L\varphi_1 = -\varphi_2 , \quad L\varphi_2 = \varphi_1 , \quad \langle \varphi_j, \varphi_k^* \rangle = \delta_{j,k} \quad (j,k=1,2)$$

$$\langle Lx, \varphi_j^* \rangle = (-1)^{j+1} \langle x, \varphi_{j+1}^* \rangle \quad (j=1,2, \quad \varphi_3^* = \varphi_1^*)$$

となる。次に X, X_β を

$$X = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2\} \oplus Z , \quad Z = \{ x \in X : \langle x, \varphi_j^* \rangle = 0, j=1,2 \}$$

$$X_\beta = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2\} \oplus Z_\beta , \quad Z_\beta = \{ x \in X_\beta : \langle x, \varphi_j^* | X_\beta \rangle = 0, j=1,2 \}$$

と直和分解し X から $\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$, Z への射影を,各々

$$P x \equiv \langle x, \varphi_1^* \rangle \varphi_1 + \langle x, \varphi_2^* \rangle \varphi_2 , \quad Q x \equiv x - Px$$

と定義する。また P, Q の X_β 上への制限も簡単のために P, Q と書くことにする。以下の定理の記述の簡単化のために X_β のノルム $\| \ \|_\beta$ と同値なノルム

$$\|x\| \equiv \max \left\{ \sqrt{\langle x, \varphi_1^* \rangle^2 + \langle x, \varphi_2^* \rangle^2} , \|Qx\|_\beta \right\}$$

で以下考える。最後に，Banach 空間 Y の 0 を中心とする半径 r の開球を $B_Y(r)$ で表わすことにする。

2.3. 存在定理と定義

まず (E) の解の定義を与える。λ を固定し T を正の数とする。

定義 2.1. 関数 $u(t)$ が $[0,T)$ で初期値が x_0 の (E)の解であるとは次の (i)-(iv) が成立することである。

(i) $u(t) \in C([0,T), X_\beta)$,

(ii) $\dfrac{du(t)}{dt} \in C((0,T), X)$,

(iii) $u(t)$ は $0 < t < T$ で L の定義域，$0 \leq t < T$ で N の定義域に入る。

(iv) $u(t)$ は $0 < t < T$ で (E) を満たし，$u(0) = x_0$ である。

解の存在に関しては次の定理が成立する。

定理 2.2. 仮定 1, 2 が成立するとする。任意の $0<T<\infty$ に対して $(0,0)\in X_\beta\times\mathbb{R}^n$ の開近傍 $W\times\Lambda$ が存在して，各 $(x_0,\lambda)\in W\times\Lambda$ に対し (E) の解が $[0,T)$ で一意に存在する。

証明は Henry [5] を参照。

次に力学系の理論から用語を導入する。$T>0$ を固定する。W と Λ を定理 2.2 の $W,\ \Lambda$ で $\sup_{x\in W,\ \lambda\in\Lambda}\|N(x,\lambda)\|$ が有界となるものとする。このとき各 $x_0\in W$ に対して次を満たす最大数 $0<\tau(x_0,\lambda)\leq\infty$ が存在する: 初期値 x_0 の (E) の解 $u(t)$ が $[0,\tau(x_0,\lambda))$ で存在し $u(t)\in W$, $t\in[0,\tau(x_0,\lambda))$, [5]。以下上記の $W,\ \Lambda$ を固定して，$[0,\tau(x_0,\lambda))$ 上の初期値 x_0 の (E) の解 $u(t)$ を $u(t,x_0,\lambda)$ と書くことにする。X_β の部分集合 $\{u(t,x_0,\lambda) : 0\leq t<\tau(x_0,\lambda)\}$ を (E) の解 $u(t,x_0,\lambda)$ の軌道と呼ぶ。特に $u(t,x_0,\lambda)$ が周期解のときには，$u(t,x_0,\lambda)$ の軌道を周期軌道と呼ぶ。集合 $S\ (\subset W)$ が不変とは各 $x_0\in S$ に対して，$\tau(x_0,\lambda)=\infty$ で $u(t,x_0,\lambda)\in S$, $t\geq 0$ が成立するときを言う。不変集合 S が安定とは S の任意の近傍 U に対して S の近傍 V が存在して，各 $x_0\in V$ に対して，$\tau(x_0,\lambda)=\infty$ で $u(t,x_0,\lambda)\in U$, $t\geq 0$ が成

立するときを言う。 不変集合 S が不安定とは S が安定でないとき，不変集合 S が漸近安定とは S が安定でさらに S の近傍 V が存在して 各 $x_0 \in V$ に対して $\tau(x_0, \lambda) = \infty$ で $u(t, x_0, \lambda)$ が $t \to \infty$ のとき，S に収束するときを言う。 周期解が軌道安定，(軌道不安定，軌道漸近安定)とはその軌道が安定（不安定，漸近安定）のときを言う。

最後に解 $u(t, x_0, \lambda)$ の local ω-limit set の定義を与える。

定義 2.3. U, V を $U \subset V \subset W$ なる $0 (\in X_\beta)$ の近傍とする。 $x_0 \in U$ に対して $\{U, V\}$ に関する (E) の解 $u(t, x_0, \lambda)$ の local ω-limit set $\Omega_{U,V}(x_0, \lambda)$ を

$$\Omega_{U,V}(x_0, \lambda) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\{ u(t, x_0, \lambda) : s \leq t < \infty \}} \quad (\tau(x_0, \lambda) = \infty,$$

$u(t, x_0, \lambda) \in V, \ t \geq 0)$， $= \phi$ （その他）で定義する。（$\overline{}$ は X_β の位相での閉包）

§3. Center manifold 定理.

この節では center manifold 定理を述べる。この定理を用いて (E) の周期軌道の存在の問題を1次元の写像の不動点の存在の問題に帰着させる。この帰着はよく知られている[1,2,4,5,9]が，解の漸近挙動を論ずる際に必要になるので，

Marsden-McCracken [9] に従って以下に述べる。

定理 3.1. (Center manifold 定理). 仮定 1, 2 の下で以下が成立する。 $B_{X_\beta}(d_1) \subset W$, $B_{\mathbb{R}^n}(d_1) \subset \Lambda$ なる数 $d_1>0$ と C^2 写像 $z_\beta : B_{\mathbb{R}^2}(d_1) \times B_{\mathbb{R}^n}(d_1) \to B_{Z_\beta}(d_1)$ が存在して次の (1), (2) が成立する。

(1) $z_\beta(0,0,\lambda) = 0$, $D_\lambda z_\beta(0,0,0) = 0$, $D_{a_j} z_\beta(0,0,0) = 0$,

$\| D_{a_j} z_\beta(a_1, a_2, \lambda) \| < 1/4$, $(a_1, a_2, \lambda) \in B_{\mathbb{R}^2}(d_1) \times B_{\mathbb{R}^n}(d_1)$.

(2) 各 λ, $|\lambda| < d_1$, に対して 2次元多様体

$$\mathcal{C}_\lambda \equiv \{ a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + z_\beta(a_1, a_2, \lambda) : (a_1, a_2) \in B_{\mathbb{R}^2}(d_1) \}$$

は次の (i), (ii) の性質を持つ。

(i) (local invariance) もし $x_0 \in \mathcal{C}_\lambda$ で、ある $t>0$ に対して $u(s, x_0, \lambda) \in B_{X_\beta}(d_1)$, $0 \le s \le t$, ならば

$u(s, x_0, \lambda) \in \mathcal{C}_\lambda$, $0 \le s \le t$.

(ii) (local attractivity). もしある $t>0$ に対して $u(s, x_0, \lambda) \in B_{X_\beta}(d_1)$, $0 \le s \le t$, ならば

$$\| z_\beta(a_1(s), a_2(s), \lambda) - Q u(s, x_0, \lambda) \|$$
$$\le K_1 e^{-\alpha s} \| z_\beta(a_1(0), a_2(0), \lambda) \|, \quad 0 \le s \le t,$$

ここで $a_j(s) \equiv \langle u(s, x_0, \lambda), \varphi_j^* \rangle$, $j = 1, 2$, で K_1 は t と λ に依らない定数 α は仮定 1 の定数.

まず center manifold 定理を使って 2次元の問題へ帰着する。 $u(t, x_0, \lambda)$ を直和分解 $X_\beta = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2\} \oplus Z_\beta$ を用いて $u(t, x_0, \lambda) = a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + v(t)$ と分解すると (E) は

$$\frac{da_j(t)}{dt} = (-1)^{j+1} a_{j+1}(t) + \langle N(a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + v(t), \lambda), \varphi_j^* \rangle, \quad j=1,2,$$

$$\frac{dv}{dt} = L v(t) + QN(a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + v(t), \lambda),$$

$$a_j(0) = \langle x_0, \varphi_j^* \rangle,\ j=1,2,\quad v(0) = Qx_0 \quad ,(\text{但 } a_3 = a_1)$$

と分解される。 さらに初期値 x_0 が $\mathcal{C}_\lambda$ 上にあるときには (E) は次の2次元の常微分方程式に帰着される。

(3.1) $$\frac{da_j}{dt} = (-1)^{j+1} a_{j+1} + f_j(a_1, a_2, \lambda)$$

(3.2) $$a_j(0) = a_{j,0} \quad , \qquad j=1,2.$$

ここで f_j は

$$f_j(a_1, a_2, \lambda) \equiv \langle N(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + z_\beta(a_1, a_2, \lambda), \lambda), \varphi_j^* \rangle, \quad j=1,2.$$

実際、次の命題 3.2, 3.3 が成立する。

<u>命題</u> 3.2. $x_0 \in \mathcal{C}_\lambda$ とする。 もしある $t' > 0$ に対して $u(t, x_0, \lambda) \in B_{X_\beta}(d_1)$, $0 \le t \le t'$ ならば $u(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{C}_\lambda$, $0 \le t \le t'$ で $a_j(t) \equiv \langle u(t, x_0, \lambda), \varphi_j^* \rangle$ $j=1,2,$ は初期値 $a_{j,0}$ が $\langle x_0, \varphi_j^* \rangle$ の (3.1)-(3.2) の解である。 逆に (a_1, a_2) が (3.1)-(3.2) の解で、ある $t' > 0$

に対して $(a_1(t), a_2(t)) \in B_{\mathbb{R}^2}(d_1)$, $0 \leq t \leq t'$, ならば

$u(t) \equiv a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z_\beta(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ は初期値

$x_0 = a_{1,0}\varphi_1 + a_{2,0}\varphi_2 + z_\beta(a_{1,0}, a_{2,0}, \lambda)$ の (E) の解である。

命題 3.3. $w(t)$ が (E) の周期解で $B_{X_\beta}(d_1)$ に含まれているならば $a_j(t) = \langle w(t), \varphi_j^* \rangle$, $j = 1, 2$ は (3.1) の周期解で $w(t) = a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z_\beta(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ が成立する。逆に (a_1, a_2) が $B_{\mathbb{R}^2}(d_1)$ に含まれる (3.1) の周期解ならば $w(t) = a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z_\beta(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ は (E) の周期解である。

証明は定理 3.1 より直ちに得られる。

次に (E) の周期解の存在の問題を 1 次元の写像の不動点の存在の問題に帰着する。

(3.1) は極座標 $a_1 = r\cos\theta$, $a_2 = r\sin\theta$ を使って変換すると

(3.3) $$\frac{dr}{dt} = R(r, \theta, \lambda), \qquad \frac{d\theta}{dt} = -1 + \Theta(r, \theta, \lambda)$$

となる。ここで

$$R(r, \theta, \lambda) \equiv f_1(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\cos\theta + f_2(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\sin\theta,$$

$$\Theta(r, \theta, \lambda) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{r}\{-f_1(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\sin\theta + f_2(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)\cos\theta\}, & (r \neq 0) \\ -\dfrac{\partial f_1}{\partial a_1}(0, 0, \lambda)\cos\theta\sin\theta - \dfrac{\partial f_1}{\partial a_2}(0, 0, \lambda)\sin^2\theta \\ \quad + \dfrac{\partial f_2}{\partial a_1}(0, 0, \lambda)\cos^2\theta + \dfrac{\partial f_2}{\partial a_2}(0, 0, \lambda)\sin\theta\cos\theta & (r = 0) \end{cases}$$

で, $\mathcal{R} \in C^2$, $\Theta \in C^1$, $\Theta(0, \theta, 0) = 0$ である。

(3.3) の解で $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$ なる解を

$r(t; r_0, \theta_0, \lambda)$, $\theta(t; r_0, \theta_0, \lambda)$ と書くことにする。

<u>補題</u> 3.4. 正定数 d_2 $(< d_1)$ と C^1-写像 τ :

$B_{\mathbb{R}^1}(d_2) \times B_{\mathbb{R}^n}(d_2) \times (-2\pi, 0] \to \mathbb{R}^1$ が存在して

$$\theta(\tau(r_0, \lambda, \theta_0); r_0, \theta_0, \lambda) = -2\pi$$

$$\tau(0, 0, \theta_0) = 2\pi + \theta_0$$

分岐関数 p を

$$p(r, \lambda) \equiv r(\tau(r, \lambda, 0); r, 0, \lambda), \quad (r, \lambda) \in B_{\mathbb{R}^1}(d_2) \times B_{\mathbb{R}^n}(d_2)$$

と定義すると 補題 3.4 より $p \in C^1$ で $p(0, \lambda) = 0$,

$p(r, \lambda) \neq 0$ $(r \neq 0)$ が成立する。

(3.1) の周期解と 1次元 の 写像 $p(\cdot, \lambda)$ の不動点の関係

は 次の補題によって与えられる。

<u>補題</u> 3.5. r が $p(\cdot, \lambda)$ の不動点ならば

$a_1(t) = r(t; r, 0, \lambda) \cos\theta(t; r, 0, \lambda)$, $a_2(t) = r(t; r, 0, \lambda) \sin\theta(t; r, 0, \lambda)$

は (3.1) の周期解である。 逆に $(a_1(t), a_2(t))$ が

$|a_1(0)| < d_2$, $a_2(0) = 0$ なる (3.1) の周期解ならば

$a_1(0)$ は $p(\cdot, \lambda)$ の不動点である。

<u>補題</u> 3.6. $p(\cdot,\lambda)$ の不動点 r と, r に対応する (3.1) の周期解の軌道安定性は同じである。

以上のことを まとめると次の様になる。(E) の周期軌道を考える代りに (*) $w(0) = r\varphi_1 + z_\beta(r,0,\lambda)$, $p(r,\lambda)=r$, $r\geq 0$ なる (E) の周期解 $w(t)$ を考えればよい。
(*) を通して $p(\cdot,\lambda)$ の不動点 $r\geq 0$ で 特徴づけられる (E) の周期解 $w(t)$ を $w(t;r,\lambda)$ と書くことにする。またその軌道を $w(\cdot\,;r,\lambda)$ で表わすことにする。$r>0$ のときには $w(t;r,\lambda)$ は 非定常な周期解, $w(t;0,\lambda)$ は定常解 0 になることに注意しておく。

(E) の解 $u(t,x_0,\lambda)$ の 時間 t に関する漸近挙動を論ずる際に, $p(\cdot,\lambda)$ の挙動が重要な役割を演ずる。そこで この節の残りで $p(\cdot,\lambda)$ の不動点を完全に特徴づける条件を求めておく。

<u>補題</u> 3.7. (Marsden・McCracken [9 ; Lemma 3.7])

$$\frac{\partial p}{\partial r}(0,0) = 1.$$

より, 必要ならば d_2 を小にとって $\frac{\partial p}{\partial r}(r,\lambda) > 0$, $(r,\lambda)\in B_{\mathbb{R}^1}(d_2)\times B_{\mathbb{R}^n}(d_2)$ が 成立するように取り直しておく。すると $p(\cdot,\lambda)$ の不動点 r の安定性は r の近傍での $p(\cdot,\lambda)$ の挙動

によって完全に特徴づけられる。全ての可能な $p(\cdot,\lambda)$ の挙動は次で与えられる。

I(+) r の近くの $r'>r$ に対して $p(r',\lambda)<r'$

II(+) 数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $r_k \downarrow r$ で $p(r_k,\lambda)=r_k$.

III(+) r の近くの $r'>r$ に対して $p(r',\lambda)>r'$

I(−) r の近くの $r'<r$ に対して $p(r',\lambda)>r'$

II(−) 数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $r_k \uparrow r$ で $p(r_k,\lambda)=r_k$

III(−) r の近くの $r'<r$ に対して $p(r',\lambda)<r'$

補題 3.8. $p(\cdot,\lambda)$ の不動点 $r(\geqq 0)$ の安定性は

	I(+)	II(+)	III(+)
I(−)	漸近安定	安定	不安定
II(−)	安定	安定	不安定
III(−)	不安定	不安定	不安定

この表の読み方は例えば I(+) と I(−) が成立するならば、不動点 r は漸近安定である，というふうに読む。

§4. 安定多様体定理

(E) の周期軌道 $w(\cdot;r,\lambda)$ が与えられたとき

$$\| u(t,x_0,\lambda) - w(t;r,\lambda) \| \leqq K_2\, e^{-\alpha t}, \quad t\geqq 0, \quad (K_2 \text{ 正定数})$$

を満たす初期条件 x_0 を特徴づけることを考える。この特徴づけは安定多様体定理という名で知られている。ここで使うのは次の形の定理である。

定理 4.1. 仮定 1, 2 の下で正定数 $d_3<d_2$ が存在して以下が成立する。各 $(x,\lambda)\in B_{X_\beta}(d_3)\times B_{\mathbb{R}^2}(d_3)$ に対して $B_{Z_\beta}(d_3)$ から $\mathbb{R}^1$ への C^1-写像 $\underbrace{a_j(z;x,\lambda),}_{j=1,2}$ が存在して次の (1) - (3) が成り立つ。

(1) $a_j(0;x,\lambda)=0$, $\|D_z\, a_j(z;x,\lambda)\|<\frac{1}{2}$, $z\in B_{Z_\beta}(d_3)$.

(2) 余次元 2 の多様体

$$\hat{m}(x,\lambda)\equiv\{x+\sum_{j=1,2}a_j(z;x,\lambda)\varphi_j+z \;:\; z\in B_{Z_\beta}(d_3)\}$$

は次の性質 (i), (ii) をもつ。

(i) もし $u(t,x,\lambda)\in B_{X_\beta}(d_3)$, $t\geq 0$ で $\|u(t,x_0,\lambda)-u(t,x,\lambda)\|\leq K_2e^{-\alpha t}$, $t\geq 0$ ならば $x_0\in\hat{m}(x,\lambda)$. ここで K_2 は t,x,λ に依らない正定数。

(ii) もしある $s>0$ に対して $u(t,x,\lambda)\in B_{X_\beta}(d_3)$, $0\leq t\leq s$ で $x_0\in\hat{m}(x,\lambda)$ ならば

(4.1) $\|u(t,x_0,\lambda)-u(t,x,\lambda)\|\leq K_3e^{-\alpha t}\|x_0-x\|$, $0\leq t\leq s$.

ここで $K_3\geq 1$ は t, x, λ に依らない定数.

(3) もし $w(t)$ が $B_{X_\beta}(d_3)$ に含まれる (E) の周期解ならば

$a_j(z\,;\,w(t),\lambda)$ は (z,t) に関して連続である。

$w(\cdot\,;r,\lambda)$, $|\lambda|<d_3$, を $B_{X_\beta}(d_3)$ に含まれる(E)の周期軌道とすると，各 $x=w(s\,;r,\lambda)$, $s\geq 0$, に対して $u(t,x,\lambda)\in B_{X_\beta}(d_3)$, $t\geq 0$, が成立する。従って (4.1) は x を $w(s\,;r,\lambda)$ で置き換えたときに $t\geq 0$ で成立している。特に $r=0$, 即ち $w(s\,;0,\lambda)=0$ のときに成立している。$\hat{\mathfrak{m}}(0,\lambda)$ を定常解 $(0,\lambda)$ の安定多様体と呼ぶ。この節の残りでは非定常な周期軌道の安定多様体を定義しその性質を与える。そのために集合

$$\bigcup_{0\leq s\leq \tau(r,\lambda)} \hat{\mathfrak{m}}(w(s\,;r,\lambda),\lambda) \qquad (\ \tau(r,\lambda)\ \text{は}\ w(\cdot\,;r,\lambda)\ \text{の周期})$$

を考える。以下簡単のために $w(s\,;r,\lambda)$, $\langle w(s;r,\lambda),\varphi_j^*\rangle$ を $w(s)$, $b_j(s)$ と書くことにする。$w(s)=\sum_{j=1,2} b_j(s)\varphi_j + z_\beta(b_1(s),b_2(s),\lambda)$ の成立することに注意しておく。

$\hat{\mathfrak{m}}(x,\lambda)$ の定義から

$$\bigcup_{0\leq s\leq\tau(r,\lambda)} \hat{\mathfrak{m}}(w(s),\lambda)=\bigcup_{0\leq s\leq \tau(r,\lambda)}\Big\{w(s)+\sum_{j=1,2}a_j(z\,;w(s),\lambda)\varphi_j+z : z\in B_{Z_\beta}(d_3)\Big\}$$

$$=\bigcup_{0\leq s\leq \tau(r,\lambda)}\Big\{\sum_{j=1,2}\big(b_j(s)+a_j(z\,;w(s),\lambda)\big)\varphi_j+z+Qw(s) : z\in B_{Z_\beta}(d_3)\Big\}$$

この集合の構造を調べる。

$d_4\equiv \min\{d_3/3,\ K_2K_3^{-1}d_3\}$ とし

$\mathfrak{m}(r,\lambda)\equiv \bigcup_{0\leq s\leq\tau(r,\lambda)}\hat{\mathfrak{m}}(w(s),\lambda)\cap\{x : \|Qx\|<d_4\}$, とおくと

$w(\cdot;r,\lambda)\subset B_{X_\beta}(d_4)$ に対して

$$\mathcal{M}(r,\lambda)=\bigcup_{0\le s\le \tau(r,\lambda)}\Big\{\sum_{j=1,2}\big(b_j(s)+a_j(z-z_\beta(b_1(s),b_2(s),\lambda);w(s)\lambda)\big)\varphi_j+z : z\in B_{Z_\beta}(d_4)\Big\}$$

が成立する。　また各 $z\in B_{Z_\beta}(d_4)$ に対して

$$C(r,\lambda;z)\equiv\{(g_1(s),g_2(s)) : 0\le s\le \tau(r,\lambda)\}$$

但　$g_j(s)=b_j(s)+a_j(z-z_\beta(b_1(s),b_2(s),\lambda);w(s,\lambda))$

とおく。　$\{x: Qx=z\}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視すると $C(r,\lambda;z)$ は $\mathcal{M}(r,\lambda)$ と平面 $\{x: Qx=z\}$ との交わりになっていることに注意しておく。　$\mathcal{M}(r,\lambda)$ と $C(r,\lambda,z)$ の構造は次の命題で与えられる。

<u>命題</u> 4.2.　(i) 各非定常な周期軌道 $w(\cdot;r,\lambda)\subset B_{X_\beta}(d_4)$ に対して $\mathcal{M}(r,\lambda)$ は余次元1の C^0 多様体である。

(ii)　$C(r,\lambda;z)$ は Jordan 閉曲線で $B_{\mathbb{R}^2}(d_3)$ に含まれる。

証明は [8] を参照.

$\mathcal{M}(r,\lambda)$ を周期軌道 $\underbrace{w(\cdot;r,\lambda)}_{(r\neq 0)}$ の安定多様体と呼ぶ。

命題4.2 (ii) が成り立つことから　$\mathcal{M}(r,\lambda)$ の内側, 外側を考えることができる。

<u>定義</u> 4.3.　x　$(\|Px\|<d_3,\ \|Qx\|<d_4)$ が $\mathcal{M}(r,\lambda)$ の内側（外側）にあるとは　$(\langle x,\varphi_1^*\rangle,\langle x,\varphi_2^*\rangle)$ が Jordan 閉曲線 $C(r,\lambda;Qx)$ の内側（外側）にあるときを言う。

$\mathcal{M}(r,\lambda)$ の内側（外側）の点全体を $\mathcal{M}_{in}(r,\lambda)$　($\mathcal{M}_{out}(r,\lambda)$) で表わす。また　$\mathcal{M}(0,\lambda)$,　$\mathcal{M}_{out}(0,\lambda)$ で各々
$\hat{\mathcal{M}}(0,\lambda)\cap\{x: \|Qx\|<d_4\}$,　$\{x: \|Px\|<d_3, \|Qx\|<d_4\}\setminus\hat{\mathcal{M}}(0,\lambda)$
を表わすことにする。

最後に $\mathfrak{M}(r,\lambda)$ の性質を２つの命題で与える。

命題 4.4 λ, $|\lambda|<d_3$, を固定する。$w(\cdot\,;r_1,\lambda)$, $w(\cdot\,;r_2,\lambda)$ を $B_{X_\beta}(d_4)$ に含まれる周期軌道で $0\leq r_1<r_2$ とすると，$\mathfrak{M}(r_1,\lambda)\subset\mathfrak{M}_{in}(r_2,\lambda)$ が成り立つ。

命題 4.5 λ, $|\lambda|<d_3$, を固定する。$w(\cdot\,;r,\lambda)$ を $B_{X_\beta}(d_4)$ に含まれる非定常な周期軌道とする。このとき，もし $x_0\in\mathfrak{M}_{in}(0,\lambda)$ ($x_0\in\mathfrak{M}_{out}(0,\lambda)$) で，ある $\delta>0$ に対して

$$\|Pu(t,x_0,\lambda)\|<d_3,\quad \|Qu(t,x_0,\lambda)\|<d_4,\quad 0\leq t\leq\delta,$$

ならば $u(t,x_0,\lambda)\in\mathfrak{M}_{in}(r,\lambda)$ ($u(t,x_0,\lambda)\in\mathfrak{M}_{out}(0,\lambda)$) $0\leq t\leq\delta$, が成立する。

証明は〔8〕を参照。

§5. 解の漸近挙動

(E)の解の漸近挙動に関する結果を述べる。

定理 5.1 仮定 1, 2 の下で正定数 $d<d_4$ と $0\in X_\beta$ の近傍 U, $V(\lambda)$, $|\lambda|<d$, ($U\subset V(\lambda)$) が存在して以下が成立する。もし $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda)\neq\phi$ ならば $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda)$ は(E)の唯一つの周期軌道 $\gamma(x_0,\lambda)$ ($\{0\}$ のこともあり得る) から成り $u(t,x_0,\lambda)\to\gamma(x_0,\lambda)$, $t\to\infty$ である。

次に問題となるのは，いつ $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda)$ が ϕ でないか，また $x_0 \to \gamma(x_0,\lambda)$ の決定であるが，これらは初期値 x_0 と周期軌道の安定多様体との位置関係及び分岐関数 $p(\cdot,\lambda)$ の挙動によって完全に決定される。まず初期値 x_0 と周期軌道の安定多様体との位置関係を記述するために，次の2つの集合を考える。

$$R_1(x_0,\lambda) \equiv \{ r;\ x_0 \in M_{out}(r,\lambda) \text{ または } x_0 \in M(r,\lambda),\ 0 \le r \le d \},$$

$$R_2(x_0,\lambda) \equiv \{ r;\ x_0 \in M_{in}(r,\lambda) \text{ または } x_0 \in M_i(r,\lambda),\ 0 \le r \le d \}.$$

$R_1(x_0,\lambda) \ni 0$ に注意しておく。また

$$r_1(x_0,\lambda) \equiv \sup_{r \in R_1(x_0,\lambda)} r, \qquad r_2(x_0,\lambda) \equiv \inf_{r \in R_2(x_0,\lambda)} r \quad (R_2(x_0,\lambda) \neq \phi \text{ のとき})$$

とおく。$p(\cdot,\lambda)$ の連続性から $0 \le r_1 \le r_2$, $p(r_j,\lambda) = r_j$, $j=1,2$ が成立する。これらの R_j, r_j を用いると $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda)$ は次のように述べられる。

<u>定理</u> 5.2. d, U, $V(\lambda)$ を定理 5.1 の d, U, $V(\lambda)$ とする。このとき以下のことが成立する。$x_0 \in U$ とする。もし $R_2(x_0,\lambda) \neq \phi$ ならば

(i) $r_1(x_0,\lambda) = r_2(x_0,\lambda)$,

(ii) $p(r,\lambda) < r$, $r_1(x_0,\lambda) < r < r_2(x_0,\lambda)$, または

(iii) $p(r,\lambda) > r$, $r_1(x_0,\lambda) < r < r_2(x_0,\lambda)$

が成立する。もし $R_2(x_0,\lambda) = \phi$ ならば,

(iv) $p(r,\lambda) < r$, $r_1(x_0,\lambda) < r \leq d$, または

(v) $p(r,\lambda) > r$, $r_1(x_0,\lambda) < r \leq d$

が成立する。(i)-(iv) のときには $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda) \neq \phi$ で (v)のときは $\Omega_{U,V(\lambda)}(x_0,\lambda) = \phi$ である。さらに、(i),(ii) (iv) のときには $\gamma(x_0,\lambda) = w(\cdot\,; r_1(x_0,\lambda),\lambda)$, (iii) のときには $\gamma(x_0,\lambda) = w(\cdot\,; r_2(x_0,\lambda),\lambda)$ である。

証明は〔8〕を参照。

Remark. Chafee〔2〕は(1) $\lambda = 0$ のときに定常解 0 が漸近安定である (2) $N(x,\lambda)$ が x に関して Lipschitz 連続である を仮定して 仮定 1 の下で (E) の解の漸近挙動を調べている。彼は解 $u(t,x_0,\lambda)$ が $t \to \infty$ のとき 0 に収束するかまたは C_λ 上の不変集合 $\Omega(\lambda)$ に収束することを示している。また〔3〕で $\Omega(\lambda)$ が唯一つの周期軌道でない例を与えている。また〔3〕で〔2〕と同様な結果を与えている。

分岐定理, 安定性定理については〔6,8〕を参照。また〔1〕,〔4〕も参照.

参考文献

(1) Carr, J., Applications of Centre Manifold Theory, Applied mathematical Sciences 35, Springer-Verlag, (1981).

(2) Chafee, N., The bifurcation of one or more closed orbits from an equilibrium point of an autonomous differential system, Journal of differential equations 4, 661-679, (1968).

(3) Chafee, N., A bifurcation problem for a functional differential equation of finitely retarded type, Journal of mathematical analysis and applications 35, 312-348, (1971)

(4) Hale, J., Topics in Dynamical Bifurcation Theory, C.B.M.S. No 47, A.M.S. (1981)

(5) Henry, D., Geometric Theory of Semilinear parabolic equations, Lecture Notes in Math. 840, Springer-Verlag, (1981).

(6) Itoh, J., 非線形発展方程式の周期解の分岐と安定性, 数理解析研究所講究録 386, 109-128, (1980).

(7) Itoh, J., Bifurcation and stability of stationary solutions of nonlinear evolution equations, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA.

(8) Itoh, J., Bifurcation and stability of periodic

orbits of nonlinear evolution equations, in preparation.

[9] Marsden, J.E. and M. McCracken, The Hopf Bifurcation and its Applications, Applied Mathematical Sciences 19, Springer-Verlag (1976).