数理解析研究所講究録
第464巻 1982年 10-27

10

波動方程式の long-range perturbations

信州大 理　望月 清
筑波大 数　岩下弘一

§1 序　ある long-range perturbed wave equation の，時間を無限大にしたときの解の漸近挙動を調べるのが本稿の目的である（簡単のために，方程式は全空間で考えることにする）。

まず，homogeneous medium における波は，次のダランベール方程式を満たす。

(1.1)
$$\partial_t^2 w(x,t) - c_0^2 \Delta w(x,t) = 0,$$

ここに，$\partial_t = \partial/\partial t$，$\Delta$：Laplacian in $\mathbb{R}^n$ である。Wilcox [7] は，各 $w(x,t)$ に対して，$t \to \infty$ のときに一致する漸近波動関数を，diverging spherical wave として構成し，さらにそれを利用してエネルギーの分布を研究した。

一方，波が伝播する媒質が場所と共に変わる density $\rho(x)$ を持つ場合には，波はもう少し複雑な方程式を満たす：

(1.2)
$$\partial_t^2 w(x,t) - c(x)^2 \rho(x) \nabla \cdot \frac{1}{\rho(x)} \nabla w(x,t) = 0$$

ここに，∇ は $\mathbb{R}^n$ の gradient，velocity $c(x)$ は，$\rho(x)$ の存在により場所と共に変わる。媒質が short-range の場合，即ち，

$$c(x) - c_0 = O(|x|^{-1-\varepsilon}),\quad \rho(x) - \rho_0 = O(|x|^{-1-\varepsilon})$$

$\varepsilon > 0$，as $|x| \to \infty$ の場合には，(1.2) の解 $w(x,t)$ は，$t \to \infty$ のとき漸近的に free なダランベール方程式の解に収束することが知られている（e.g.，Mochizuki [3]，Reed-Simon [6]）。したがって波は，この場合にも diverging spherical wave をなすが，long-range の場合（$-1 < \varepsilon < 0$）には，もはや spherical wave をなさない。

本稿では，$c(x)$，$\rho(x)$ が long-range の場合に，(1.2) の解に対して漸近波動関数を <u>modified diverging spherical wave</u> として構成する（§2）。さらに，(1.2) を一般化し，かつある意味で §2 の係数より緩やかに収束する係数を持つ方程式の解について漸近挙動を調べる（§3）。§3 の結果に基いて，§4 で modified wave operator の存在及び completeness について論ずる。

<u>§2</u>　(1.2) の方程式において，$\rho(x)$ は波の伝播状態

にかかわる本質的な影響を及ぼすわけではないので，簡単のために，$\rho(x)$ を省いた方程式

(2.1) $$\partial_t^2 w(x,t) - c(x)^2 \Delta w(x,t) = 0$$

を考えることにする（$\rho(x)$ を含めたこの section の内容の詳細は，Mochizuki [4] を参照してください）。$c(x)$ に次の仮定を置く。

<u>仮定 2.1</u> $c(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ かつ $\exists C > 1$ s.t. $C^{-1} \leq c(x) \leq C$。さらに，$0 \leq \exists \gamma < 1$，$1/2 < \exists \delta_1 \leq 1$，$(2+\gamma)/4 < \exists \delta_2 \leq 1$ s.t.

$$\liminf_{r \to \infty} \{ \gamma c(x) - r \partial_r c(x) \} \geq 0,$$

$$\partial_r c(x) = O(r^{-1}), \quad \nabla \partial_r c(x) = O(r^{-1-\delta_1}),$$

$$(\nabla - \hat{x} \partial_r) c(x) = O(r^{-1-\delta_2}),$$

$$(\nabla - \hat{x} \partial_r) \cdot (\nabla - \hat{x} \partial_r) c(x) = O(r^{-1-2\delta_2})$$

as $r \to \infty$。ここに，$r = |x|$，$\hat{x} = x/|x|$，$\partial_r = \hat{x} \cdot \nabla$。

<u>注意 2.2</u> 仮定 2.1 は，$c(x)$ として振動するものまで許している。

<u>例 2.3</u> $c_0(x)$ を uniformly positive function で，

$c_0(x) \to c_0$，$\nabla^l c_0(x) = O(r^{-1-|l|\theta})$ $(|l| = 1, 2)$

as $r \to \infty$ for some $1/2 < \rho \leq 1$ とする。このとき関数 $c(x) = c_0(x) + a\sin(\log r)$ ($|a| < c_0$, small) は、$\gamma = |a|(c_0^2 - a^2)^{-1/2}$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \rho$ で仮定を満たす。

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n; c(x)^{-2})$ を norm が

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} c(x)^{-2}|f(x)|^2 dx$$

によって与えられるヒルベルト空間とする。$L = -c(x)^2\Delta$ とおけば、L は $\mathcal{H}$ における positive selfadjoint operator である。このとき、L に対して次のスペクトル表現定理が得られる。

<u>定理 2.4</u>　$\mathcal{H}$ から $L^2(\mathbb{R}_\pm \times S^{n-1})$ (S^{n-1}: $n-1$ 次元単位球面, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$) へのユニタリー作用素 $\mathcal{F}_\pm$ が存在して、$\mathcal{F}_\pm$ は L を対角化し、かつ反転公式 (2.14) が成立する。

証明の概要は主定理を述べたあとに与える。

さて、初期値を $\{w(x,0), \partial_t w(x,0)\} = \{f_1(x), f_2(x)\} \in \mathcal{H} \times \overline{D}(L^{-1/2})$ とする。ここに、$\overline{D}(L^{-1/2})$ は $D(L^{-1/2})$ の norm $\|L^{-1/2}f\|$ による completion を表わし、$\overline{L^{-1/2}}$ で $L^{-1/2}$ の $\overline{D}(L^{-1/2})$ への拡張を表わす。(2.1) の L^2-solution を

$$(2.2)\qquad w(\cdot,t)=\frac{1}{2}\exp(-iL^{1/2}t)(f_1+i\overline{L^{-1/2}}f_2)+\frac{1}{2}\exp(iL^{1/2}t)(f_1-i\overline{L^{-1/2}}f_2)$$

と定義する。このとき，この section における次の主定理を得る。

<u>定理 2.5</u>

$$\lim_{t\to\infty}\|w(\cdot,t)-w^{\infty}(\cdot,t)\|_{\mathcal{H}}=0。$$

ここに，漸近波動関数 $w^{\infty}(x,t)$ は次のように表わされる。

$$(2.3)\qquad w^{\infty}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c(x)}\,r^{-\frac{n-1}{2}}F(\xi(x)-t,\tilde{x})$$

$$(2.4)\qquad \xi(x)=\int_0^r c(s\tilde{x})^{-1}ds$$

wave profile $F(s,\tilde{x})$, $s\in\mathbb{R}$ は，初期値の一般化された Radon 変換である：

$$(2.5)\qquad F(s,\tilde{x})=\frac{-i}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}_+}e^{i\sigma s}[\mathcal{F}_+(f_1+i\overline{L^{-1/2}}f_2)](\sigma,\tilde{x})\,d\sigma+\frac{-i}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}_-}e^{i\sigma s}[\mathcal{F}_-(f_1-i\overline{L^{-1/2}}f_2)](\sigma,\tilde{x})\,d\sigma.$$

homogeneous 及び short-range の場合，$\xi(x)=|x|$ とできるが，(2.3 と 4) は modified diverging spherical wave を表わしている。

<u>定理 2.4 の証明の概要</u>　(2.1) に付随した次の定常問題を考える：

$$(2.6)\qquad -\Delta u-\kappa^2c(x)^{-2}u=c(x)^{-2}f$$

ここに，$\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$\mathrm{Im}\,\kappa \geq 0$，$f$はある weighted L^2-space に属するものとする。$c(x)$は，振動する場合も含んでいるので通常の radiation condition は適せず次のように改良しておく（cf. Mochizuki-Uchiyama [5]）。関数 $\rho(x,\kappa)$を

(2.7) $$\rho(x,\kappa) = -i\kappa\xi(x) + \frac{n-1}{2}\log r - \frac{1}{2}\log c(x)$$

と定義し，$k(x,\kappa) = \partial_r \rho(x,\kappa)$ とおく。$\rho(x,\kappa)$は，$k = k(x,\kappa)$が次の Riccati 型方程式を満たすように構成されたものである：

$$\partial_r k + \frac{n-1}{r} k - k^2 - \kappa^2 c(x)^{-2} = O(r^{-1-\delta})$$

as $r \to \infty$。ここに，$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 1/2$。こうして(2.0)に対して次の radiation condition を置く。

(2.8) $$u \in L^2_{\frac{-1-\alpha}{2}}, \quad (\partial_r + k(x,\kappa))u \in L^2_{\frac{-1+\beta}{2}},$$
$$0 < \alpha \leq \beta \leq 1, \quad \gamma < \beta, \quad \alpha + \beta \leq 2\delta.$$

ここに，$\nu \in \mathbb{R}$ に対して，

$$u \in L^2_\nu \underset{def}{\Longleftrightarrow} (1+|x|^2)^{\nu/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

である。このとき極限吸収の原理が証明できる。

命題 2.6　$R(\kappa) = (L - \kappa^2)^{-1}$ とおく。このとき，

$$\exists \ \mathrm{strong}\lim_{\mathrm{Im}\,\kappa \downarrow 0} R(\kappa) = R(\sigma) \in B(L^2_{\frac{1+\beta}{2}}, L^2_{\frac{-1-\alpha}{2}})$$

ここに，$\sigma = \mathrm{Re}\,k$，$B(L^2_{\frac{1+\beta}{2}}, L^2_{-\frac{1+\alpha}{2}})$ は $L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ から $L^2_{-\frac{1+\alpha}{2}}$ への有界作用素の集合を表わす。$R(\sigma)f$，$f \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ は radiation condition を満たす (2.1) の解である。$\{\mathcal{E}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ を L のスペクトル測度とすれば，任意のコンパクト集合 $e \subset\subset \mathbb{R}_+$，$f, g \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に対して，

$$(\mathcal{E}(e)f, g) = \frac{1}{\pi i}\int_{\pm\sqrt{e}} ((R(\sigma) - R(-\sigma))f, g)\sigma\, d\sigma$$

が成立する。ここに，$\pm\sqrt{e} = \{\sigma \in \mathbb{R}_\pm ; \sigma^2 \in e\}$。

$\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$f \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に対して

(2.9) $$[\mathcal{F}(\sigma, r)f](\tilde{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \exp\{\rho(r\tilde{x}, \sigma)\}[R(\sigma)f](r\tilde{x})$$

と置く。命題 2.6 から次の結果が得られる。

<u>命題 2.7</u>　(i)　$(f, \sigma) \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$，$u = R(\sigma)f$ とする。このとき，$^{\exists} r_l = r_l(\alpha, \beta, f, \sigma) \to \infty$ as $l \to \infty$ s.t.

(2.10) $$\lim_{l\to\infty}\int_{|x|=r_l}\{r^{-\alpha}|u|^2 + r^{\beta}|(\nabla + \tilde{x}k)u|^2\}\,dS = 0.$$

さらに

$$\lim_{l\to\infty}\int_{S^{n-1}} |\mathcal{F}(\sigma, r_l)f|^2\, dS = \frac{\sigma}{\pi i}((R(\sigma) - R(-\sigma))f, f)。$$

(ii)　$f \in L^2_1$，$r_l = r_l(\alpha, 1, f, \sigma)$ とする。このとき，

(2.11) $$^{\exists}\text{strong}\lim_{l\to\infty} \mathcal{F}(\sigma, r_l)f = \mathcal{F}(\sigma)f \quad \text{in } L^2(S^{n-1}).$$

$\mathcal{F}(\sigma)$ は，$\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に連続的に依存する L^2_1 から $L^2(S^{n-1})$

への有界作用素。さらに，$L^2_{\frac{1+\delta}{2}}$ から $L^2(S^{n-1})$ への有界作用素に拡張できる。

命題 2·7 から

(2·12) $\qquad [\mathcal{F}_\pm f](\sigma, \tilde{x}) = [\mathcal{F}(\sigma) f](\tilde{x}) \quad \text{for} \ (\sigma, \tilde{x}) \in \mathbb{R}_\pm \times S^{n-1}$

と定義すれば，$\mathcal{F}_\pm$ は $\mathcal{H}$ から $L^2(\mathbb{R}_\pm \times S^{n-1})$ への

(2·13) $\qquad [\mathcal{F}_\pm L f](\sigma, \tilde{x}) = \sigma^2 [\mathcal{F}_\pm f](\sigma, \tilde{x})$

を満たすユニタリー作用素に拡張できる。さらに次の反転公式が容易に証明できる：

(2·14)
$$a(L) f = \mathcal{F}_\pm^* a(\sigma^2) \mathcal{F}_\pm f = s\text{-}\lim_{N \to \infty} \int_{e_{\pm N}} \mathcal{F}(\sigma)^* a(\sigma^2) [\mathcal{F}_\pm f](\sigma, \cdot)\, d\sigma$$

ここに，$a(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の任意の bounded Borel function，$e_N = [1/N, N]$，$e_{-N} = [-N, -1/N]$。

定理 2·4 の証明終り。

<u>定理 2·5 の証明の概略</u> (2·2) と反転公式 (2·14) によって $w(x, t)$ は次のように表現できる。

$$w(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, s\text{-}\lim_{N, N' \to \infty} \int_{e_{-N'} \cup e_N} e^{-i\sigma t} \mathcal{F}(\sigma)^* \tilde{f}(\sigma, \cdot)\, d\sigma$$

ここに，

(2·15)
$$\tilde{f}(\sigma, \tilde{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{F}_+ (f_1 + i\overline{L^{-1/2} f_2})](\sigma, \tilde{x}), & (\sigma, \tilde{x}) \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{F}_- (f_1 - i\overline{L^{-1/2} f_2})](\sigma, \tilde{x}), & (\sigma, \tilde{x}) \in \mathbb{R}_- \times S^{n-1}。 \end{cases}$$

$\mathcal{H}\times\bar{D}(L^{-1/2})\ni\{f_1, f_2\}\longrightarrow\tilde{f}\in L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})$ はユニタリーである。さて、$\mathcal{F}(\sigma)^*\tilde{f}(\sigma,\tilde{x})$ の表現を調べる。いま $\tilde{f}$ を、$\tilde{f}\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times S^{n-1})$ かつ $\sigma=0$ の近傍でゼロとする。この $\tilde{f}$ に対して次の関数を定義する。

$$v_{\tilde{f}}(x,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\rho(x,\sigma))\tilde{f}(\sigma,\tilde{x})\psi(\xi(x)),$$

$$g_{\tilde{f}}(x,\sigma)=\{-c(x)^2\Delta-\sigma^2\}v_{\tilde{f}}(x,\sigma)。$$

ここに、$\psi(s)$, $s\in\mathbb{R}$ は適当な cutoff function。このとき、$v_{\tilde{f}}(\cdot,\sigma)=R(\sigma)g_{\tilde{f}}(\cdot,\sigma)$ が成立することに注意せよ。

補題 2.8

$$(2.16)\qquad \mathcal{F}(\sigma)^*\tilde{f}(\sigma,\cdot)=-iv_{\tilde{f}}+iR(-\sigma)g_{\tilde{f}}$$

補題2.8 の証明　任意の $(h,\sigma)\in L^2_{\frac{1+\delta}{2}}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ に対して $u=R(\sigma)h$ とおく。これに対して (2.10)を満たす列 $\{r_\ell\}$ をとる。Green の公式を用いて

$$-i\{(u,g_{\tilde{f}})-(h,v_{\tilde{f}})\}$$

$$=\lim_{\ell\to\infty}(\mathcal{F}(\sigma,r_\ell)h,\tilde{f})_{L^2(S^{n-1})}=(\mathcal{F}(\sigma)h,\tilde{f})$$

を得る。これより (2.16) が導びかれる。　　q.e.d.

補題 2.8により

$$w(x,t)=w^\infty(x,t)+g_{\tilde{f}}(x,t)$$

と書ける。ここに

$$w^{\infty}(x,t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \int_{R} e^{-i\sigma t}\, v_{\tilde{f}}(x,\sigma)\, d\sigma$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c(x)}\, r^{-\frac{n-1}{2}} F(\xi(x)-t, \tilde{x}),$$
$$g_{\tilde{f}}(x,t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \int_{R} e^{-i\sigma t}\, R(-\sigma)\, g_{\tilde{f}}(\cdot,\sigma)\, d\sigma.$$

w^{∞}を一般の$\{f_1, f_2\} \in \mathcal{H} \times \overline{D}(L^{-1/2})$に対して定義しよう。

Parseval の等式により

$$\iint_{R\times S^{n-1}} |F(s,\tilde{x})|^2 ds\, dS_{\tilde{x}} = \|\hat{f}\|^2_{L^2(R\times S^{n-1})}$$
$$= \|f_1\|^2_{\mathcal{H}} + \|L^{-1/2} f_2\|^2_{\mathcal{H}}.$$

これより $\{f_1, f_2\} \longrightarrow F$ はユニタリーで，$\hat{f}$ が compact support を持ち，$\sigma=0$ の近傍でゼロとなるような$\{f_1, f_2\}$は$\mathcal{H} \times \overline{D}(L^{-1/2})$で dense より，任意の$\{f_1, f_2\} \in \mathcal{H} \times \overline{D}(L^{-1/2})$に対して$w^{\infty}$が定義できる。compact support を持つ$\hat{f}$に対して，stationary phase method によって，

$$\| g_{\tilde{f}}(\cdot,t) \| \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

が証明できる。$\|w^{\infty}(\cdot,t)\|$ が $t \in R$ について単調増加で，

$$\lim_{t\to\infty} \|w^{\infty}(\cdot,t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \|f_1\|^2 + \|L^{-1/2} f_2\|^2 \}^{1/2}$$

が成立することに注意すれば，density arguments によって

$$\| w(\cdot,t) - w^{\infty}(\cdot,t) \|_{\mathcal{H}} \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

が証明できる。

定理 2.5 の証明終り。

さて，エネルギー $E(w, R^n, t)$を

$$E(w, R^n, t) = \|\partial_t w(\cdot, t)\|^2 + \|L^{1/2} w(\cdot, t)\|^2$$

で定義し，$\partial_t w$，$L^{1/2} w$ に対して上の方法で漸近波動関数を構成すれば，Wilcox [7] の結果が方程式 (2.1) に対して拡張できる。

§3. このsectionでは，次の方程式の解 $w(x, t)$ に対して漸近波動関数を構成する（詳細は Iwashita [2] 参照）。

(3.1) $$\partial_t^2 w(x, t) - \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a_{jk}(x) \partial_k w(x, t) = 0,$$

ここに，$\partial_j = \partial/\partial x_j$。係数 $a_{jk}(x)$ に対して次の仮定を置く。

仮定 3.1 行列 $A = A(x) = (a_{jk}(x))_{1 \le j, k \le n}$ は，real symmetric かつ uniformly positive。$0 < {}^{\exists}\delta \le 1/2$ s.t. クロネッカーデルタ δ_{jk} に対して，

$$\nabla^l (a_{jk}(x) - \delta_{jk}) = O(r^{-|l|-\delta}) \quad (|l| = 0, 1, 2, \cdots)。$$

さて $L = -\sum_{j,k} \partial_j a_{jk}(x) \partial_k$ とおけば，L は $L^2(R^n)$ において positive selfadjoint operator を定める。$\mathcal{F}_\pm$ を L のスペクトル表現を定める L^2 から $L^2(R_\pm \times S^{n-1})$ へのユニタリー作用素とすれば，次の結果を得る。

定理 3.2 初期値 $\{w(x, 0), \partial_t w(x, 0)\} = \{f_1(x), f_2(x)\}$ に

対して，方程式 (3.1) に対応する漸近波動関数 $w^\infty(x,t)$ は，

$$(3.2)\qquad w^\infty(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi(\xi(x))\,(\partial_r\xi(x))^{1/2}\,r^{-\frac{n-1}{2}}\,F(\xi(x)-t,\hat{x})$$

と決定される。ここに，$\xi(x) = \int_0^r \eta(s\hat{x})\,ds$。関数 $\eta(x)$ は次のとおりである。$\Phi(x) = \hat{x}\cdot A(x)\hat{x}$ として，$\gamma(x)$ を

$$(3.3)\qquad 2\Phi(x)^{-1/2}\hat{x}\cdot\left\{\int_0^r \nabla\Phi(s\hat{x})^{-1/2}ds + \nabla\gamma(x)\right\} -$$
$$-\left\{\int_0^r \nabla\Phi(s\hat{x})^{-1/2}ds - \nabla\gamma(x)\right\}\cdot A(x)\left\{\int_0^r \nabla\Phi(s\hat{x})^{-1/2}ds - \nabla\gamma(x)\right\} = 0$$

の $r\to\infty$ のときのある近似解とする。$\eta(x)$ は $\Phi(x)^{-1/2} - \partial_r\gamma(x)$ を適切に C^∞ に cutoff した関数である。$\psi(r)$ はある cutoff function で，wave profile $F(s,\hat{x})$ は，定理 2.5 の (2.5) と同様にして定義される。

<u>注意 3.3</u>　漸近波動関数の定義において，$(\partial_r\xi(x))^{1/2}$ は $\Phi(x)^{-1/4}$ で置き換えて構成できるが，$(\partial_r\xi(x))^{1/2}$ を導入したのは，エネルギーの分布を調べる際に，変数変換によって Wilcox [7] の方法に帰着するためである。

<u>注意 3.4</u>　(3.1) が (2.1) よりある意味でより緩やかに収束する係数を持つと述べたのは，次の理由からである。いま (3.2) の phase $\xi(x)$ は，r：十分大では $\int_0^r \Phi(s\hat{x})^{-1/2}ds - \gamma(x)$ にほぼ等しく，また，$\gamma(x) = O(r^{1-2\delta})$ as $r\to\infty$ である。従って $\delta > 1/2$ のときには，$\xi(x) = \int_0^r \Phi(s\hat{x})^{-1/2}ds$ と

定義することができ，これはちょうど§2での phase に対応している。上の modification $\gamma(x)$ は，L のスペクトル表現から導びかれるものである。

さて，L に対するスペクトル表現をうまく作っておけば，§2と同様な議論が展開できるので，ここでは，L のスペクトル表現の構成についてのみ述べておこう。

$\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Im}\kappa \geq 0$ に対して定常問題

(3.4) $$Lu - \kappa^2 u = f$$

を考える。これに対して，次のようにして radiation condition を定める。関数 $\rho(x,\kappa)$ を方程式

$$\{-\nabla\cdot A\nabla - \kappa^2\} e^{\rho(x,\kappa)} = 0$$

即ち

(3.5) $$\kappa^2 + \nabla\rho\cdot A\nabla\rho - \nabla\cdot A\nabla\rho = 0$$

のよい近似解となるように決定したい。そこで

(3.6) $$\rho(x,\kappa) = -i\kappa\xi(x) + \frac{n-1}{2}\log r - \frac{1}{2}\log \partial_r \xi(x)$$

(3.7) $$\xi(x) = \int_0^r \Phi(s\hat{x})^{-1/2} ds - \gamma(x)$$

とおいて，modifier $\gamma(x)$ を決定するのであるが，この際 $\gamma(x)$ は (3.3) を漸近的に満たすように構成すればよいことがわかる。$\gamma_0(x) = 0$ と置き，$\gamma_j(x)$ を次のようにして定める。

$$\Upsilon_j(x) = \int_0^r \Big[\frac{\Phi(s\tilde{x})^{1/2}}{2} \Big\{ \int_0^s \nabla\Phi(t\tilde{x})^{-1/2} dt - (\nabla\Upsilon_{j-1})(s\tilde{x}) \Big\} \cdot A(s\tilde{x})$$

$$\times \Big\{ \int_0^s \nabla\Phi(t\tilde{x})^{-1/2} dt - (\nabla\Upsilon_{j-1})(s\tilde{x}) \Big\} +$$

$$+ \tilde{x}\cdot(A(s\tilde{x}) - I) \Big\{ \int_0^s \nabla\Phi(t\tilde{x})^{-1/2} dt - (\nabla\Upsilon_{j-1})(s\tilde{x}) \Big\} \Big] ds$$

$$+ \phi_j(\tilde{x})\chi(x)$$

ここに

$$\phi_j(\tilde{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } (j+1)\delta < 1 \\ \phi_{j-1}(\tilde{x}) - \int_0^\infty B_{j-1}(s\tilde{x})\, ds & \text{if } (j+1)\delta > 1 \end{cases}$$

$$B_j(x) = \Big[\tilde{x}\cdot(I - A) + \frac{\Phi(x)^{1/2}}{2} \Big\{ -2\int_0^r \nabla\Phi(s\tilde{x})^{-1/2} ds \cdot A +$$

$$+ (\nabla\Upsilon_j + \nabla\Upsilon_{j-1})\cdot A \Big\} \Big] (\nabla\Upsilon_j - \nabla\Upsilon_{j-1})$$

$\chi(x) \in C^\infty(R^n)$ は，原点の近傍でゼロとなる cutoff function である。$(j_0 + 2)\delta \geq 2$ なる最小の整数 j_0 を取り，$\Upsilon(x) = \Upsilon_{j_0}(x)$ とおけば，$\Upsilon(x)$ は，

$$\nabla^l \Upsilon(x) = O(r^{1-|l|-2\delta}) \quad (|l| = 0, 1, \cdots)$$

かつ (3.3) を order r^{-2} で満たす。$\xi(x)$ を定理 3.2 のように修正し，こうして得られた $\rho(x,k)$ を用いて radiation condition を

(3.8) $\quad u \in L^2_{\frac{-1-\alpha}{2}}, \quad \tilde{x}\cdot A(\nabla + \nabla\rho(x,k))u \in L^2_{\frac{-1+\beta}{2}},$

$\quad 0 < \alpha \leq 3, \quad \alpha + \beta < 2,$

と置く。§2での $\tilde{x}$ を $\tilde{x}(x,\kappa)$ と比べると，$\nabla\rho(x,\kappa)$ は，x の方向による u の挙動の変化を細かく規定しているといえる。

この radiation condition の下に，極限吸収の原理が成立する。$R(\kappa)=(L-\kappa^2)^{-1}$, $u=R(\sigma)f$, $(\sigma,f)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times L^2_{\frac{1+\varepsilon}{2}}$ と置く。このときある列 $r_\ell=r_\ell(\alpha,\beta,\sigma,f)\to\infty$ as $\ell\to\infty$ が存在して

(3.9) $$\lim_{\ell\to\infty}\int_{|x|=r_\ell}\{r^{-\alpha}|u|^2+r^{\beta}|(\nabla+\nabla\rho(x,\sigma))u|^2\}dS=0$$

を満たす。$f\in L^2_{\frac{1+\varepsilon}{2}}$ に対して

(3.10) $$[\mathcal{F}(\sigma,r)f](\tilde{x})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma\exp(\rho(r\tilde{x},\sigma))[R(\sigma)f](r\tilde{x})$$

と置く。(3.8)を満たし，さらに $\beta_0>\alpha_0+2(1-\delta)\ (>1)$ を満たす α_0, β_0 を取ると，$r_\ell=r_\ell(\alpha_0,\beta_0,\sigma,f)$ に対して，

(3.11) $$\exists\,\text{strong}\lim_{\ell\to\infty}\mathcal{F}(\sigma,r_\ell)f=\mathcal{F}(\sigma)f\quad\text{in } L^2(S^{n-1})$$

かつ，$\mathcal{F}(\sigma):L^2_{\frac{1+\beta_0}{2}}\longrightarrow L^2(S^{n-1})$ bounded が証明できる。さらに，$L^2_{\frac{1+\varepsilon}{2}}$ からの作用素に拡張できる。

(3.12) $$[\mathcal{F}_\pm f](\sigma,\tilde{x})=[\mathcal{F}(\sigma)f](\tilde{x})\quad\sigma\in\mathbb{R}_\pm$$

とおけば，$\mathcal{F}_\pm$ は L^2 から $L^2(\mathbb{R}_\pm\times S^{n-1})$ へのユニタリー作用素に拡張でき，L のスペクトル表現を与える。

§4　この section では，方程式(3.1)に対応する L^2-norm における modified wave operator の存在とその完全性について述べる（cf. Ikebe - Isozaki [1]）。

まず, $w^\infty(x,t)$ を L^2-Fourier変換する。

$$[F_0 w^\infty(\cdot,t)](\xi) = I_+ + I_-$$

ここに, F_0 は Fourier 変換で,

$$I_\pm = (2\pi)^{-(n+1)/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}_\pm} e^{-i(x\xi+\sigma t-K(x,\sigma))}\psi(\xi(x))(\partial_r\xi(x))^{1/2}\times$$

$$\times\, r^{-\frac{n-1}{2}}\frac{1}{2}[\mathcal{F}_\pm(f_1\pm i\overline{L^{-1/2}f_2})](\sigma,\hat{x})\,d\sigma\,dx,$$

$K(x,\sigma) = \sigma\,\xi(x)$ 。

I_+ を stationary phase method を使って展開し, さらにそれを逆 Fourier 変換する。その際, critical point における phase function を表現するのに次の補題を用いる。

<u>補題4.1</u>　次の性質を満たす $x(\xi,t),\ \sigma(\xi,t)\in C^\infty((\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathbb{R}_+)$ が存在する。$\forall$ compact $B\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\exists T>0$, $\exists C>0$ s.t. $\xi\in B$, $t>T$

$$\xi = \frac{\partial K}{\partial x}(x(\xi,t),\sigma(\xi,t)),\quad t=\frac{\partial K}{\partial\sigma}(x(\xi,t),\sigma(\xi,t)),$$

$$|x(\xi,t)-t\xi/|\xi||\le C(1+t)^{1-\delta},$$

$$|\sigma(\xi,t)-|\xi||\le C(1+t)^{-\delta}.$$

$K(x,\sigma)$ の形より, $\sigma(\xi,t)=|\xi|$ とすることができる。

<u>定義4.2</u>　補題4.1 の $x(\xi,t)$, $\sigma(\xi,t)$ に対して,

$$W(\xi,t) = x(\xi,t)\xi + \sigma(\xi,t)t - K(x(\xi,t),\sigma(\xi,t)) \tag{4.1}$$

$$= t|\xi| + x(\xi,t)\cdot\xi - K(x(\xi,t), |\xi|)$$

と定義する。

定義 4.2 において定められた $W(\xi,t)$ は，$\xi \in$ compact set $\subset R^n \setminus \{0\}$ のとき

(4.2) $\qquad \xi \cdot A(\partial W/\partial\xi)\xi - (\partial W/\partial t)^2 = 0$

の $t\to\infty$ のときの近似解となっている。I_- に対しても同様な操作をすることによって次の等式を得る。

(4.3) $$\lim_{t\to\infty} \| w^\infty(x,t) - (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{i(x\xi - W(\xi,t))} i^{-1} e^{i(n-1)\pi/4} \times$$

$$\times |\xi|^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2}[\mathcal{F}_+(f_1 + iL^{-1/2}f_2)](|\xi|, \xi/|\xi|)\,d\xi$$

$$-(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{i(x\xi + W(-\xi,t))} i^{-1} e^{-i(n-1)\pi/4} |\xi|^{-\frac{n-1}{2}} \times$$

$$\times \frac{1}{2}[\mathcal{F}_-(f_1 - iL^{-1/2}f_2)](-|\xi|, -\xi/|\xi|)\,d\xi \|_{L^2(R^n_x)} = 0$$

<u>定義 4.3</u> $\qquad u \in L^2$ に対して

(4.4) $\quad (F_\pm u)(\xi) = i^{-1} e^{\pm i(n-1)\pi/4} |\xi|^{-\frac{n-1}{2}} [\mathcal{F}_\pm u](\pm|\xi|, \pm\xi/|\xi|)$

とおく。このとき，$F_\pm$ は，L^2 から L^2 へのユニタリー作用素となる。

(4.3 & 4) 及び w^∞ が $w(x,t)$ の漸近波動関数であることから，次の定理を得る。

定理4.4

$$\Omega_{\mp} = \text{strong} \lim_{t\to\pm\infty} e^{iL^{1/2}t} e^{-iW_t^{\pm}} = F_{\pm}^{*} F_0$$

ここに, $W_t^{\pm} = F_0^{*} W^{\pm}(\xi, t) \cdot F_0$, $W^{\pm}(\xi, t) = \pm W(\pm\xi, \pm t)$ for $t \in R_{\pm}$。これより, modified wave operators が存在して, その完全性がいえる。

注意4.5　エネルギーノルムにおいても modified wave operators が構成でき, 完全性も証明できる。

文 献 表

[1] Ikebe, T. and H. Isozaki, A stationary approach to the existence and completeness of long-range wave operators, to appear.

[2] Iwashita, H., Spectral representations and asymptotic wave functions for long-range perturbations of the d'Alembert equation, preprint.

[3] Mochizuki, K., Spectral and scattering theory for second order elliptic differential operators in an exterior domain, Lecture Note Univ. Utah, Winter and Spring, 1972.

[4] Mochizuki, K., Asymptotic wave functions and energy distributions for long-range perturbations of the d'Alembert equation, J. Math. Soc. Japan 34 (1982), 143-171.

[5] Mochizuki, K. and J. Uchiyama, Radiation conditions and spectral theory for 2-body Schrödinger operators with "oscillating" long-range potentials, I, J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), 377-408.

[6] Reed, M. and B. Simon, The scattering of classical waves from inhomogeneous media, Math. Z., 155 (1977), 163-180.

[7] Wilcox, C. H., Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains, Lecture Notes in Math., 442, Springer, Berlin-Heidelberk-New York, 1975.