数理解析研究所講究録
第464巻 1982年 40-45

Schrödinger 方程式の解の時間無限大での漸近展開

都立大 理数　　村田 實

Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = (-\Delta + V)u & \text{in } (0,\infty)\times R^3 \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の解の $t\to\infty$ での漸近公式を与えるのが本稿の目的である。

<u>仮定</u> (i) V は $L_2(R^3)$ における閉作用素であって，次の条件を満たす：$D(V)\supset H^2$, $\mathrm{Im}\,(Vu,u)\leqq 0$ for any $u\in H^2$。但し H^2 は2階のソボレフ空間。

(ii) $m'<1$ と $\rho>3$ が存在して次の条件を満たす：V and V^* are compact operators in $B(m',s;0,\rho+s)$ for any $s\in R^1$。但し $B(m',s;0,\rho+s)$ は $H^{m',s}$ から $H^{0,\rho+s}$ への有界線形作用素全体のなす Banach 空間であり，$H^{\sigma,s}\equiv\{f\,;\,\langle x\rangle^s\langle D\rangle^\sigma f\in L_2(R^3)\}$, $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{\frac12}$。

この仮定のもとで $L_2(R^3)$ における極大消散作用素 $-iA$ を，$-iAu=-i(-\Delta+V)u$, $u\in D(A)\equiv H^2$ で定義する。

__定理__　$\frac{1}{2} < \sigma < \frac{\rho}{2} - 1$, $s > 2\sigma - 1$ とする。このとき

$$e^{-itA} = \sum_{\lambda} e^{-it\lambda} P_\lambda + \sum_{j=0}^{[\sigma-\frac{1}{2}]} t^{-(j+\frac{1}{2})} C_j + o(t^{-\sigma})$$

$$\text{as } t \to \infty \quad \text{in } B(0,s;0,-s)。$$

但し $b<0$ のとき $\sum_{j=0}^{b} \cdots = 0$ とする。ここで λ は A の実固有値，P_λ は λ に付随する直交射影作用素，C_j は以下の様にして決められる退化作用素である。

$$C_0 = i(\pi i)^{-\frac{1}{2}}(Q_0 - P_0 V F_1 V P_0)$$

$$Q_0 = \begin{cases} \langle \cdot, \psi_* \rangle \psi, & \text{共鳴状態 } \psi, \psi_* \text{ が存在するとき} \\ 0, & \quad〃 \quad \text{が存在しないとき} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi, \psi_* \in \bigcap_{s<-1/2} H^{2,s}, \quad A\psi = A^*\psi_* = 0 \\ \int V\psi\, dx \cdot \overline{\int V^* \psi_*\, dx} = -4\pi i \end{array} \right)$$

$$F_1 g(x) = \frac{i^3}{4\pi\, 3!} \int |x-y|^2 g(y)\, dy$$

$$C_j = \pi^{-1}(-i)^{j-\frac{1}{2}} \Gamma(j+\tfrac{1}{2}) B_{2j-1}, \quad j \geq 1$$

$\Gamma(z)$ はガンマ関数，B_{2j-1} は $R(z) \equiv (A-z)^{-1}$ の $z \to 0$ での形式的級数展開の $z^{j-1/2}$ の係数。

$$R(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \left[- S(z)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{\frac{1}{2}+k} F_k V + \sum_{k=2}^{\infty} z^k G_k V \right) \right]^j$$

$$\times S(z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{\frac{1}{2}+k} F_k + z^k G_k \right)$$

$$F_k h(x) = \int \frac{i^{2k+1} |x-y|^{2k}}{4\pi (2k+1)!} h(y)\, dy$$

$$G_k h(x) = \int \frac{i^{2k} |x-y|^{2k-1}}{4\pi (2k)!} h(y)\, dy$$

$$S(z)^{-1} = z^{-1} P_0 V + z^{-\frac{1}{2}} Q_0 V + K_0$$

$$- \left[1 + z^{\frac{1}{2}} (K_0 F_0 V + Q_0 V G_1 V) + z K_0 G_1 V \right]^{-1}$$

$$\times \left[z^{\frac{1}{2}} (K_0 F_0 V K_0 + Q_0 V G_1 V K_0 + K_0 G_1 V Q_0 V) + z K_0 G_1 V K_0 \right]$$

$$\begin{cases} (1+G_0 V) K_0 + F_0 V Q_0 V + G_1 V P_0 V = 1 \\ K_0 (1+G_0 V) + Q_0 V F_0 V + P_0 V G_1 V = 1 \end{cases}$$

$$\text{in } H^{2,-s}, \quad \frac{5}{2} < s < \rho - \frac{5}{2}.$$

証明の概略

(1) $\rho > 5$ のとき。

(I) $R(z)$ の $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, $z \to 0$ での $B(0,s;2,-s)$ にお

ける漸近公式を以下の手順で求める。

(1) $R_0(z) \equiv (-\Delta - z)^{-1} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (z^{\frac{1}{2}+k} F_k + z^k G_k)$

(2) $1 + R_0(z)V = 1 + G_0 V + z^{\frac{1}{2}} F_0 V + z G_1 V + o(z)$

$$\equiv S(z) + \tilde{R}_0(z)$$

と分解して，$S(z)^{-1}$ を求める。その際，評価

$\|R(z)\|_{L_2 \to L_2} \leqq 1/\mathrm{Im}\, z$, $\mathrm{Im}\, z > 0$

が基本的仮定として用いられる。

(3) $(1 + R_0(z)V)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[- S(z)^{-1} \tilde{R}_0(z) V \right]^j S(z)^{-1}$。

$S(z)^{-1} = O(z^{-1})$ 故この級数は収束する。

(4) $R(z) = (1 + R_0(z)V)^{-1} R_0(z)$。

(II) $R^1 \setminus (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, での $R(\lambda + i0)$ の性質を調べる。

(III) $e^{-itA} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-it\lambda} R(\lambda + i0)\, d\lambda$。

(ロ) $\rho \leqq 5$ のとき。

$N \gg 1$ として，$A_N = A_0 + \chi_N V \chi_N$,

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geqq N+1 \\ 0, & |x| \leqq N \end{cases}$$

とおく。$(A_N - z)^{-1}$ の $z \to 0$ での漸近公式を $R_0(z)$

と類似の形で求め，これを(イ)における $R_0(z)$ とみなして(イ)と同じ計算をする。最後に得られた公式のなかの助変数 $N \to \infty$ とする。

注意

1° e^{-itA} が t について R^1 で可積分になるための必要かつ十分条件は，$P_0 = Q_0 = 0$ である。

2° $L_2(R^n)$, $n \neq 3$, における作用素 $A = -\Delta + V$ に対しては

$$e^{-itA} = \begin{cases} t^{2-\frac{n}{2}} C + \cdots, & n \geqq 5 \\ t^{-\frac{1}{2}} C + \cdots, & n = 1 \\ (\log t)^{-1} C + \cdots, & n = 2, 4. \end{cases}$$

3° m 階楕円型作用素 $A = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x) D^\alpha = p(D) + \sum_{|\alpha| \leqq m} q_\alpha(x) D^\alpha$ に対しても，(イ)～(ハ)のもとで類似公式が成立。

(イ) $q_\alpha(x)$ に対する $|x| \to \infty$ での減衰条件。

(ロ) $\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ を Hamiltonian とする古典軌道に対する nontrapping 条件。

(ハ) $\det [\partial_j \partial_k p(\xi)] \neq 0$ on $\{\xi ; \nabla p(\xi) = 0\}$。

4° ここで使われた方法で放物型，双曲型方程式を扱える。

参考文献

S. Steinberg, Local time decay for solutions of the Schrödinger equation and the wave equation, Arch. Rational Mech. Analysis, 54 (1974).

M. Murata, Rate of decay of local energy and spectral properties of elliptic operators, Japanese J. Math., 6 (1980).

A. Jensen & T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, Duke Math. J., 46 (1979).

A. Jensen, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions. Results in $L_2(R^m)$, $m \geqq 5$; Results in $L_2(R^4)$, Duke Math. J., 47 (1980); to appear.

M. Murata, Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations, to appear.
(本稿はこの論文にもとづいている。)