数理解析研究所講究録
第 464 巻 1982 年 46-60

Scattering and spectral theory for the linear Boltzmann operator

京大 理学部 　 椹田登美男

§1. 仮定と問題提起

線形 Boltzmann 方程式（輸送方程式）

$$(1.1)\quad \frac{d}{dt}n(x,v,t) = -v\cdot\nabla_x n(x,v,t) + \int k(x,v',v)n(x,v',t)dv' - \sigma_a(x,v)n(x,v,t)$$

$$x, v \in \mathbb{R}^3, \quad t\in\mathbb{R}$$

を考えよう．ここで，$\nabla_x = \mathrm{grad}_x$ である．この方程式は中性子集団の状態の時間的変化を相空間において記述するものである。$n(x,v,t)$ は時刻 t での中性子集団の、相空間における密度を表わす。したがって、$\int_{\mathbb{R}^6} n(x,v,t)dxdv$ は時刻 t での中性子の総数を与える．この故に我々は方程式 (1.1) を $L^1(\mathbb{R}^6)$ で解く．方程式 (1.1) の右辺才 1 項は中性子集団の自由運動を記述する．右辺才 2 項及び才 3 項は中性子とウラニウムなどの物質との相互作用を表わす．後で必要になるので

$$\sigma_p(x, v') = \int k(x, v', v)\,dv$$

なる函数を定義しておく．σ_p，σ_a の添字 p，a はそれぞれの物理的な意味に由来がある．k，σ_p，σ_a の物理的な意味については Reed - Simon [4] を見られたい．

さて，k，σ_a に対する仮定を述べよう．

仮定A

(i) k は $\mathbb{R}^9$ における非負可測函数，σ_a は $\mathbb{R}^6$ における非負可測函数である．

(ii) 各 (x, v') について $k(x, v', \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ であって

$$\operatorname*{ess.sup}_{x,\, v} \left[\sigma_p(x, v) + \sigma_a(x, v) \right] < +\infty .$$

(iii) ある compact set $D \subset \mathbb{R}^3_x$ が存在して，$x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ のとき $k(x, v', v) = 0$，$\sigma_a(x, v) = 0$．

(iii)で，D は物質の占める集合である．この仮定は Reed - Simon [4]，Simon [5] におけるものと同じである．

我々は線形 Boltzmann 方程式 (1.1) に対する散乱理論を展開したいのであるが，(1.1) と比較すべきは自由運動の方程式

(1.2) $\quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, v, t) = - v \cdot \nabla_x u(x, v, t)$

であろう．これを解くために $L^1(\mathbb{R}^6)$ における有界作用素の族 $\{W_0(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ を

(1.3) $\quad [W_0(t) u](x, v) = u(x - tv, v)$

で定義しよう．$\{W_0(t)\}_{t\in R}$ は $L^1(\mathbb{R}^6)$ での等長作用素から成る強連続群であることが直ちにわかる．さらに、$\{W_0(t)\}_{t\in R}$ の生成作用素を $-B_0$ とすると、$C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ は B_0 の core であって

$$B_0 n = v\cdot\nabla_x n, \qquad n\in C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$$

となる．したがって、方程式 (1.2) は $\{W_0(t)\}_{t\in R}$ によって解けることがわかる．しかも初期 data n が非負ならば解 $W_0(t)n$ は任意の t に対して非負である．この性質は (1.2) の解が密度を表わすことから当然望まれることである．以後、$W_0(t)$ を e^{-tB_0} で表わす．

さて、(1.1) を解くために、$L^1(\mathbb{R}^6)$ における作用素 A_1, A_2 を

$$(A_1 n)(x,v) = -\int k(x,v';v)\,n(x,v')\,dv'$$

$$(A_2 n)(x,v) = \sigma_a(x,v)\,n(x,v)$$

で定義する．簡単な計算で A_i $(i=1,2)$ は有界作用素であって

$$\|A_1\| \le \|\sigma_p\|_\infty, \qquad \|A_2\| \le \|\sigma_a\|_\infty$$

となることが示される．そこで

$$B = B_0 + A_1 + A_2$$

とおく．Kato [3], P. 497, Theorem 2.1 によれば、$-B$ も $L^1(\mathbb{R}^6)$ における強連続群の生成作用素である．したがって、方程式 (1.1) は $\{e^{-tB}\}_{t\in R}$ によって解くことができる．と

ところが、e^{-tB_0}と違って、初期data $u \geqq 0$ のとき $e^{-tB}u \geqq 0$ となるのは、$t \geqq 0$ のときだけであることが Simon [5] によって示されている。$e^{-tB}u$ が非負でなければ、密度としての意味はないので、以後 $\{e^{-tB}\}_{t \geqq 0}$ のみを扱う。

さて、群 $\{e^{-tB_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$ 及び半群 $\{e^{-tB}\}_{t \geqq 0}$ に対して、散乱理論が考察すべき対象は、波動作用素

$$W_- = \operatorname*{s-lim}_{t \to -\infty} e^{tB} e^{-tB_0}$$

及び、逆波動作用素

$$\widetilde{W}_+ = \operatorname*{s-lim}_{t \to +\infty} e^{tB_0} e^{-tB}$$

である。W_-, $\widetilde{W}_+$ の存在に関しては Hejtmanek [2], Simon [5], Voigt [8] において調べられている。本稿では、これらの存在については調べない。

我々の問題は $\widetilde{W}_+$ の値域を調べること、及び B_0 と B のスペクトルを調べることである。我々の主要な目的は、「散乱理論はスペクトル解析における有効な武器である」というテーゼが、Banach空間においても正しいことを示すことにある。

$\widetilde{W}_+$ の値域については §2 で、B_0 と B のスペクトルについては §3 で調べる。

§2 $\widetilde{W}_+$ の値域

$\widetilde{W}_+$ の値域に関する我々の結果を述べよう。

定理1. 仮定Aが満されているとし、さらに$\widetilde{W}_+$が存在するとせよ。このとき、$\widetilde{W}_+$の値域は$L^1(\mathbb{R}^6)$で稠密である。

この定理の意味は次の通り：方程式(1.1)の任意の解に対して、これと漸近的に同じふるまいをする自由運動の方程式(1.2)の解が必ずあるとせよ。すると、そのような(1.2)の解の初期data全体は$L^1(\mathbb{R}^6)$で稠密である。

定理1の証明のideaは、Enss[1]がSchrödinger方程式の散乱理論において用いたものに基く。しかし、我々の場合とSchrödinger方程式の場合とで根本的な相違がいくつかある。まず

1° 函数空間がSchrödinger方程式の場合、Hilbert空間であるのに対して、Boltzmann方程式の場合にはBanach空間であること。

このことはEnss流のやり方がHilbert空間のみならず、Banach空間においても有効なことを教える。

2° Schrödinger方程式の場合、波動作用素

$$W_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}, \quad (H_0 = -\Delta,\ H = H_0 + V)$$

を扱うのに対し、我々の場合、逆波動作用素を扱うこと。

このおかげで我々はe^{-tB}を自由運動e^{-tB_0}で近似する必要がない。

3° 後に述べる「Enss の分解原理」において、分解作用素が Schrödinger 方程式の場合、擬微分作用素であるのに対し、Boltzmann 方程式の場合、かけ算作用素であること。

このために、Enss の分解原理の証明は Boltzmann 方程式の場合の方が、はるかに初等的で簡単になる。

Enss の分解原理を述べよう。

<u>定理 2.1.</u> 仮定Aが満されているとし、$0<a<b<+\infty$ とせよ。このとき $L^1(\mathbb{R}^6)$ での有界作用素の族 $\{D_r^\pm\}_{r>0}$ 及び $\{D_r^0\}_{r>0}$ が存在して次の (i) ～ (v) が成り立つ：

(i) 任意の $r>0$ と $\operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}^3 \times \{v;\ a \leq |v| \leq b\}$ なる任意の $u \in L^1(\mathbb{R}^6)$ に対し

$$(D_r^+ + D_r^- + D_r^0)u = u$$

(ii) 正数Mを $D \subset \{x;\ |x| < M\}$ なるものとする。任意の $r \geq 2M$ に対し

$$e^{-tB} D_r^\pm = e^{-tB_0} D_r^\pm, \qquad t \gtrless 0 \quad (\text{複号同順})$$

(iii) 任意の $r>0$ に対し

$$F(|x| \leq \frac{r}{2})\, e^{-tB_0} D_r^\pm = 0, \qquad t \gtrless 0 \ (\text{複号同順})$$

ただし、$F(|x| \leq r)$ は集合 $\{x;\ |x| \leq r\} \times \mathbb{R}_v^3$ の定義函数による掛け算作用素。

(iv) 任意の $r>0$，任意の $t \in \mathbb{R}$，任意の $u \in L^1(\mathbb{R}^6)$ につ

いて

$$\mathrm{supp}\,[\, e^{tB_0} D_r^{\pm} e^{-tB_0} \eta \,] \subset \mathrm{supp}\, \eta$$

(v) 任意の $r > 0$ について

$$\underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\, D_r^0 e^{-tB_0} = 0 .$$

<u>系.</u> $r \geq 2M$ のとき

(i) もし W_- が存在すれば、$(W_- - I) D_r^- = 0$.

(ii) もし $\widetilde{W}_+$ が存在すれば、$(\widetilde{W}_+ - I) D_r^+ = 0$.

定理2.1の証明は、ここでは与えない。この定理の証明については Umeda [7] を見られたい。定理1の証明には $\widetilde{W}_+$ の intertwining property も必要である。

<u>定理2.2.</u> 仮定Aが満されているとせよ。

(i) もし W_- が存在すれば、任意の $t \in \mathbb{R}$ について

$$e^{-tB} W_- = W_- e^{-tB_0}$$

(ii) もし $\widetilde{W}_+$ が存在すれば、任意の $t \in \mathbb{R}$ について

$$e^{-tB_0} \widetilde{W}_+ = \widetilde{W}_+ e^{-tB} .$$

<u>定理1の証明</u>　背理法による。$\mathrm{Ran}(\widetilde{W}_+)$ ($\widetilde{W}_+$ の値域) が $L^2(\mathbb{R}^6)$ で稠密でないとせよ。すると、次のような $\eta \in$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ を見い出せる：

$$n \neq 0, \quad n \notin \mathrm{Cl}\,\mathrm{Ran}(\widetilde{W}_+) \quad (\mathrm{Cl} = \text{closure}),$$

$$\mathrm{supp}\, n \cap \{(x, v) ; \ v = 0\} = \phi .$$

Hahn - Banach の定理を用いれば

(2.1) $\quad (f, n) = 1$

(2.2) $\quad (f, m) = 0 \quad \text{for } \forall\, m \in \mathrm{Cl}\,\mathrm{Ran}(\widetilde{W}_+)$

を満たす $f \in L^\infty(\mathbb{R}^6)$ $(= (L^1(\mathbb{R}^6))^*)$ の存在がわかる．

さて，$R>0$，$0<a<b<+\infty$ を

(2.3) $\quad \mathrm{supp}\, n \subset \{x ; |x| \leq R\} \times \{v ; a \leq |v| \leq b\}$

となるように取ろう．定理2.1 によれば，定理2.1 (i) ～ (v) が成り立つような有界作用素の族 $\{D_r^\pm\}$ 及び $\{D_r^0\}$ が存在する．e^{-tB_0} の表示 (1.3) から明らかなように

$$\mathrm{supp}[e^{-tB_0} n] \subset \mathbb{R}^3 \times \{v ; a \leq |v| \leq b\}$$

だから，定理2.1 (i) により

(2.4) $\quad e^{-tB_0} n$

$$= D_r^+ e^{-tB_0} n + D_r^- e^{-tB_0} n + D_r^0 e^{-tB_0} n$$

と分解できる．$(f, n) = ((e^{tB_0})^* f,\ e^{-tB_0} n)$ と変形して，これに (2.4) を代入すると

$$\begin{aligned}(f, n) &= ((e^{tB_0})^* f,\ D_r^+ e^{-tB_0} n) \\ &\quad + ((e^{tB_0})^* f,\ D_r^- e^{-tB_0} n) \\ &\quad + ((e^{tB_0})^* f,\ D_r^0 e^{-tB_0} n)\end{aligned}$$

$$\equiv \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

を得る。I, II, IIIの各々を評価しよう。まずIについて。

定理2.1の系を用いると、$r \geqq 2M$ のとき

$$\mathrm{I} = ((e^{tB_0})^* f,\ \widetilde{W}_+ D_r^+ e^{-tB_0} n)$$
$$= (f,\ e^{tB_0} \widetilde{W}_+ D_r^+ e^{-tB_0} n)$$
$$= (f,\ \widetilde{W}_+ e^{tB} D_r^+ e^{-tB_0} n) \qquad \text{(定理2.2による)}.$$

ここで(2.2)を用いると、$r \geqq 2M$ のとき $\mathrm{I} = 0$ を得る。

次にIIについて。

$$\mathrm{II} = (f,\ F(|x| \leqq \tfrac{r}{2}) e^{tB_0} D_r^- e^{-tB_0} n)$$
$$+ (f,\ F(|x| \geqq \tfrac{r}{2}) e^{tB_0} D_r^- e^{-tB_0} n)$$
$$\equiv \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 .$$

定理2.1 (iii) により

$$t \geqq 0 \text{ のとき } \mathrm{II}_1 = 0.$$

(2.3) と定理2.1 (iv) より

$$r > 2R \text{ のとき } \mathrm{II}_2 = 0.$$

したがって、$t \geqq 0$, $r > 2R$ のとき $\mathrm{II} = 0$。最後にIIIについて。次の評価

$$\mathrm{III} \leqq \|f\|_\infty \|D_r^0 e^{-tB_0} n\|_1$$

と定理2.1 (v) とから $\mathrm{III} \to 0$ $(t \to +\infty)$ となる。以上をまとめると、結局 $(f, n) = 0$ を得る。これは(2.1)に反する。

(証明終り)

§3. B_0 及び B のスペクトル

初めに記号を導入しよう．T を Banach 空間 X における線形作用素とする．T のスペクトル、点スペクトル、剰余スペクトル、連続スペクトルをそれぞれ $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_c(T)$ で表わそう．$\sigma(T) = \sigma_p(T) + \sigma_r(T) + \sigma_c(T)$ である（"+" は集合としての直和）．これらのスペクトルの定義については Stone [6] p. 129 を見られたい．また T のレゾルベント集合を $\rho(T)$ で表わす．

B_0 及び B のスペクトルを調べるのに必要な命題を3つ準備しよう．

<u>命題3.1.</u>　T を Banach 空間 X における閉作用素であって、その定義域 $D(T)$ は X で稠密であるとせよ．このとき

(i) $\lambda \in \sigma_r(T)$ ならば $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

(ii) $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ ならば $\lambda \in \sigma_r(T) + \sigma_p(T)$.

<u>命題3.2.</u>　$-T$ を Banach 空間 X における強連続な半群の生成作用素とせよ．さらに、$\lambda \in \sigma_p(T^*)$ とし $f \in X^*$ を対応する T^* の固有ベクトルとせよ．このとき、任意の $u \in X$ と任意の $t \geqslant 0$ に対して

$$(f,\ e^{-tT}u) = e^{-\lambda t}(f,\ u)$$

が成り立つ.

$-T$ が強連続な群の生成作用素なら、命題3.2の逆が成り立つ.

<u>命題3.3.</u>　$-T$ を Banach 空間 X における強連続な群の生成作用素とせよ. さらに、或る $\lambda \in \mathbb{C}$ と或る $f \in X^*$, $\neq 0$ と或る開区間 (α, β) とが存在して

$$(f, e^{-tT} u) = e^{-\lambda t} (f, u)$$

が任意の $u \in D(T)$、任意の $t \in (\alpha, \beta)$ に対して成り立つとせよ. このとき、$\lambda \in \sigma_p(T^*)$ である.

命題3.1は簡単な考察から直ちに従う. 命題3.2, 3.3の証明については Umeda [7] を見られたい.

B_0 のスペクトルに関する我々の結果を述べよう.

<u>定理2.</u>　B_0 のスペクトルは剰余スペクトルのみから成っており、しかも虚軸に一致する: $\sigma(B_0) = \sigma_r(B_0) = i\mathbb{R}$.

ここで、$i\mathbb{R}$ は虚軸を表わす.

この結果は我々の「常識」に反する. というのは、大抵の

場合、物理的に意味のある作用素は剰余スペクトルをほとんどもたないと、思われているからである。B_0は物理的な意味のある作用素を物理的に自然な函数空間において定義したものであるから、定理2に述べた事実は、まことに面白いと言わざるを得ない。

<u>定理2の証明</u>. すべての$t \in \mathbb{R}$について$\| e^{-tB_0} \| = 1$だから

$$\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \subset \rho(B_0)$$

がHille-Yosidaの定理から従う。したがって

(3.1) $\sigma(B_0) \subset i\mathbb{R}$.

さて、各純虚数$i\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$)に対して

(3.2) $f_\mu(x, v) = \exp\{ i\mu x \cdot v / |v|^2 \}$

とおこう。$f_\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^6)$であって、$B_0^* f_\mu = -i\mu f_\mu$が成り立つ。命題3.1によれば、$i\mu \in \sigma_r(B_0)$又は$i\mu \in \sigma_p(B_0)$である。ところが純虚数は$B_0$の固有値にはなり得ないので、$i\mu \in \sigma_r(B_0)$。よって$i\mathbb{R} \subset \sigma_r(B_0)$が示された。このことと(3.1)とから定理が従う。　(証明終り)

$\mathrm{Ran}(\tilde{W}_+)$が$L^1(\mathbb{R}^6)$で稠密である、という定理1の結果を用いれば、Bの剰余スペクトルはB_0の剰余スペクトルを

含むことが示される.

<u>定理3.</u> 仮定Aが満されているとし、$\widehat{W}_+$が存在するとせよ. このとき

$$\sigma(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \|\sigma_p\|_\infty + \|\sigma_a\|_\infty\},$$

$$i\mathbb{R} \subset \sigma_r(B)$$

である.

<u>証明</u> $\widehat{W}_+$が存在することと一様有界性定理とから、$\sup_{t \geqslant 0} \| e^{tB_0} e^{-tB} \| < +\infty$ が従う. $\| e^{-tB_0} \| = 1$ だから $\sup_{t \geqslant 0} \| e^{-tB} \| < +\infty$. そこで Hille-Yosida の定理を使うと

$$(3.3) \qquad \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,\lambda < 0\} \subset \rho(B).$$

ところで、Kato [3], P. 497, Theorem 2.1を使うと

$$\| e^{tB} \| \leqslant e^{t(\|\sigma_p\|_\infty + \|\sigma_a\|_\infty)}, \qquad t \geqslant 0$$

なる評価が得られることを注意しよう. 再び Hille-Yosida の定理を用いると

$$(3.4) \qquad \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,\lambda > \|\sigma_p\|_\infty + \|\sigma_a\|_\infty\} \subset \rho(B)$$

を得る. (3.3)と(3.4)を合せて、定理の主張の前半を得る.

後半の主張を示そう. f_μ を (3.2) の通りとする. 命題3.2 から任意の $h \in L^1$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ について

$$(3.5) \qquad (f_\mu,\ e^{-tB_0}\widetilde{W}_+ n) = e^{i\mu t}(f_\mu,\ \widetilde{W}_+ n)$$

が成り立つ。定理2.2 (ii)を用いると

$$(3.5)\text{の左辺} = ((\widetilde{W}_+)^* f_\mu,\ e^{-tB} n)$$

となる。したがって

$$((\widetilde{W}_+)^* f_\mu,\ e^{-tB} n) = e^{i\mu t}((\widetilde{W}_+)^* f_\mu,\ n)$$

を得る。定理1の結果より $(\widetilde{W}_+)^* f_\mu \neq 0$。そこで命題3.3を用いると、$-i\mu \in \sigma_p(B^*)$。命題3.1より $i\mu \in \sigma_r(B)$ 又は $i\mu \in \sigma_p(B)$。ところが純虚数はBの固有値になり得ないので $i\mu \in \sigma_r(B)$。よって $i\mathbb{R} \subset \sigma_r(B)$ が示された。

(証明終り)

文献

[1] V. Enss: Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering, I. Short range potential, Commun. Math. Phys., 61 (1978) 285-291.

[2] J. Hejtmanek: Scattering theory of the linear Boltzmannoperator, Commun. Math. Phys., 43 (1975) 109-120.

[3] T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators,

Springer, 1966, 第2版 1976.

[4] M. Reed - B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, vol. III Scattering Theory, Academic Press, 1979.

[5] B. Simon: Existence of the scattering matrix for the linearized Boltzmann equation, Commun. Math. Phys., 41 (1975) 99 - 108.

[6] M. H. Stone: Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. XV, 1932.

[7] T. Umeda: Scattering and spectral theory for the linear Boltzmann operator, 準備中.

[8] J. Voigt: On the existence of the scattering operator for the linear Boltzmann equation, J. Math. Anal. Appl. 58 (1977) 541 - 558.